

SIMULAÇÃO NUMÉRICA USANDO ELEMENTOS FINITOS DO FLUXO DE ÁGUA DENTRO DE UMA VÁLVULA: FLUXO LAMINAR E TURBULENTO, I

NUMERICAL SIMULATION USING FINITE ELEMENTS OF THE WATER FLOW INSIDE A VALVE: LAMINATE AND TURBULENT FLOW REGIMES, I

Moisés Meza Pariona¹

¹ Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG, Campus em Uvaranas, Departamento de Matemática e Estatística e CIPP (Centro Interdisciplinar de Pesquisa), Ponta Grossa-PR, Brasil; (42) 220-3056; e-mail: mmpariona@uepg.br

Recebido para publicação em 23/05/2003

Aceito para publicação em 11/08/2003

RESUMO

Neste trabalho foi realizado o estudo do fluxo de água dentro de uma válvula, considerando o fluxo laminar e turbulento. Para isto, foi utilizado o método de elementos finitos para determinar o campo vetorial de velocidades e o campo de pressões através da solução da equação de Navier-Stokes. Nas simulações, a velocidade de entrada foi variada com a finalidade de gerar baixos e altos números de Reynolds, o que provocaria a turbulência; as velocidades na parede interna do duto, bem como a pressão na saída do duto foram fixadas em zero. Como resultado principal, foi observado que para velocidades acima de 10 cm/s o fluxo é turbulento. Além disso, para altas velocidades a turbulência aumenta e, conseqüentemente a velocidade de saída do fluxo diminui em relação ao de entrada.

Palavras-chave: elementos finitos, fluxo laminar e turbulento, água, duto

ABSTRACT

This work shows the study of the water flow inside a valve, considering laminar and turbulent flow regimes. In order to accomplish this, the finite element method was used to determine the vectorial field of velocities and pressures, by means of the solution of the Navier-Stokes equation. In the simulations, the entrance velocity was varied in order to produce low and high numbers of Reynolds, which could provoke turbulence. The velocity in the intern wall of the duct, as well the pressure in the exit of the duct were fixed at zero. As the main result, we observed that for velocities higher than 10 cm/s the flux is turbulent. Also, for high velocities

the turbulence increases and, consequently, the velocity of the outflow decreases in relation to the velocity of the inflow.

Key words: finite elements, laminate and turbulent flow, water, duct

1. Introdução

O estudo da mecânica de fluidos envolve as mesmas leis fundamentais da física e mecânica (Munson, 1994). Estas leis incluem as de movimento de Newton, a conservação da massa, a primeira e a segunda lei da termodinâmica. Assim, existem grandes similaridades entre a abordagem geral da mecânica dos fluidos e a da mecânica dos corpos rígidos e deformáveis. A mecânica de fluidos pode ser subdividido em duas categorias, tais como, estática e dinâmica dos fluidos. Mas, é propício definir e discutir previamente as propriedades dos fluidos (as que definem seu comportamento).

A seguir serão apresentadas as características e propriedades fundamentais (Munson, 1994), sendo que, a resistência de um fluido ao fluxo e a resistência ao movimento de um objeto, através dele, são usualmente estabelecidas em termos da viscosidade do fluido. A ação da viscosidade representa uma forma de atrito interno, exercido entre partículas adjacentes que se deslocam com velocidades diferentes. A viscosidade é uma propriedade termodinâmica (dependente da temperatura e pressão). Outra propriedade importante dos fluidos, é seu comportamento incompressível, isso significa que o volume e a densidade do fluido se mantêm constantes. Por outro lado, para um fluido compressível, a densidade é uma função da pressão e da temperatura, em geral, o escoamento destes tipos de fluidos são turbulentos. Outra característica dos fluidos é seu comportamento de fluxo laminar, isto é, o líquido tende a se mover em camadas com velocidades sucessivamente mais altas em relação à superfície, em repouso. No entanto, para alguns casos, acima de velocidades críticas, o fluxo tornar-se-á turbulento com a formação de redemoinhos e movimentos caóticos que dificultam a vazão. Essa turbulência aumenta dramaticamente a resistência ao fluxo de modo que grandes acréscimos de pressão são requeridos para um aumento da vazão. O fluxo turbulento é caracterizado por agi-

tação, desordem, perturbação. É causado por forças que agem com a finalidade de manter o fluxo em ordem e a velocidade do fluido varia com o tempo. A turbulência gera um aumento na transferência de calor, queda de pressão, entre outras modificações. Também é importante mencionar que os fluidos, para os quais a viscosidade é independente da pressão, são chamados de fluidos Newtonianos e um exemplo desse tipo de fluido é a água.

Existem três postulados de Stokes para caracterizar o comportamento de um fluido Newtoniano (Manual Ansys, 2002). São eles: a) O fluido é contínuo e isotrópico, b) o tensor de tensões é uma função linear da velocidade de deformação e o fluido Newtoniano não possui uma memória da configuração ou deformação sofrida no passado, c) quando a deformação é zero, a lei de deformação deve-se reduzir à condição da pressão hidrostática. Alguns exemplos de fluidos não-Newtonianos comumente considerados são o sangue, pastas de dentes, polímeros e argila de barro.

Outro parâmetro importante que caracteriza os fluidos é o número de Reynolds, que é número experimental, e é usado na mecânica de fluidos para prever a velocidade crítica de fluxo que caracteriza a turbulência. Foi observado, que se o escoamento num tubo é de comportamento laminar, o número de Reynolds deve ser menor que 2100, aproximadamente, e que se o escoamento for turbulento o número de Reynolds é maior que 4000 (Munson, 1994; Bird *et al.*, 1960). Para número de Reynolds entre estes dois limites, o escoamento pode alternar de um modo aparentemente aleatório, de características laminares a turbulentas (escoamento de transição) (Munson, 1994; Bird *et al.*, 1960).

Em certos casos, é comum encontrar situações onde o escoamento está confinado fisicamente (como, por exemplo, por paredes) e a pressão não pode ser determinada a priori como no caso de um jato livre. Dois exemplos típicos dessas situações podem ser

dados. Entre eles, o escoamento nos bocais e nas tubulações que apresentam diâmetro variável. Nesse caso, a velocidade média do escoamento varia pelo fato da área de escoamento não ser constante. Para a solução destes escoamentos confinados é necessário utilizar o conceito expresso na equação de continuidade (Munson, 1994; Bird *et al*, 1960)..

Os escoamentos normalmente são fenômenos tridimensionais, transientes e complexos, sendo que a velocidade é uma função espacial e temporal, tal como $V=V(x,y,z,t)$. Entretanto, em muitos casos, é normal se utilizar hipóteses simplificadoras para que seja possível analisar o problema sem sacrificar muito a precisão dos resultados da análise. Uma das hipóteses é considerar o escoamento real em forma unidimensional ou bidimensional e em situação estacionária. Na realidade, quase todos os escoamentos são transientes, ou seja, o campo de velocidade varia com o tempo.

As tubulações podem apresentar o fenômeno de resistência de distribuição do fluxo (Munson, 1994; Bird *et al*, 1960), podem ser devido à: (a) perda por fator de forma, estas perdas são geradas devido ao fluxo atravessar válvulas, cotovelos, tês entre outros. O propósito da utilização de uma válvula é fornecer um meio para controlar o vazão num sistema fluido, o

controle é realizado pela mudança da geometria do sistema (isto é, o fato de fechar ou abrir a válvula altera o padrão do escoamento através da válvula) que por sua vez altera as perdas associadas ao escoamento da válvula. A resistência devido ao escoamento, ou a perda de carga através da válvula, pode contribuir de maneira significativa à resistência do sistema. O padrão de escoamento, através de uma válvula típica, está mostrado na Figura 1. Outro tipo de perda, (b) perda por atrito; denotado por f , ocorre em seções circulares irregulares de um duto, nos trocadores de calor. Esse tipo de perda para tubos depende do número de Reynolds (Re). Para o fluxo laminar $f=64/Re$ e para o fluxo turbulento pode ser encontrado f é determinado através do diagrama de Moody. (c) perda por permeabilidade; este tipo de perda pode ocorrer no escoamento em filtros, quando se geram os fenômenos de capilaridade. Conseqüentemente, as acelerações e desacelerações, relativamente grandes, sofridas pelo fluido enquanto escoar por trajetórias curvas e que apresentam áreas variáveis e rugosas gera perda de pressão ou de carga. Assim, uma parte da energia cinética do fluido é parcialmente perdida pela dissipação viscosa, de modo que a pressão não retorna ao valor ideal.

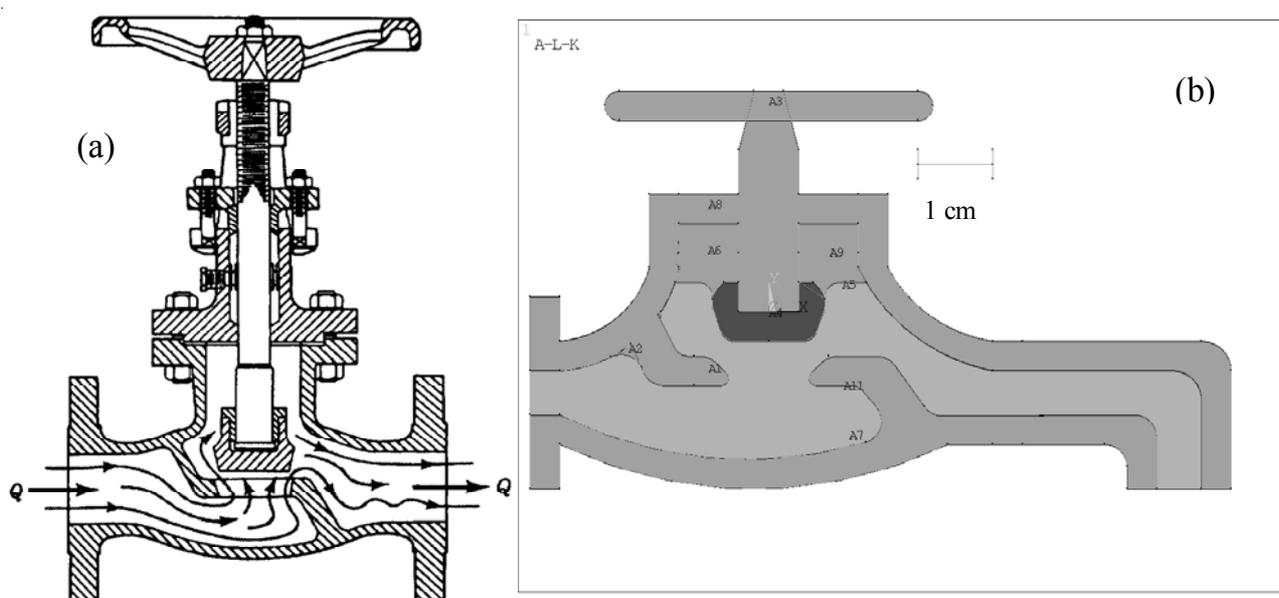


Figura 1 - Modelo da válvula (a) representação esquemática e (b) representação para elementos finitos

Simulação numérica

As equações fundamentais que descrevem o escoamento dos fluidos são mostradas a seguir (Munson, 1994; Manual Ansys, 2002; Bird *et al*, 1960; Patankar, 1980).

Uma das equações expressa a conservação de massa para um escoamento incompressível, é:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

Onde $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$ é o campo de velocidades.

A equação diferencial básica que descreve os escoamentos dos fluidos é a equação de Navier-Stokes, que em notação vetorial é dado por:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}(\vec{V} \cdot \nabla) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2)$$

Se a viscosidade for nula, a equação se reduz à equação de Euler:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}(\vec{V} \cdot \nabla) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} \quad (3)$$

A equação de Navier-Stokes para fluxo turbulento, para o caso estacionário é:

$$\frac{\partial(\rho V_i V_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu_e \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \right]$$

$$\text{sendo } i, j=1, 2 \text{ e } 3. \quad (4)$$

onde a viscosidade efetiva $\mu_e = \mu + \mu_t$ (sendo μ_t a viscosidade turbulenta) que por sua vez depende da energia cinética turbulenta, da velocidade de dissipação da energia cinética e da densidade. Para um estado estacionário que não apresente o efeito da gravidade, a equação de Navier-Stokes se reduz a (5):

$$\vec{V}(\vec{V} \cdot \nabla) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (5)$$

A equação de Navier-Stokes apresentada pela equação (5) em duas dimensões pode ser representada a seguir:

(i) na direção x

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

(ii) na direção y

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

Define-se o número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho V D_h}{\mu} \quad (8)$$

onde D_h diâmetro hidráulico. Para o modelo de duas dimensões é considerado igual duas vezes a altura de entrada do duto (Manual Ansys, 2002).

A dificuldade para resolver as equações de Navier-Stokes provocou o desenvolvimento de vários procedimentos para a obtenção de soluções aproximadas. Entre eles, os métodos numéricos, pelos quais é possível obter soluções numéricas aproximadas para estas equações, para uma grande variedade de escoamentos. Em princípio, existem três tipos de técnicas disponíveis para a solução numérica das equações que descrevem o movimento dos fluidos (Patanekar, 1980; Alves Filho, 2000; Reddy, 1993; Cook, 1995) são: (1) o método das diferenças finitas, (2) o método dos elementos finitos e dos volumes finitos e (3) o método dos elementos de contorno. Nesses métodos, o campo de escoamento contínuo (as distribuições de velocidade e pressão em função do espaço e do tempo) passa a ser descrito em função de um conjunto de valores discretos e relativos a determinadas posições. Estas técnicas propiciam que as equações diferenciais sejam substituídas por um conjunto de equações algébricas que podem ser resolvidas computacionalmente.

O campo de escoamento, no método dos elementos finitos (Bird, 1960; Patankar, 1980; Alves Filho, 2000; Reddy, 1993; Cook, 1995), é substituído por um conjunto de pequenos elementos fluidos (normalmente os elementos são triangulares ou quadrados para os casos de escoamento bidimensional ou pequenos volumes quando o escoamento é tridimensional). As equações de conservação são escritas, numa forma apropriada, para cada elemento e o conjunto de equações resultante é resolvido numericamente para determinar-se o campo de escoamento discretizado. O número, tamanho e forma dos elementos são determinados, em parte, pela geometria e pelas condições do escoamento. É necessário utilizar um número bas-

tante grande de elementos finitos no estudo de escoamento. E também o número de equações algébricas que precisam ser resolvidas aumenta rapidamente com o número de elementos utilizados na simulação do escoamento. Todas as técnicas utilizadas na solução numérica de escoamento apresentam sutilezas que podem gerar grandes problemas. Por exemplo, é razoável admitir que uma discretização grande garante uma solução numérica mais precisa. Às vezes essa afirmação é verdadeira, mas muitas vezes uma maior discretização provoca problemas de estabilidade e convergência das soluções. Em tais casos a solução numérica pode exibir oscilações não razoáveis ou o resultado numérico pode divergir para um valor incorreto ou absurdo.

Inicialmente foi realizada a simulação numérica, através de elementos finitos, do comportamento do fluxo laminar e turbulento no interior de uma válvula. Dentro do fluxo foi determinado o campo vetorial de velocidades e o campo de pressões. Num estudo posterior, para dar continuidade ao trabalho, será apresentado um estudo do comportamento do fluxo quando se apresenta perda por atrito nas paredes do duto. Também, pretende-se investigar a influência, tanto da temperatura, como também, da deformação mecânica da borracha que controla o fluxo em tais válvulas. Esse tipo de estudo envolvendo todos os fatores se torna cada vez mais complexo, e é por essa razão que foi preferível a separação e apresentação por etapas.

2. Materiais e Métodos

Para estudar o fluxo laminar e turbulento foi considerado o escoamento da água através de uma válvula metálica. O modelo considerado está representado na Figura 1. O controle do fluxo é feito abrindo-se e fechando-se a manivela da válvula, que internamente é controlada por uma borracha também representada na Figura 1(b) parte escura. As dimensões do modelo estão em cm. As propriedades físicas da água são representadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Propriedades físicas da água à temperatura do meio ambiente (Bird, 1960; Buckius, 1992; Geiger, 1973)

Densidade	0,9982 g/cm ³
Condutividade térmica	0,00143 cal/s.cm.K
Viscosidade	1,0037x10 ⁻² cm ² /s
Calor específico	0,998 cal/gr.K

Para a modelagem do fluxo dentro da válvula foram consideradas diferentes velocidades do fluxo de entrada. Na tabela 2 são mostrados os valores de velocidades de entrada e seus respectivos números de Reynolds.

Tabela 2 - Velocidade de entrada da água e seu respectivo número de Reynolds (Re)

V= 1 cm/s	Re = 119,34
V=10 cm/s	Re = 1.195,60
V=20 cm/s	Re = 2.391,14
V= 50 cm/s	Re = 5.997,84
V= 100 cm/s	Re = 11.955,68

Para simular o escoamento da água dentro da válvula foram consideradas as seguintes condições de contorno. (1) a velocidade de entrada da água cujos valores são mostrados na Tabela 2, (2) as velocidades nas paredes interna da válvula, foram consideradas iguais a zero e a pressão na saída do duto, que também foi considerada igual a zero. Em seguida para resolução por elementos finitos foi feita a malha na geometria que corresponde ao duto. As condições de contorno (representadas por zetas) e a malha são mostradas na Figura 2.

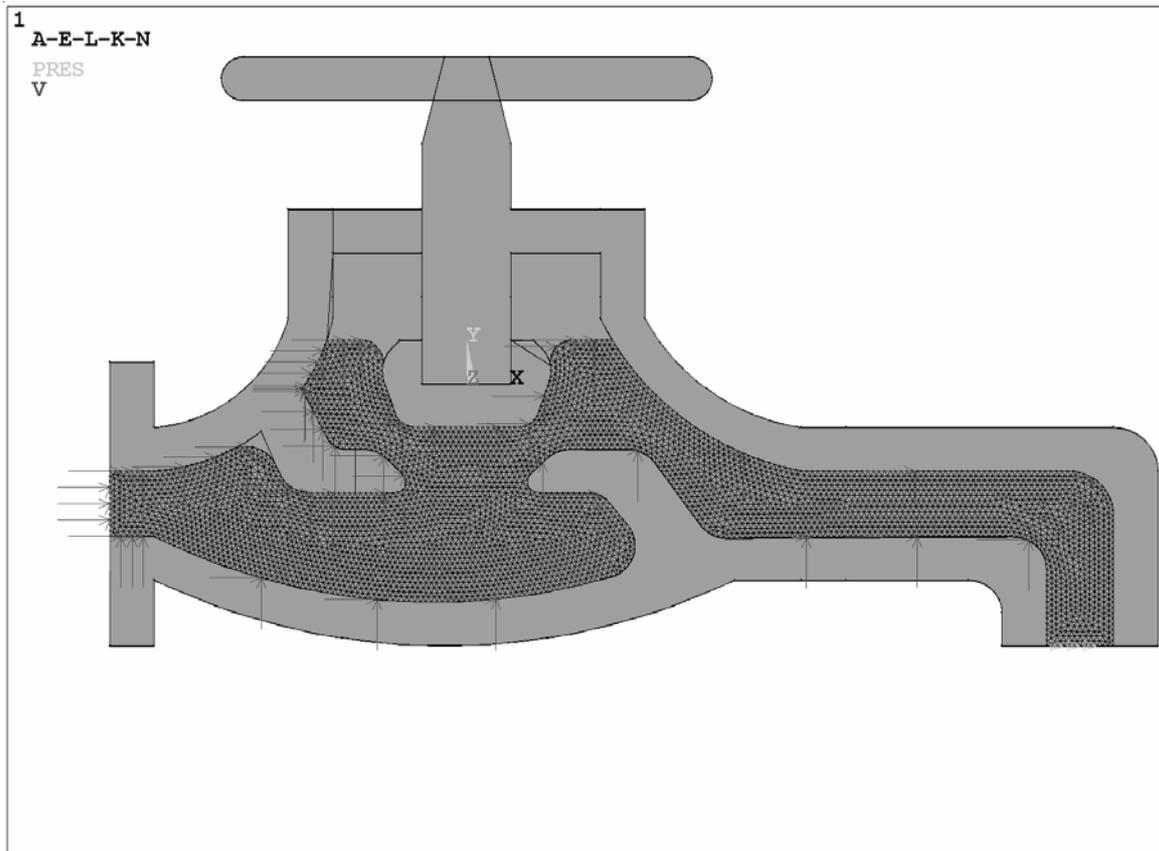


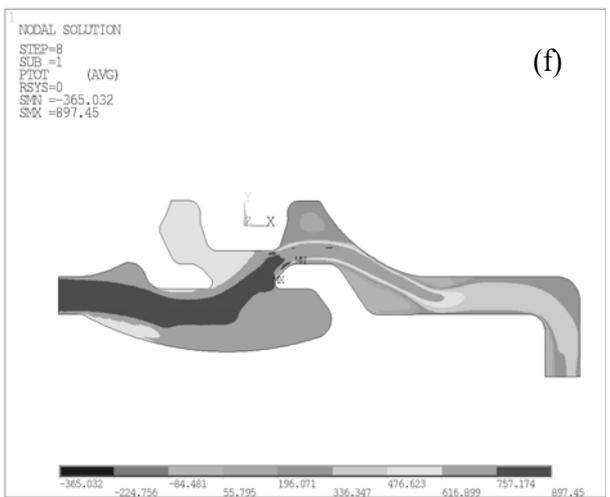
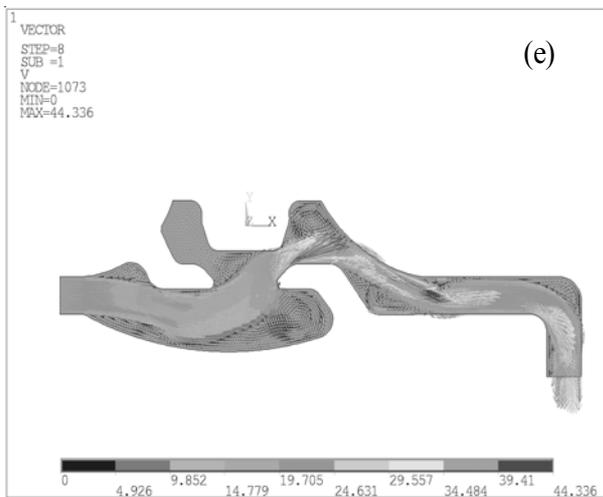
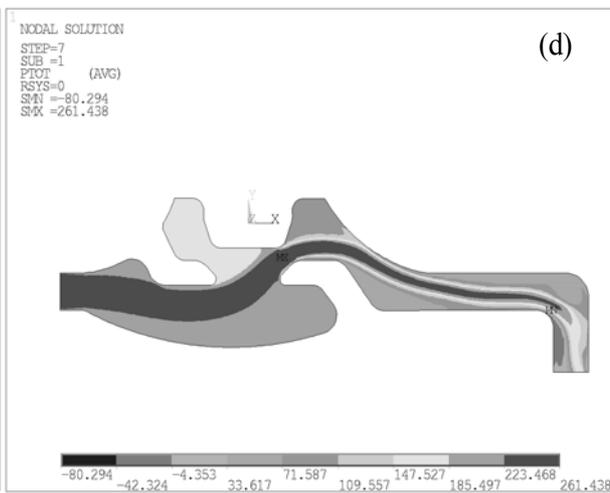
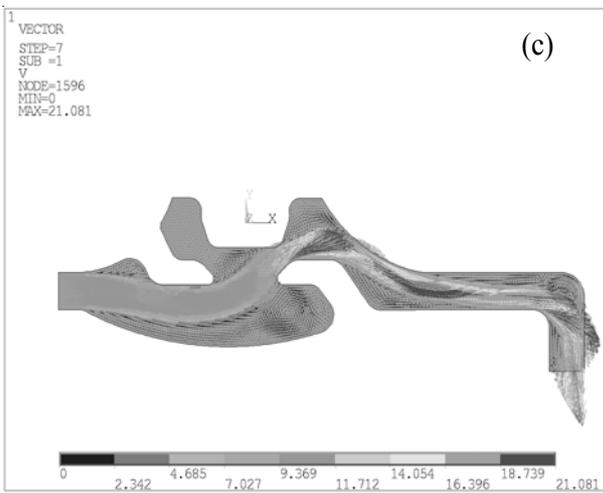
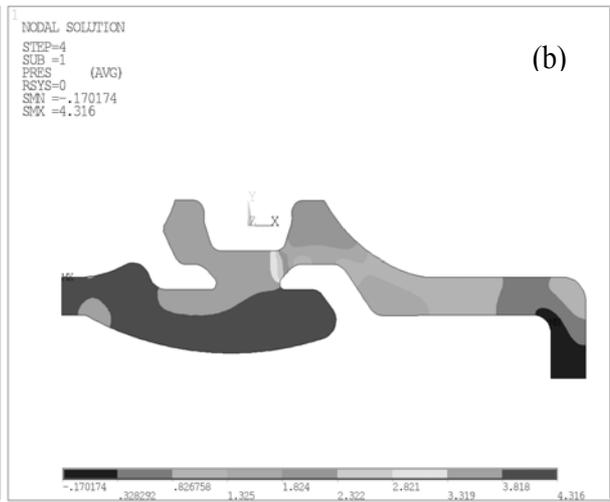
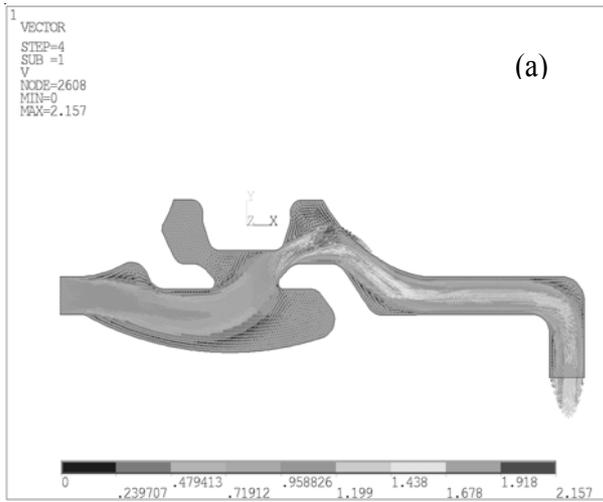
Figura 2 - Representação do modelo geométrico, as condições de contorno e a malha.

Para realizar o processo de solução através do software utilizado, foi considerado que o fluxo estava em estado estacionário, o sistema era adiabático (isto é, não existe troca de calor com o exterior) e o fluido incompressível. Para a solução da equação de Navier-Stokes foi considerado no software a opção “*default*”, que aplica para a pressão, o método de gradiente conjugado pré-acondicionado e para a velocidade o método “*tri-diagonal matrix algorithm*” (TDMA). O número de interações para o processo de solução foi de 40. Para esse número de iterações foi observada a convergência das soluções. Isto é, o controle da convergência é feito através da variação da norma em função das variáveis, pressão e velocidades V_x e V_y . Quando essas variáveis se aproximam, após o número imposto de interações, diz-se que foi atingida a convergência. Nesse caso, o controle do erro para o critério de convergência “*default*” para a pressão foi de 1×10^{-8} e para as velocidades foi de 1×10^{-2} cm/s

3. Resultados e discussões

O resultado da solução das equações (5) e (6) de Navier-Stokes para o fluxo de água, sem considerar o atrito, é mostrado na Figura 3. Nela são apresentados o campo vetorial das velocidades e a variação da pressão dentro do duto.

Na Figura 3(a), a velocidade de entrada foi de 1 cm/s e campo de velocidades varia de 0 até 2,157 cm/s. Verificando-se a condição de contorno na proximidade da parede da válvula, em alguns pontos a velocidade aumentou mais que o dobro. A velocidade de saída, em média, aumentou ligeiramente em relação à velocidade de entrada, e nesse caso não se apresentou o fenômeno da turbulência. Na Figura 3(b) representa-se a variação da pressão no duto (em todos os casos a pressão na saída da válvula foi fixada em zero como condição de contorno, uma vez que esta pressão deve ser mínima para favorecer a saída do fluxo).



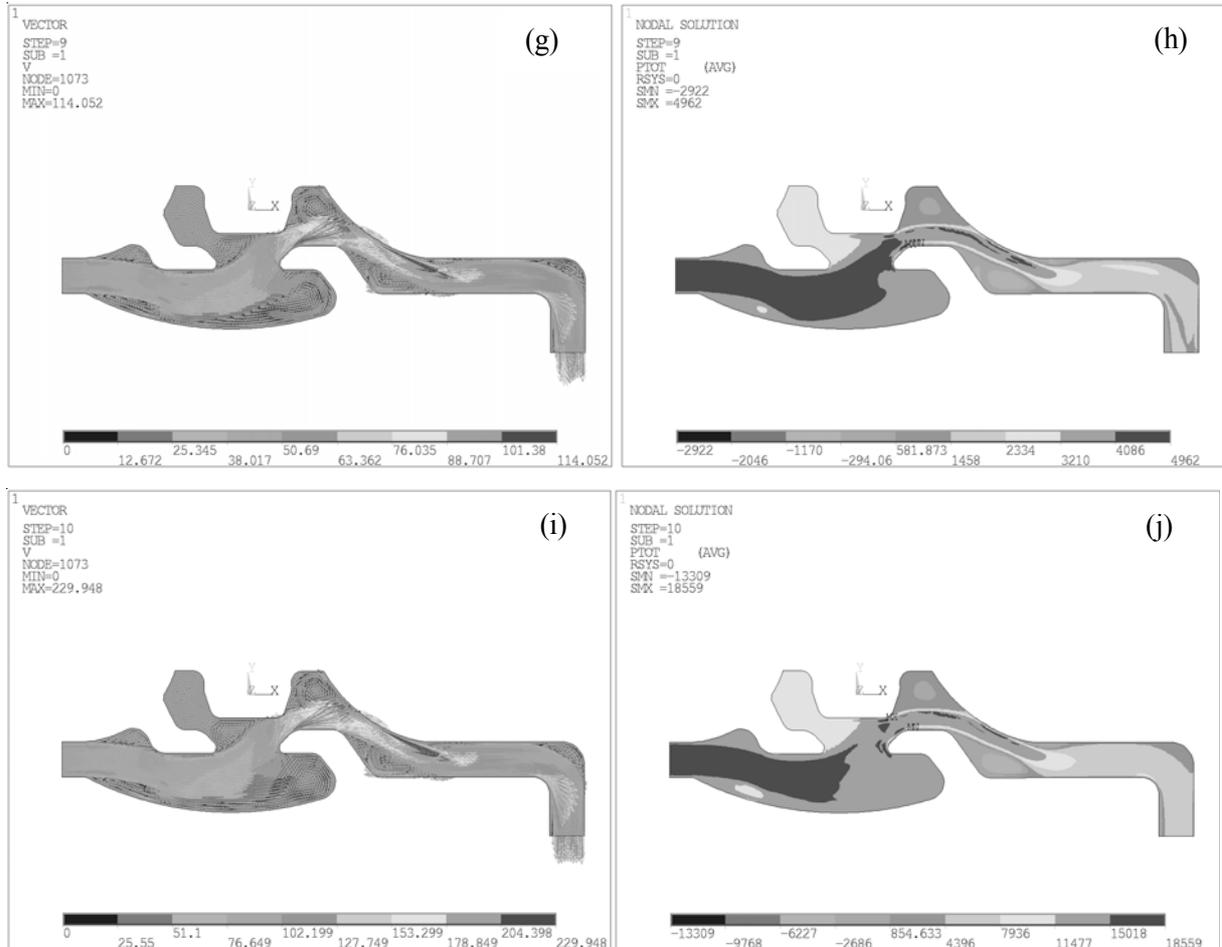


Figura 3 - Resultado mostrando o campo vetorial de velocidades e o campo de pressões dentro da válvula para diferentes velocidades do fluxo de entrada.

Nesse gráfico pode-se apreciar a variação da pressão desde 0 até 4,316 dinas/cm², sendo maior a pressão na região da entrada e diminuindo paulatinamente em direção à saída. Apesar da pressão alta favorecer a entrada do fluxo, essa pressão é muito menor que a pressão atmosférica (1 013 250 dinas/cm²). Nesse caso observou-se claramente o comportamento laminar do fluxo.

Na Figura 3 (c), apresenta-se o resultado para a velocidade de entrada de 10 cm/s, onde a velocidade de saída é aproximadamente o dobro da velocidade de entrada. Nesse caso o fenômeno de turbulência aparece levemente nas regiões de geometrias curvas, mesmo considerando que o número de Reynolds para a esta velocidade foi de 1.195,60, valor que não pertence à faixa da turbulência, segunda a literatura (Munson, 1994; Bird, 1960). O campo de pres-

são representada na Figura 3(d) apresenta um comportamento diferente do caso anterior, pois, nesse caso, aparece uma faixa de alta pressão estendendo-se desde a entrada até perto da saída. Já perto das geometrias curvadas a pressão é baixa. Nesse caso a pressão que corresponde à faixa alta é muito maior que do anterior.

Na Figura 3(e) apresenta-se o resultado do campo de velocidade para entrada de 20 cm/s. Na saída a velocidade média ficou em torno de 30 cm/s. Em alguns pontos no interior do duto a velocidade foi maior que o dobro da entrada e poderia se observar a presença da turbulência mais acentuada, quando comparada ao resultado anterior, no caso, o número de Reynolds ficou em 2.391,14 e que pertence à zona de transição fluxo laminar turbulento. O campo de pressões na Figura 3(f), mostrou uma pressão alta na en-

trada, que se estendeu aproximadamente até a metade do duto, e logo teve uma queda acentuada nas proximidades da saída do duto. Também pode se notar, onde existe uma mudança brusca de pressão, que a velocidade do fluido aumenta bruscamente.

O campo de velocidade que corresponde à entrada de 50 cm/s apresenta-se na Figura 3(f), onde a velocidade de saída, em média, é igual à da entrada. Observa-se uma forte turbulência, que é corroborado pelo número de Reynolds de 5.997,84. O comportamento da pressão dada na Figura 3(h) foi semelhante à Figura 3(f), mas, neste caso as pressões foram maiores. Também, onde existe uma mudança brusca de pressão, a velocidade do fluido aumenta bruscamente como no caso anterior.

No que se refere à Figura 3(i), do campo de velocidades para a entrada do fluxo de 100 cm/s, a velocidade de saída, em média, é ligeiramente menor que da entrada e o comportamento é semelhante ao campo de velocidades da Figura 3(g). O comportamento do campo de pressão representada na Figura 3(j) é totalmente diferente dos anteriores, nesse caso a pressão é alta em torno da entrada, depois cai bruscamente. Isso poderia ter sido provocado pela forte turbulência que ocorre nas regiões de curvatura. Nesse caso, o número de Reynolds de 11.955,68 corresponde completamente ao regime turbulento. Nesse caso, a pressão máxima foi de 18 559 dinas/cm².

De maneira geral, observou-se que para baixas velocidade de entrada de água o comportamento do fluxo é laminar, e a medida que aumenta-se a velocidade de entrada aumenta-se a turbulência do fluxo. Por outro lado, quando aumenta a variação de pressão diminui a velocidade do fluido na saída, devido à perda de pressão e presença do fenômeno de resistência provocado pela turbulência (Munson, 1994; Bird, 1960). Nesse trabalho, foi observado o aparecimento da turbulência em faixas de números de Reynolds que não pertence ao regime correspondente. A presença da turbulência pode ser provocada pelo duto que apresenta geometrias acentuadamente curvadas em seu interior. Devido a isso, possivelmente não se cumpre a relação turbulência e número de Reynolds.

4. Conclusão

O campo de velocidade e de pressão do fluido dentro do duto se torna complexo, pois, depende de vários parâmetros físicos e geométricos. Muitas vezes é difícil de controlar e prever esses campos. Neste trabalho foi realizado o estudo do fluxo laminar e turbulento da água dentro de uma válvula de geometria conhecida. Foi variada a velocidade de entrada, e como as condições de contorno, foram fixadas em zero a velocidade nas paredes do duto e a pressão na saída. Segundo os resultados, observou-se que, para baixas velocidades de entrada o comportamento do fluxo é laminar e quando se aumenta a velocidade de entrada do fluxo, o fenômeno de turbulência aparece, gerando um aumento do campo de variação de pressão no duto e conseqüentemente aumentou-se a velocidade de saída do fluxo. Para velocidades de entrada maiores que 50 cm/s a velocidade de saída diminui, devido ao fenômeno da turbulência, o qual gera resistência de distribuição de fluxo e por sua vez gera queda de pressão. Além disso, foi observado que, a velocidade dentro do duto, aproximadamente na parte central, é muito maior que da entrada. Esta variação violenta da velocidade está associada à variação brusca da pressão devido à turbulência. Segundo a literatura, a presença da turbulência não é prevista para o número de Reynolds menores que 2.300. No entanto, neste trabalho, esse fenômeno, mesmo para baixos números de Reynolds apareceu. Possivelmente isso ocorre devido às variações bruscas da geometria no interior do duto. A simulação numérica através de elementos finitos fornece uma idéia quantitativa e qualitativa do comportamento do fluxo e dos fenômenos que se apresentam dentro da válvula, uma vez, que como resultado, as grandezas de velocidade e pressão, em qualquer ponto do duto, são determinados. Esse fato pode ser utilizado para otimizar o fluxo através do controle de velocidade de entrada e das características do projeto da válvula. A ferramenta de simulação numérica pode contribuir para projetar e otimizar de maneira consistente diversos tipos de sistemas aplicados na engenharia, com baixo custo de investimentos.

REFERÊNCIAS

- 1 MUNSON, B.R.; Young, D.F.; Okiishi, T.H. **Fundamental of fluid mechanics, 2nd ed., v.1 and v.2.** New York: John Willey & Sons, Inc., 1994.
- 2 MANUAL ANSYS, Inc v.7. Canonsburg, PA, 2002.
- 3 BIRD, R.B.; Stewart, W.E.; Lightfoot, E.N. **Transport phenomena.** New York: John Willey & Sons, Inc., 1960.
- 4 PATANKAR, S.V. **Numerical heat transfer and fluid flow.** New York: Hemisphere Publication Corporation, 1980.
- 5 ALVES FILHO, A. **Elementos finitos.** São Paulo: Érica, 2000.
- 6 REDDY, J.N. **Finite element method, 2nd ed.** New York: McGraw-Hill International Editions, 1993.
- 7 COOK, R.D. **Finite element modeling for stress analysis.** New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- 8 BUCKIUS, R.O.; Howell, J.R. **Fundamentals of engineering thermodynamics, 2nd ed.** New York: McGraw-Hill International Editions, 1992.
- 9 GEIGER, C.H.; Poirier, D.R. **Transport phenomena.** Menlo Park – California: Addison-Wesley Publication Company, 1973.