Revista
ADMpg
Gestão Estratégica

Estudo comparativo entre a teoria dos jogos e programação matemática aplicado a fretes de transportes

Nehemias Anastácio Santos da Silva
UFBA

Tácito Augusto Farias
UFS

Grazielle Anastácia Santos da Silva
UFPE

Resumo:
O presente trabalho busca encontrar, atráves dos intrumentais combinados da programação matemática, via programação linear, e da teoria dos jogos, a estratégia ótima para tomada de decisão de preços de fretes de duas empresas do mercado de transporte ferroviário de cargas – a empresa América Latina Logística do Brasil S.A (ALL) e a MRS Logística S.A. – sobre quatro diferentes classes de produtos. Os resultados mostram que a melhor estratégia para a empresa MRS é optar pelo transporte de uma única classe de produto, denominada “demais produtos”. Já para a empressa ALL a estratégia ótima é alcançada quando esta opta por transportar apenas a classe de produtos “conteiner cheio de 20 pés”. Isso monstra que, apesar de disporem de possibilidade de transportar quatro cargas diferentes, a estratégia ótima para as duas empresas é apenas transpotar um produto diferenciado
Palavras chave: Teoria dos Jogos, Programação linear, Transportes.

A comparative study between the theory of games and mathematical programming applied to cargo transports

Abstract:
This study attempts to find, through the combined instruments of mathematical programming via linear programming and the theory of games, the optimal strategy for decision making in freight prices of two companies in the market for rail transport of cargo - the Latin America business Logistics do Brasil SA (ALL) and MRS Logística SA - on four different classes of products. The results show that the best strategy for the company is opting for MRS transport of a single class of product, the "other products”. For the Empress ALL the optimal strategy is achieved when it chooses to carry only the class of “container full of 20 feet". This demonstrates that, despite having the ability to carry four different loads, the optimal strategy for both companies is only transpotar a differentiated product
Key-words: Games Theory, Linear Programming, Transports.

1 Introdução

A Teoria dos Jogos é uma série de ensaios dentro da Economia que atua sobre expectativas e comportamentos. Sendo mais abrangente, trata da cooperação. É uma análise matemática de situações que envolvam interesses em conflito a fim de indicar as melhores opções de atuação para que seja atingido o objetivo desejado. Sua origem está em jogos conhecidos, como o pôquer e o xadrez, por exemplo, mas o foco é muito mais amplo, relacionando–se a temas da sociologia, economia, política e ciência militar (GIBBONS, 1982).

Já a área que estuda a otimização de recursos é denominada Programação Matemática. Nela a quantidade a ser maximizada ou minimizada é descrita como uma função matemática dos recursos (variáveis de decisão) escassos, conforme SHAPIRO (1993), JOHNSON & MONTGOMERY (1974), BARZARAA et al (1990) , WINSTON (1991). As relações entre as variáveis são formalizadas através de restrições ao problema expressas como equações ou inequações matemática. Ademais, a programação matemática pode ser subdividida em programação inteira, programação não-linear e programação linear. (BARZARAA, et al 1990).

À luz dessas definições, estabelecer-se-á, agora, o objetivo fundamental deste trabalho. Visto que a teoria dos jogos trata da análise das ações dos agentes jogadores – ações estas interdependentes – em um ambiente estratégico, onde o comportamento a ser seguido busca a maximização do resultado ou *payoff*, e visto também que a programação matemática busca maximizar funções de variáveis de decisões, dadas restrições de recursos, com o intuito de utilizá-los de forma eficiente e eficaz, percebe-se, de forma preliminar, a interligação entre essas duas esferas analíticas.

De fato, o que aqui se pretende é combinar os instrumentais da teoria dos jogos e da programação matemática, centrada na programação linear, a fim de solucionar o problema exemplo, qual seja, descobrir as estratégias ótimas de duas empresas concorrentes do mercado de transporte ferroviário.

2 Teoria dos Jogos e Programação Linear

Seja um jogo de soma nula, entre 2 empresas (A e B), no qual a empresa A dispõe de *n* estratégias puras e B de *m*, e designaremos por a_{ij} o lucro (o valor que A ganha a mais quando B escolhe aquela estratégia) correspondente às estratégias *i* de A e *j* de B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se A recorrer às suas estratégias puras com freqüências x_1, x_2, ..., x_n a estratégia combinada resultante pode representar-se por $x=(x_1, ..., x_n)$ sendo, evidentemente, $x_1 + ...+ x_n=1$ e $x_i \geq 0$

De maneira semelhante, em relação a B podem representar-se as correspondentes estratégias combinadas por $y= (y_1, ...,y_m)$ se forem y_1, ..., y_m as freqüências com que utiliza as suas m estratégias puras, sendo portanto também $y_1 + ... + y_m = 1$ e $y_i \geq 0$.

Se as duas empresas escolherem, respectivamente, as estratégias combinadas x e y o lucro médio da empresa A será dado por:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 < j < m}} x_i y_j a_{ij}$$

O lucro da empresa A nunca poderá ser inferior a qualquer que seja a estratégia de B.

$$T_1 = min \sum_{i=1}^{n} x_i y_j a_{ij}$$

Como vimos atrás, o procedimento racional de A leva-o a procurar a estratégia que lhe garanta o maior dos ganhos mínimos que representaremos por t_1:

$$\boldsymbol{t_1 = max}\ min \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}$$

Procedendo racionalmente, B procurará a estratégia capaz de lhe garantir o menor dos custos máximos, que designaremos por t2. Teremos assim,

$$\boldsymbol{t_2 = min}\ max \sum_{j=1}^{m} y_j a_{ij}$$

De acordo com o teorema fundamental da teoria dos jogos, também designado do Minimax, demonstra-se que se tem sempre t1 = t2 , existindo para cada jogador uma estratégia combinada ótima. Em relação a A essa estratégia ótima levá-lo-á a ganhar pelo menos o valor do jogo qualquer que seja o procedimento de B. Este, por seu lado, recorrendo a estratégia ótima respectiva impedirá A de ganhar mais do que valor do jogo.

Como vimos atrás, o lucro da empresa A nunca poderá ser inferior a

$$T_1 = min \sum_{i=1}^{n} x_i y_j a_{ij}$$

E que permite escrever de forma mais explicita

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ ... + x_n a_{n1} \geq T_1$$

$$x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \ ... + x_n a_{n2} \geq T_1$$

. . ..

$$x_1 a_{1m} + x_2 a_{2m} + \ ... + x_n a_{nm} \geq T_1$$

Tendo $\sum x_i = 1$ e $x_i \geq 0$

O procedimento racional de A leva-o a procurar a estratégia x=(x_1, ..., x_n) que conduz à maximização do seu ganho mínimo T_1. A questão pode formular-se como um problema de programação linear fazendo a substituição $x_i=u_iT_i$ e procurando mininizar

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{T_1}$$

Sujeito a

$$u_1 a_{11} + u_2 a_{21} + \ ... + u_n a_{n1} \geq 1$$

$$u_1 a_{12} + u_2 a_{22} + \ ... + u_n a_{n2} \geq 1$$

. . ..

$$u_1 a_{1m} + u_2 a_{2m} + \ ... + u_n a_{nm} \geq 1$$

Sendo $u_i \geq 0$.

Chama-se a atenção para o fato da substituição $x_i=u_iT_1$ só ser válida se $T_1>0$, o que evidentemente se verifica uma vez que se admitiu atrás ser possível ter sempre $a_{ij}>0$.

Analogamente, por outro lado, em relação a B pode se escrever:

$$y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + \ ... + y_m a_{n1} \leq T_2$$

$$y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + \ ... + y_m a_{n2} \leq T_2$$

. . ...
. .

Tendo $\sum y_i = 1$ e $y_i \geq 0$

Recorrendo agora à substituição $y_i=v_jT_2$ pode se formular igualmente o procedimento racional de B em termos de programação linear, procurando maximizar

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m = \frac{1}{T_2}$$

Sendo as condições expressas por:

$$v_1 a_{11} + v_{1_2} a_{21} + \ ... + v_m a_{1m} \leq 1$$

$$v_1 a_{12} + v_2 a_{22} + \ ... + v_m a_{2m} \leq 1$$

. . ..

$$v_1 a_{n1} + v_2 a_{n2} + \ ... + u_m a_{nm} \leq 1$$

Sendo $u_i \geq 0$.

No caso do jogo entre A e B as soluções do primal e do dual correspondem às estratégias ótimas para os dois jogadores sendo além disso o valor do jogo dado por Max T_1= min T_2, isto é, pelo valor comum das respectivas funções objetivos.

3 Material e método

Neste trabalho, o estudo de caso teve por base a utilização das tabelas de frete ferroviário das empresas ALL – América Latina Logística do Brasil S.A. e MRS Logística S.A., para o transporte de quatro classes diferentes produtos em um percurso de 51 a 75 quilômetros, conforme a tabela 1 abaixo. Todos foram obtidos através do portal da Agência Nacional de Transportes Terrestres (ANTT), com data de vigência de agosto de 2008.

Produto	Empresas	
	ALL	**MRS**
Container Cheio 20 pés	215,95	274,26
Container Cheio 40 pés	431,89	471,04
Container Vazio de 20 e 40 pés	172,75	264,33
Demais Produtos	28,45	27,94

Fonte: ANTT – Agência Nacional de Transportes Terrestres. (2008).

TABELA 1 - Tabela Tarifária para distância entre 51 e 75 quilômetros

A fim de construir a matriz de pagamentos para a ALL e MRS, supõe-se que estas sejam contratadas simultaneamente e várias vezes durante um determinado período, considerando-se ainda que as mesmas disputam de forma competitiva estas contratações.

Dentro desse contexto, essas empresas podem oferecer apenas a proposta de transporte de um produto por contrato. Desta forma, a matriz de pagamentos retratará as diferenças entre os valores de frete cobrados pela ALL e MRS para o transporte de cada produto, e essa diferença mostrará o quanto a ALL estará perdendo para MRS ao decidirem por qual produto transportar, e vice-versa. O objetivo da transformação para um problema de programação linear é minimizar a perda máxima que a empresa ALL tem perante a empresa MRS, assim como maximizar o ganho mínimo que a MRS tem perante a ALL. Levando-se em conta que esta análise será feita a cada contratação, busca-se, assim, encontrar as estratégias ótimas para as duas empresas.

4 Análise de dados e resultados

O seguinte jogo foi montado baseado na suposição que a matriz formada representa o lucro que a empresa A tem em relação a empresa B ao escolher determinado produto.

		Empresa 2			
		A - Cont.Cheio 20 pés	**B - Cont.Vazio 20 ou 40 pés**	**C - Cont. Cheio 40 pés**	**D - Demais Produtos**
Empresa 1	**A - Cont.Cheio 20 pés**	462,31	505,51	246,37	649,81
	B - Cont.Vazio 20 ou 40 pés	452,38	495,58	236,44	639,88
	C - Cont. Cheio 40 pés	659,09	702,29	443,15	846,59
	D - Demais Produtos	215,99	259,19	0,05	403,49

TABELA 2 – Matriz de jogo entre duas empresas

O lucro da empresa A nunca poderá ser inferior a

$$T_1 = min \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}$$

Como a matriz de lucros e custos formada para as duas empresas possuía valores negativos, adicionamos um valor em todos os elementos da matriz para torná-la positiva. Após esse procedimento montamos o problema de programação linear que é apresentado abaixo:

$$462{,}31x_1 + 505{,}51x_2 + 246{,}37x_3 + 649{,}81x_4 \geq T1$$

$$452{,}38x_1 + 495{,}58x_2 + 236{,}44x_3 + 639{,}88x_4 \geq T1$$

$659{,}09x_1 + 702{,}29x_2 + 443{,}15x_3 + 846{,}59x_4 \geq T1$

$215{,}99x_1 + 259{,}19x_2 + 0{,}05x_3 + 403{,}49x_4 \geq T1$

Tendo $\sum x_i = 1$ e $x_i \geq 0$

O procedimento racional da empresa MRS leva-o a procurar a estratégia x=(x_1, ..., x_n) que conduz à maximização do seu ganho mínimo T_1. Fazendo a substituição $x_i=u_iT_i$ e procurando minimizar

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{T_1}$$

Sujeito a

$462{,}31u_1 + 505{,}51u_2 + 246{,}37u_3 + 649{,}81u_4 \geq 1$

$452{,}38u_1 + 495{,}58u_2 + 236{,}44u_3 + 639{,}88u_4 \geq 1$

$659{,}09u_1 + 702{,}29u_2 + 443{,}15u_3 + 846{,}59u_4 \geq 1$

$215{,}99u_1 + 259{,}19u_2 + 0{,}05u_3 + 403{,}49u_4 \geq 1$

Sendo $u_i \geq 0$.

O resultado apresentado no solver do Excel, mostra que os valores das estratégias para a empresa MRS são os seguintes:

x_1= 0, x_2=0 , x_3= 0 e x_4= 1 e Z=-0,51

Ou seja, a melhor estratégia para a empresa MRS seria para toda licitação, optar por fazer o carregamento de demais produtos, pois o valor de sua estratégia mostra que a freqüência para a escolha desse produto é de 100%.

Procedendo da mesma maneira para a empresa All, o custo dela não pode ser superior a:

$$T_2 = max \sum_{i=1}^{n} y_i a_{ij}$$

Qualquer que seja a estratégia seguida pela empresa MRS. A equação para este problema é apresentada a seguir:

$462{,}31y_1 + 505{,}51y_2 + 246{,}37y_3 + 649{,}81y_4 \leq T2$

$452{,}38y_1 + 495{,}58y_2 + 236{,}44y_3 + 639{,}88y_4 \leq T2$

$659{,}09y_1 + 702{,}29y_2 + 443{,}15y_3 + 846{,}59y_4 \leq T2$

$215{,}99y_1 + 259{,}19y_2 + 0{,}05y_3 + 403{,}49y_4 \leq T2$

Tendo $\sum y_i = 1$ e $y_i \geq 0$

O procedimento racional da empresa ALL leva-o a procurar a estratégia Y=(y_1, ..., y_n) que conduz à minimização do seu custo máximo T_2. Fazendo a substituição $y_i=v_iT_i$ e procurando minimizar

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \frac{1}{T_2}$$

Sujeito a

$462{,}31v_1 + 505{,}51v_2 + 246{,}37v_3 + 649{,}81v_4 \geq 1$

$452{,}38v_1 + 495{,}58v_2 + 236{,}44v_3 + 639{,}88v_4 \geq 1$

$659{,}09v_1 + 702{,}29v_2 + 443{,}15v_3 + 846{,}59v_4 \geq 1$

$215{,}99v_1 + 259{,}19v_2 + 0{,}05v_3 + 403{,}49v_4 \geq 1$

Sendo $v_i \geq 0$.

O resultado do solver mostra que as estratégias para a empresa ALL são as seguintes:

y_1= 0, y_2=0 , y_3= 1 e y_4= 0 e Z=39,15

Ou seja , é melhor para a empresa ALL em todas as licitações optar pelo carregamento do produto com contêiner cheio de 40 pés.

5.Considerações finais

A teoria dos jogos constitui-se em um ramo das Ciências Econômicas cujo principal objetivo é analisar problemas de tomada de decisões por parte de agentes interdependentes, em um abiente estratégico. Pressupõe-se, fundamentalmente, que os agentes possuem um coportamento maximizador, ou seja, buscam, através de suas estratégias, maximizar o seu resultado (*payoff*). O resultado final de um jogo depende não apenas das decisões de um único jogador, mas sim de toda a combinação de possíveis decisões dos jogadores envolvidos no problema; dessa forma cada agente escolhe a sua estratégia de forma a maximizar seu próprio resultado dada as possíveis estratégias escolhidas pelos demais. Já a programação matemática constitui-se em uma série de instrumentais (programação linear, inteira e não-linear) capazes de otimizar um problema – uma função objetivo – dadas determinadas restrições. Em outras palavras, a programação matemática busca encontrar valores para variáveis de decisões de forma a minimizar ou maximizar a função objetivo.

Com base nestas duas teorias o presente trabalho buscou-se encontrar, atráves dos intrumentais combinados da programação matemática, via programação linear, e da teoria dos jogos, a estratégia ótima para tomada de decisão de preços de fretes de duas empresas do mercado de transporte ferroviário de cargas – a empresa América Latina Logística do Brasil S.A (ALL) e a MRS Logística S.A. – sobre quatro diferentes classes de produtos. Os resultados mostram que a melhor estratégia para a empresa MRS é optar pelo transporte de uma única classe de produto, denominada “demais produtos”. Já para a empressa ALL a estratégia ótima é alcançada quando esta opta por transportar apenas a classe de produtos "conteiner cheio de 20 pés". Isso demonstra que, apesar de disporem de possibilidade de transportar quatro diferentes, a estratégia ótima para as duas empresas é apenas transpotar um produto diferenciado.

Referências

BAZARAA, M. S & JARVIS, J. & SHERALI, H.D. **Linear programming and network flows**. 2nd ed. New York: Wiley, 1990.

GIBBONS, R. **Game theory for Applied Economists**. Princeton University Press. Princeton, New Jersey, 1982.

HILLER, F. S & LIVERMAN, G.J. **Introduction to operations research**. New York: Mc- Graw Hill, 2000.

KREPS, D. M. **A Course in Microeconomic Theory**. Harvester Wheatsheaf, New York, 1990.

JOHNSON, L.A. & MONTGOMERY, D.C.: **Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control**. John Wiley & Sons, Inc.,1974.

LIEBERMAN, G. & HILLIER, F. **Introduction to mathematical programming**. New York: McGraw-Hill; 2000.

MAS-COlelll,A. & M. D.WHINSTON & J.R GREEN: **Microeconomic Theory**. Oxford University Press, 1995

SHAPIRO, J.F.: **Mathematical Programming Models and Methods for Production Planning and Scheduling.** Em: GRAVES, S.C., RINNOOY KAN, A.H.G. and ZIPKIN, P.H. (editors): *Logistics of Production and Inventory* (Handbooks in Operations Research and Management Science: v.4), Elsevier Science Publishers B.V., p. 371-439, 1993.

VARIAN, H. R. **Microeconomia: Princípios Básicos**. Rio de Janeiro, Campos, 2003

WINSTON, W.L.: **Operations Research: Applications and Algorithms.** Wadsworth, Inc., 1991.