CDD: 519.5

HOMOGENEIZAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO TIPO SCHRÖDINGER LINEAR EM DOMÍNIOS COM PEQUENOS BURACOS

HOMOGENIZATION OF THE LENEAR SCHRÖDINGER TYPE EQUATION IN DOMAINS WITH SMALL HOLES

Airton Kist[1], Joel Santos Souza[2]

[1] Autor para contato: Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG, Campus em Uvaranas, Departamento de Matemática e Estatística, Ponta Grossa, PR, Brasil; (42) 220-3049; e-mail: kist@uepg.br

[2] Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Campus Trindade, Departamento de Matemática, Cx. P. 476, Florianópolis, SC; e-mail: jsouza@mtm.ufsc.br

Recebido para publicação em 19/02/2004
Aceito para publicação em 31/03/2004

RESUMO

Neste artigo, vamos estudar a homogeneização da equação tipo Schrödinger

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - i\Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \quad T > 0,$$

onde Ω_ε é um domínio contendo pequenos buracos. As demonstrações da homogeneização estão baseadas no quadro funcional abstrato introduzido por Cioranescu e Murat (1982) para o estudo da homogeneização de problemas elípticos.

Palavras-chave: Homogeneização, Equação Tipo Schrödinger; Domínios Perfurados.

ABSTRACT

In this article we study the homogenization of the Schrödinger type equation

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - i\Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \quad T > 0,$$

where Ω_ε is a domain containing small holes. The homogenization's proofs are based on the framework introduced by Cioranescu and Murat (1982) for the study of homogenization of elliptic problems.

Key words: Homogenization, Schrödinger Type Equation, Perforated domains.

1. Introdução e resultados principais

Este trabalho é dedicado principalmente ao estudo da homogeneização da equação tipo Schrödinger linear

$$(P_\varepsilon) \qquad \begin{cases} u'_\varepsilon - i\Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{em} \quad Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) = u^0_\varepsilon(x) & \text{em} \quad \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

onde, $i = \sqrt{-1}$, u'_ε denota $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$ e para cada $\varepsilon > 0$, Ω_ε é um domínio aberto, limitado, com fronteira $\partial\Omega_\varepsilon$ suave, obtido removendo-se do conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, um conjunto S_ε de subconjuntos fechados (os 'buracos'), isto é, $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash S_\varepsilon$. Assumimos que a medida de S_ε tende para zero, quando o parâmetro $\varepsilon > 0$ tende para zero.

Agora, vamos estabelecer as hipóteses sobre os dados do problema.

Assumimos que

$$u^0_\varepsilon \in H^1_0(\Omega), \quad f_\varepsilon \in L^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)), \quad f'_\varepsilon \in L^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)) \tag{1.1}$$

e, se $\varepsilon \longrightarrow 0$, temos

$$\begin{cases} \widetilde{u^0_\varepsilon} \rightharpoonup u^0, \text{ fracamente em } H^1_0(\Omega), \\ \widetilde{f_\varepsilon} \rightharpoonup f, \quad \text{fracamente em } L^1(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $\widetilde{\cdot}$ denota a extensão por zero para todo Ω.

A seguir faremos um resumo dos primeiros trabalhos divulgados sobre homogeneização. O primeiro, foi um problema elíptico. Cioranescu e Murat (1982) estudaram o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = f & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

com $f \in H^{-1}(\Omega)$. Eles mostraram que para cada $\varepsilon > 0$ existe uma única $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega_\varepsilon)$ tal que

$$\widetilde{u_\varepsilon} \rightharpoonup u, \quad \text{fracamente em } H^1_0(\Omega), \text{ quando } \varepsilon \to 0$$

onde $\widetilde{u_\varepsilon}$ é a extensão de u_ε por zero nos buracos, e u é a única solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde μ é uma medida de Radon não negativa pertencente a $H^{-1}(\Omega)$. Esta medida que aparece nesse estudo abstrato está ligada ao comportamento da capacidade do conjunto S_ε quando $\varepsilon \to 0$. Impõe-se para isto a condição de que os buracos sejam pequenos, isto é, o diâmetro dos buracos seja menor ou igual ao diâmetro crítico a_ε dado por:

$$a_\varepsilon = \begin{cases} \delta_\varepsilon \exp\left(-C_0/\varepsilon^2\right) & \text{se } N = 2, \\ C_0\, \varepsilon^{N/(N-2)} & \text{se } N \geq 3, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde C_0 é uma constante positiva e δ_ε é tal que $\varepsilon^2 log\delta_\varepsilon \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Da condição (1.3), é possível contruir o quadro funcional abstrato que desempenha um papel fundamental na demostração dos resultados de homogeneização. Mais precisamente, temos:

$$\begin{cases} \text{Existe uma sequência de funções } (w_\varepsilon,\ \mu_\varepsilon,\ \gamma_\varepsilon) \text{ e } M_0 > 0 \ \text{ tal que} \\ \ (i) \quad w_\varepsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ \|w_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_0 \text{ para cada } \varepsilon > 0, \\ \ (ii) \quad w_\varepsilon = 0 \ \text{ sobre } \ S_\varepsilon, \\ \ (iii) \quad w_\varepsilon \rightharpoonup 1, \text{ fracamente em } H^1(\Omega), \text{ quando } \varepsilon \to 0, \\ \ (iv) \quad -\Delta w_\varepsilon = \mu_\varepsilon - \gamma_\varepsilon \text{ onde } \mu_\varepsilon,\ \gamma_\varepsilon \in H^{-1}(\Omega), \\ \qquad\quad \mu_\varepsilon \to \mu, \text{ fortemente em } H^{-1}(\Omega) \text{ e } \langle \gamma_\varepsilon,\ \nu_\varepsilon \rangle_\Omega = 0, \\ \qquad\quad \text{para toda seqüência } \ (\nu_\varepsilon) \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ tal que } \nu_\varepsilon = 0 \text{ sobre } S_\varepsilon. \end{cases} \tag{1.4}$$

No caso acima, μ será uma constante estritamente positiva quando o diâmetro dos buracos for o crítico. Neste caso, um termo adicional de ordem zero, μu, aparece na equação limite. Além disso Cioranescu e Murat (1982) fizeram os resultados de correção, isto é,

$$\widetilde{u_\varepsilon} = w_\varepsilon u + r_\varepsilon, \qquad \text{com } r_\varepsilon \to 0, \text{ fortemente } \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Um exemplo, onde (1.4) é satisfeita, ocorre quando S_ε consiste de buracos periodicamente distribuídos, de tamanho crítico. Mais precisamente,

$$S_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} S_\varepsilon^i,$$

onde S_ε^i são esferas de tamanho $r_\varepsilon = a_\varepsilon$ ($a_\varepsilon < \varepsilon$), periodicamente distribuídas (com período 2ε) na direção de cada eixo coordenado e a_ε é definido como em (1.3). Neste caso, a medida μ que aparece em (1.4) define-se como

$$\mu = \frac{\pi}{2}\frac{1}{C_0} \quad \text{se } N = 2,$$

$$\mu = \frac{\mathcal{S}_N(N-2)}{2N} C_0^{N-2} \quad \text{se } N \geq 3,$$

onde $\mathcal{S}_N$ é a superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$.

No que concerne às equações de evolução, Cioranescu *et al.*, (1991) (veja também Cioranescu e Donato 1999) estudaram a homogeneização da equação da onda linear

$$\begin{cases} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{em} & \Omega_\varepsilon \times (0,T) \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega_\varepsilon \times (0,T) \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x) & & x \in \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon'(x,0) = u_\varepsilon^1(x) & & x \in \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.5}$$

com

$$\{u_\varepsilon^0, u_\varepsilon^1, f_\varepsilon\} \in H_0^1(\Omega_\varepsilon) \times L^2(\Omega_\varepsilon) \times L^1(0,T; L^2(\Omega_\varepsilon))$$

e

$$\begin{cases} \widetilde{u_\varepsilon^0} \rightharpoonup u^0 & \text{fracamente em} \quad H_0^1(\Omega) \\ \widetilde{u_\varepsilon^1} \rightharpoonup u^1 & \text{fracamente em} \quad L^2(\Omega) \\ \widetilde{f_\varepsilon} \rightharpoonup f & \text{fracamente em} \quad L^1(0,T; L^2(\Omega)). \end{cases}$$

Eles provaram que

$$\widetilde{u_\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{fraco-estrela} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega)),$$

onde $\widetilde{u_\varepsilon}$ é a única solução do problema (1.5), para cada $\varepsilon > 0$ fixado, extendida por zero nos buracos, e u é a única solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \mu u = f & \text{em} & \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & & x \in \Omega \\ u'(x,0) = u^1(x) & & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

onde μ é uma medida de Radon não negativa, sendo positiva quando o diâmetro dos buracos é o diâmetro crítico.

Na seqüência deste trabalho, o domínio perfurado Ω_ε será suposto satisfazer as condições do quadro funcional abstrato (1.4), introduzido por Cioranescu e Murat (1982).

Agora, estamos em condições de estabelecer o principal resultado deste trabalho.

Teorema 1.1 *Suponha que as hipóteses (1.1) e (1.2) sejam satisfeitas. Então, a única solução u_ε de (P_ε), para cada $\varepsilon > 0$, satisfaz*

$$\widetilde{u_\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \textit{fraco-estrela em} \quad L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)) \tag{1.7}$$

$$\widetilde{u_\varepsilon'} \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \textit{fraco-estrela em} \quad L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \tag{1.8}$$

$$\widetilde{u_\varepsilon} \to u \quad \textit{fortemente em} \quad C^0([0,T], H_0^1(\Omega)) \tag{1.9}$$

onde u é a única solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} u' - i\Delta u + i\mu u = f & \textit{em} & \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \textit{sobre} & \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & \textit{em} & \Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Além disso, u pertence à classe

$$u \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{1.11}$$

Observação 1.1 *Entende-se por solução (solução fraca) do problema (P_ε), uma função*

$$u_\varepsilon : (0,T) \to H_0^1(\Omega_\varepsilon)$$

tal que

$$\frac{d}{dt}(u_e(t), v) + ia(u_e(t), v) = (f_e, v), \quad \textit{para toda } v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon),$$

sendo a igualdade entendida no sentido das distribuições sobre $(0, T)$.

Este artigo está organizado como segue: Na seção 2, estudamos a existência e a unicidade de (P_ε), para cada $\varepsilon > 0$ fixado, e, finalmente, na seção 3, obtemos a homogeneização do problema (P_ε), fazendo uso do quadro abstrato funcional (1.4).

2. Existência e unicidade de soluções para o problema (P_ε)

Nesta seção, provaremos a existência e a unicidade de solução do problema (P_ε), para cada $\varepsilon > 0$ fixado, assumindo que os dados do problema satisfaçam as condições dadas em (1.1).

A demonstração a ser desenvolvida consiste em aproximar a solução que se deseja encontrar, por soluções de problemas análogos, porém de dimensão finita. A dificuldade consiste em demostrar-se que esta sequência de soluções obtidas em dimensão finita, converge para a solução do problema (P_ε). Este método foi empregado originalmente por Faedo e Galerkin (veja Lions e Magenes, 1968).

Inicia-se a demonstração observando que sendo $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ um espaço de Hilbert separável, existe uma seqüência de vetores (w_j), $w_j \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ para todo j, satisfazendo as seguintes condições:

· para cada m os vetores $w_1, w_2, \ldots, w_m$ são linearmente independentes

· as combinações lineares finitas dos w_j são densas em $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$

Seja $V_m = [w_1, ...w_m]$ o subespaço de $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$, de dimensão m, gerado pelos m primeiros vetores e seja

$$u_{\varepsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{j\varepsilon m}(t)\omega_j. \tag{2.1}$$

O problema aproximado consiste em determinar $u_{\varepsilon m} \in V_m$ tal que

$$\begin{cases} (u'_{\varepsilon m}(t), w_j) + ia(u_{\varepsilon m}(t), w_j) = (f_\varepsilon(t), w_j), \quad 1 \le j \le m \\ u_{\varepsilon m}(0) = u^0_{\varepsilon m} \to u^0_\varepsilon \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega_\varepsilon), \quad \text{quando} \quad m \to \infty, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $\quad a(\varphi, \psi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}}\, dx, \quad (f, g) = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \overline{g}\, dx.$

Por simplicidade denotaremos por $|\cdot|$ a norma em $L^2(\Omega_\varepsilon)$ e por $\|\cdot\|$ a norma em $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ e representaremos por $u(t)$ a aplicação que leva x em $u(x,t)$. Assim, acondição inicial $u(x, 0)$ pode ser representada por $u(0) = u^0$, omitindo-se x, a derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$ ou u_t representaremos por u'.

A existência de solução local $u_{\varepsilon m}(t)$ em $(0, t_{\varepsilon m})$, $t_{\varepsilon m} < T$, resulta do sistema (2.2) ser um sistema linear de equações diferenciais ordinárias, nas condições do teorema de existência . Para prolongarmos a solução para o intervalo $[0, T]$ arbitrário, precisamos de estimativas sobre $u_{\varepsilon m}(t)$ e $u'_{\varepsilon m}(t)$ em norma, em todo intervalo $[0, t_{\varepsilon m})$.

2.1 Estimativas a priori

Primeira Estimativa:

Primeiro, vamos provar que $u'_{\varepsilon m}(0)$ é limitada na norma $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Multiplicando ambos os membros de (2.2) por $\overline{g'_{j\varepsilon m}(t)}$ e somando em j obtemos

$$(u'_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t)) + ia(u_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t)) = (f_\varepsilon(t), u'_{\varepsilon m}(t)). \tag{2.3}$$

Considerando a parte real em (2.3) e depois aplicando-se em $t = 0$ e usando a desigualdade de Schwarz, temos

$$|u'_{\varepsilon m}(0)|^2 \leq \{|\Delta u_{\varepsilon m}(0)| + |f_\varepsilon(0)|\} |u'_{\varepsilon m}(0)| .$$

Da última desigualdade e considerando (1.1) e (2.2) temos que

$$|u'_{\varepsilon m}(0)|^2 \leq C_1, \tag{2.4}$$

onde C_1 é uma constante positiva independente de $t \in [0, T]$; $m \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Agora, derivando (2.2) em relação a t e multiplicando ambos os membros por $\overline{g'_{j\varepsilon m}(t)}$ e somando em j obtemos

$$(u''_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t)) + ia(u'_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t)) = (f'_\varepsilon(t), u'_{\varepsilon m}(t)) \tag{2.5}$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_{\varepsilon m}(t)|^2 + i\|u'_{\varepsilon m}(t)\|^2 = (f'_\varepsilon(t), u'_{\varepsilon m}(t)). \tag{2.6}$$

Considerando a parte real em (2.6), integrando de 0 a $t \leq t_{\varepsilon m}$, usando que $\operatorname{Re} z \leq |z|$, aplicando a desigualdade de Schwarz e a desigualdade elementar $2ab \leq a^2 + b^2, \quad a, b > 0$ segue que

$$\begin{aligned} |u'_{\varepsilon m}(t)|^2 &= |u'_{\varepsilon m}(0)|^2 + 2\int_0^t \operatorname{Re}\,(f'_\varepsilon(s), u'_{\varepsilon m}(s))ds \\ &\leq |u'_{\varepsilon m}(0)|^2 + 2\int_0^t |f'_\varepsilon(s)||u'_{\varepsilon m}(s)|ds \\ &\leq |u'_{\varepsilon m}(0)|^2 + \int_0^t |f'_\varepsilon(s)|ds + \int_0^t |f'_\varepsilon(s)||u'_{\varepsilon m}(s)|^2 ds. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Observando as hipóteses (1.1), a desigualdade (2.4) e aplicando o Lema de Gronwall, segue que

$$|u'_{\varepsilon m}(t)|^2 \leq C_2, \tag{2.8}$$

onde C_2 é uma constante positiva independente de $t \in [0, T]$; $m \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$.

Segunda Estimativa:

Multiplicando ambos os membros de (2.2) por $\overline{g'_{j\varepsilon m}(t)}$ e somando em j obtemos

$$(u'_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t)) + ia(u_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t)) = (f_\varepsilon(t), u'_{\varepsilon m}(t)). \tag{2.9}$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por $\bar{i} = -i$ e tomando a parte real temos

$$\operatorname{Re}\left(-i|u'_{\varepsilon m}(t)|^2 + a(u_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t))\right) = \operatorname{Re}\left(-i(f_\varepsilon(t), u'_{\varepsilon m}(t))\right). \tag{2.10}$$

Como $|u'_{\varepsilon m}(t)|^2$ é real positivo, $\mathrm{Re}(|u'_{\varepsilon m}(t)|^2) = 0$ e $\mathrm{Re}\, z \leq |z|$ podemos reescrever (2.10) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 &= \mathrm{Re}\,(-i(f_\varepsilon(t), u'_{\varepsilon m}(t))) \\ &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f_\varepsilon(t)||u'_{\varepsilon m}(t)|dx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Integrando (2.11) de 0 a $t < t_{\varepsilon m}$, aplicando a desigualdade de Schwarz e usando a desigualdade elementar $2ab \leq a^2 + b^2, \quad a, b > 0$ segue que

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 &= \|u_{\varepsilon m}(0)\|^2 + 2\int_0^t |f_\varepsilon(s)||u'_{\varepsilon m}(s)|ds \\ &\leq \|u_{\varepsilon m}(0)\|^2 + \int_0^t |f_\varepsilon(s)|ds + \int_0^t |f_\varepsilon(s)||u'_{\varepsilon m}(s)|^2 ds. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Das hipóteses (1.1) e (2.2) e da estimativa (2.8) temos que

$$\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 \leq C_3, \tag{2.13}$$

onde C_3 é uma constante positiva independente de $m \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$ e $\varepsilon > 0$.

2.2 Passagem ao limite

Das estimativas (2.8) e (2.13), resulta que existe uma subseqüência $\{u_{\varepsilon\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $\{u_{\varepsilon m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, com as seguintes propriedades:

$$u_{\varepsilon\nu} \overset{*}{\rightharpoonup} u_\varepsilon \quad \text{fraco-estrela} \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \tag{2.14}$$

e

$$u'_{\varepsilon\nu} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_\varepsilon \quad \text{fraco-estrela} \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.15}$$

Note que o dual de $L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon))$ é $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e que o dual de $L^1(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$ é $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$. Aqui identificamos, via Teorema de Representação de Riez, $L^2(\Omega_\varepsilon)$ com seu dual.

A convergência (2.14) equivale a dizer que para toda $w \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon))$ tem-se

$$\int_0^T \langle u_{\varepsilon\nu}(t), w(t)\rangle dt \quad \rightarrow \quad \int_0^T \langle u_\varepsilon(t), w(t)\rangle dt, \tag{2.16}$$

e a convergência (2.15), para toda $w \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$

$$\int_0^T (u'_{\varepsilon\nu}(t), w(t)) dt \quad \rightarrow \quad \int_0^T (u'_\varepsilon(t), w(t)) dt, \tag{2.17}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o par dualidade $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$, $L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon))$.

De (2.16) conclui-se que $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ e de (2.17) que $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$. A próxima etapa é demonstrar que u_ε é solução da equação $(P_\varepsilon)_1$ no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$.

De fato, fixando-se m_0 e considerando-se $\nu > m_0$, multiplicando-se a equação aproximada (2.2) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando-se de 0 a T, obtém-se

$$\int_0^T (u'_{\varepsilon\nu}(t), v)\theta(t)dt + i\int_0^T a(u_{\varepsilon\nu}, v)\theta(t)dt = \int_0^T (f_\varepsilon, v)\theta(t)dt,$$

para toda $v \in V_{\varepsilon m_0}$.

Tomando-se o limite quando ν tende para o infinito, e observando-se (2.16) e (2.17), conclui-se que

$$\int_0^T (u'_{\varepsilon}(t), v)\theta(t)dt + i\int_0^T a(u_{\varepsilon}, v)\theta(t)dt = \int_0^T (f_\varepsilon, v)\theta(t)dt, \tag{2.18}$$

para toda $v \in V_{\varepsilon m_0}$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Sendo os $V_{\varepsilon m_0}$ densos em $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$, conclui-se que (2.18) é válida para toda $v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, isto é,

$$(u'_\varepsilon(t), v) + ia(u_\varepsilon(t), v) = (f_\varepsilon(t), v),$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$.

2.3 Verificação da condição inicial

De (2.16) e (2.17), tomando $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(1) = 0$ e $v \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, obtém-se

$$\int_0^T (u'_{\varepsilon\nu}(t), v)\theta(t)dt \rightarrow \int_0^T (u'_{\varepsilon}(t), v)\theta(t)dt$$

e

$$\int_0^T (u_{\varepsilon\nu}(t), v)\theta'(t)dt \rightarrow \int_0^T (u_{\varepsilon}(t), v)\theta'(t)dt$$

para toda $v \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. Adicionando membro a membro, conclui-se que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u_{\varepsilon\nu}(t), v)\theta(t)\right] dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u_{\varepsilon}(t), v)\theta(t)\right] dt,$$

isto é,

$$(u_{\varepsilon\nu}(0), v) \rightarrow (u_\varepsilon(0), v)$$

para toda $v \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, ou seja,

$$u_{\varepsilon\nu}(0) \rightharpoonup u_\varepsilon(0), \quad \text{fraco, em } L^2(\Omega_\varepsilon).$$

Por construção têm-se que $u_{\varepsilon\nu}(0) = u^0_{\varepsilon\nu}$ converge fortemente, para u^0_ε, em $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$, logo fortemente em $L^2(\Omega_\varepsilon)$, portanto fraco em $L^2(\Omega_\varepsilon)$, e assim, pela unicidade do limite, resulta que

$$u_\varepsilon(0) = u^0_\varepsilon.$$

2.4 Unicidade da solução fraca

Aqui mostraremos que a solução encontrada é única. Para demonstrarmos a unicidade, consideremos duas soluções u_1 e u_2 dadas pelo Teorema 1.1, e façamos $w = u_1 - u_2$. Então resulta que w satisfaz às seguintes condições

$$\begin{cases} (w'(t), v) + ia(w(t), v) = 0 \\ w(0) = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$. Resta-nos demonstrar que a solução $w = w(t)$ do problema (2.19) é a função nula, quase sempre, em Q_ε .

Fazendo $v = w(t)$ em (2.B19), e tomando a parte real obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 = 0.$$

Integrando-se de 0 a s, $0 < s < T$, conclui-se que

$$|w(s)|^2 = 0,$$

donde resulta que $w(t) = 0$ quase sempre em Q_ε.

2.5 Regularidade da solução u_e

Seja $(u_{\varepsilon m})_{m\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de soluções aproximadas que aproxima a solução u_ε de (P_e). Então se $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, da equação aproximada (2.2), temos

$$(u'_{\varepsilon m}(t) - u'_{\varepsilon n}(t), v) + ia(u_{\varepsilon m}(t) - u_{\varepsilon n}(t), v) = 0, \quad \text{para toda } v \in V_m. \tag{2.20}$$

Fazendo $v = u_{\varepsilon m}(t) - u_{\varepsilon n}(t)$ na equação (2.20), temos

$$|u'_{\varepsilon m}(t) - u'_{\varepsilon n}(t)|^2 + i\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\varepsilon m}(t) - u_{\varepsilon n}(t)\|^2 = 0. \tag{2.21}$$

Multiplicando (2.21) por $\bar{i} = -i$ e tomando a parte real temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\varepsilon m}(t) - u_{\varepsilon n}(t)\|^2 = 0.$$

Integando de 0 a s, $0 < s < T$ obtemos

$$\|u_{\varepsilon m}(s) - u_{\varepsilon n}(s)\|^2 = \|u_{\varepsilon m}(0) - u_{\varepsilon n}(0)\|^2.$$

O termo do segundo membro converge para zero em $\mathbb{R}$ quando $m, n \to \infty$, pois $u_{\varepsilon m}(0)$ converge para u_ε^0, forte, em $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$. Assim

$$\max_{s\in[0,T]} \|u_{\varepsilon m}(s) - u_{\varepsilon n}(s)\| \to 0 \quad \text{quando } m, n \to \infty$$

e portanto $(u_{\varepsilon m})_{m\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $C^0([0,T],H_0^1(\Omega_\varepsilon))$, o que implica que $u_{\varepsilon m}\to u_\varepsilon$, forte, em $C^0([0,T],H_0^1(\Omega_\varepsilon))$. Logo

$$u_\varepsilon\in C^0([0,T],H_0^1(\Omega_\varepsilon)).$$

Isto conclui as demonstrações da seção 2.

3. O problema homogeneizado

Iremos apresentar inicialmente, nesta seção, alguns resultados técnicos que são fundamentais para a obtenção do problema homogeneizado.

3.1 Lemas técnicos

Do quadro abstrato de hipóteses (1.4), o seguinte resultado pode ser demonstrado.

Lema 3.1 *Se (1.4) é satisfeita, a distribuição $\mu\in H^{-1}(\Omega)$, que aparece em (iv), é dada por*

$$\langle\mu,\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega\varphi\,|\nabla w_\varepsilon|^2\,dx;\quad\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Assim, μ é uma medida de Radon positiva; além disso, $\mu(\Omega)$ é finita.

Agora, apresentaremos um resultado de 1950, devido a J. Deny, que pode ser encontrado em Brézis e Browder (1982), e que é fundamental para o que almejamos.

Lema 3.2 *Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e μ uma medida de Radon positiva tal que $\mu\in H^{-1}(\Omega)$. Se $v\in H_0^1(\Omega)$ então $v\in L^1(\Omega,d\mu)$ e*

$$\langle\mu,v\rangle=\int_\Omega v\,d\mu.$$

Isto nos permite definir, sem ambigüidade, o espaço

$$V=H_0^1(\Omega)\cap L^2(\Omega,d\mu),$$

que é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$((u,v))_V=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,dx+\int_\Omega uv\,d\mu.$$

A seguir apresentaremos dois resultados de compacidade, para isto, sejam X e Y dois espaços de Banach reflexivos tais que $X\subset Y$, com imersão contínua e densa. Então, temos o seguinte resultado:

Lema 3.3 *Seja v_ε uma sequência tal que*

$$\begin{cases} v_\varepsilon\rightharpoonup v, & \textit{fracamente em}\quad L^1(0,T;X),\\ v'_\varepsilon\rightharpoonup v', & \textit{fracamente em}\quad L^1(0,T;Y).\end{cases}$$

Então,

$$v_\varepsilon \to v, \text{ fortemente em } C^0([0,T];Y).$$

Finalmente, temos o seguinte resultado.

Lema 3.4 *Assuma que (1.4) seja satisfeita e considere a seqüência de funções* v_ε *em* $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))$ satisfazendo

$$\widetilde{v_\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} v \quad \text{fraco-estrela} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

e

$$\widetilde{v'_\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} v' \quad \text{fraco-estrela} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Então,

$$\langle \psi, \widetilde{v_\varepsilon} \rangle \to \langle \psi, v \rangle \quad \text{forte em } C^0([0,T])$$

para toda $\psi \in H^{-1}(\Omega)$ *, e por outro lado,*

$$v \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)).$$

As demonstrações desses resultados são clássicas e podem ser encontradas em Cioranescu *et al.*, (1991) ou Lions e Magenes (1968).

Agora, vamos obter a homogeneização do problema (P_ε) quando $\varepsilon \to 0$, fazendo uso do quadro abstrato de hipóteses dado em (1.4) e tomando em consideração as estimativas obtidas na seção 2.

3.2 Estimativas a priori

De fato, das estimativas (2.8) e (2.13), fazendo uso do Teorema de Banach-Steinhaus, temos que existe uma subseqüência, ainda denotada pelo mesmo símbolo, e uma função $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ tal que,

$$\widetilde{u_\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{fraco-estrela} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega), \tag{3.1}$$

$$\widetilde{u'_\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{fraco-estrela} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega), \tag{3.2}$$

Por (3.1), (3.2) e pelo Lema 3.3, considerando $X = H_0^1(\Omega)$ e $Y = L^2(\Omega)$, temos que

$$\widetilde{u_\varepsilon} \to u \quad \text{fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.3}$$

Por outro lado, em vista do Lema 3.1, temos

$$u \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.4}$$

3.3 Passagem ao limite

Multiplicando (P_ε) por $\psi w_\varepsilon \varphi$, e integrando sobre $Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0,T)$; onde $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$, w_ε como no quadro abstrato (1.4) e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, obtemos

$$\int_{Q_\varepsilon} u'_\varepsilon \psi w_\varepsilon \varphi \, dx\, dt - i \int_{Q_\varepsilon} \langle \Delta u_\varepsilon, \psi w_\varepsilon \varphi \rangle \, dx\, dt = \int_{Q_\varepsilon} f_\varepsilon \psi w_\varepsilon \varphi \, dx\, dt. \tag{3.5}$$

Aplicando a Fórmula de Green no segundo termo de (3.5), obtemos

$$-\int_{Q_\varepsilon} \langle \Delta u_\varepsilon, \psi w_\varepsilon \varphi \rangle \, dx\, dt = \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi \nabla w_\varepsilon \varphi \, dx\, dt + \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi w_\varepsilon \nabla \varphi dx\, dt. \tag{3.6}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{Q_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon \cdot \psi \nabla u_\varepsilon \varphi \, dx\, dt = -\langle \Delta w_\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \rangle - \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon \cdot \psi u_\varepsilon \nabla \varphi \, dx\, dt, \tag{3.7}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a dualidade entre $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon))$ e $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))$. Assim, combinando as expressões de (3.5) a (3.7), chegamos a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} u'_\varepsilon \psi w_\varepsilon \varphi \, dx\, dt - i \langle \Delta w_\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \rangle - i \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon \cdot \psi u_\varepsilon \nabla \varphi \, dx\, dt \\ + i \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi w_\varepsilon \nabla \varphi dx\, dt = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \psi w_\varepsilon \varphi \, dx\, dt. \end{aligned} \tag{3.8}$$

A seguir, analisaremos os termos de (3.8)

Estimativa para $I_1 := \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} u'_\varepsilon \psi w_\varepsilon \varphi \, dx\, dt$:

Aplicando o Teorema de Fubini, deduzimos

$$I_1 = \int_0^T \int_\Omega \widetilde{u'_\varepsilon} \psi w_\varepsilon \varphi \, dx\, dt = \int_\Omega w_\varepsilon \varphi \left(\int_0^T \psi \widetilde{u'_\varepsilon} \, dt \right) dx. \tag{3.9}$$

Mas, pela hipótese (1.4) item (iii), temos

$$\nabla w_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{fracamente em} \quad L^2(\Omega), \tag{3.10}$$

e pela inclusão compacta de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ (Teorema de Relich-Kondrachoff), obtemos

$$w_\varepsilon \rightarrow 1 \quad \text{fortemente em} \quad L^2(\Omega). \tag{3.11}$$

De (3.2) e (3.11), obtemos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_1 = \int_\Omega \varphi \left(\int_0^T \psi u' dt \right) dx. \tag{3.12}$$

Estimativa para $I_2 := -\langle \Delta w_\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \rangle$:

Considere a função $\mathcal{U}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ definida por $\mathcal{U}_\varepsilon = \displaystyle\int_0^T \psi\widetilde{u_\varepsilon}\, dt$. Da convergência (3.1) e como a inclusão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta, temos

$$\begin{cases} \mathcal{U}_\varepsilon \rightharpoonup \displaystyle\int_0^T \psi u\, dt, \quad \text{fracamente em } H_0^1(\Omega) \text{ e fortemente em } L^2(\Omega), \\ \mathcal{U}_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } S_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.13}$$

Em vista de (1.4)(iv), $-\Delta w_\varepsilon = \mu_\varepsilon - \gamma_\varepsilon$, e aplicando o Teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned} I_2 &= \langle \mu_\varepsilon - \gamma_\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi\rangle = \langle \mu_\varepsilon - \gamma_\varepsilon, \left(\int_0^T \psi\widetilde{u_\varepsilon}\, dt\right)\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\ &= \langle \mu_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

uma vez que $\langle \gamma_\varepsilon, \varphi\mathcal{U}_\varepsilon\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = 0$. Conseqüentemente, de (3.13) e (1.4)(iv), obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2 = \langle \mu, \left(\int_0^T \psi u\, dt\right)\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}. \tag{3.14}$$

Estimativa para $I_3 := \displaystyle\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon \cdot \psi u_\varepsilon \nabla\varphi\, dx\, dt$:

Do Teorema Fubini, deduzimos

$$I_3 = \int_\Omega \nabla w_\varepsilon \cdot \left(\int_0^T \psi\widetilde{u_\varepsilon} dt\right)\nabla\varphi\, dx. \tag{3.15}$$

Levando em consideração (3.10) e (3.13), de (3.15) temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_3 = 0. \tag{3.16}$$

Estimativa para $I_4 := \displaystyle\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi w_\varepsilon \nabla\varphi dx\, dt$:

Analogamente, aplicando o Teorema de Fubini resulta que

$$I_4 = \int_\Omega w_\varepsilon \nabla\varphi \cdot \nabla\left(\int_0^T \psi\widetilde{u_\varepsilon} dt\right) dx. \tag{3.17}$$

Considerando (3.11) e (3.13), de (3.17), concluímos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_4 = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\left(\int_0^T \psi u\, dt\right) dx. \tag{3.18}$$

Estimativa para $I_5 := \displaystyle\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \psi w_\varepsilon \varphi\, dx\, dt$:

Analogamente, considerando também o Teorema de Fubini segue-se que

$$I_5 := \int_\Omega w_\varepsilon\varphi \left(\int_0^T \psi\widetilde{f_\varepsilon}\, dt\right)\, dx. \tag{3.19}$$

Da hipótese $(1.2)_2$, (3.11), e de (3.19) temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_5 = \int_\Omega \varphi \left(\int_0^T \psi f \; dt \right) \; dx \tag{3.20}$$

Combinando (3.8), (3.12), (3.14), (3.16), (3.18), (3.20) e fazendo uso do Lema 3.2, deduzimos

$$\langle \int_\Omega u'\varphi dx, \psi \rangle + i \langle \int_\Omega u\varphi d\mu, \psi \rangle + i \langle \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \psi \rangle = \langle \int_\Omega f\varphi dx, \psi \rangle, \tag{3.21}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa a dualidade $\mathcal{D}'(0,T)$, $\mathcal{D}(0,T)$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e para toda $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$. Então, como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em V obtemos

$$(u'(t), v) + i\,(u(t), v)_{L^2(\Omega, d\mu)} + i\,(\nabla u(t), \nabla v) = (f, v), \tag{3.22}$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$, para toda $v \in V$, onde $(\cdot, \cdot)$ representa o produto interno em $L^2(\Omega)$.

Assim $(1.10)_1$ fica demonstrada no sentido fraco.

A verificação do dado inicial, isto é $u(x,0) = u^0(x)$, assim como a unicidade de solução segue, considerando argumentos semelhantes aos usados nas seções 2.3 e 2.4 respectivamente.

Já a regularidade da solução u de (1.10) é obtida de forma análoga como na seção 2.5, uma vez que $u_\varepsilon \in C^0([0,T], H_0^1(\Omega_\varepsilon))$, (também $\widetilde{u_\varepsilon} \in C^0([0,T], H_0^1(\Omega))$) segue-se que

$$\widetilde{u_\varepsilon} \in C^0([0,T], V)$$

Finalmente, de acordo com o Lema 3.1, deduzimos que

$$u \in L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.23}$$

REFERÊNCIAS

1 BRÉZIS, H.; BROWDER, F. E. Some properties of higher order Sobolev spaces, **J. Math. Pures et Appl.** v.61, p.242-259, 1982.

2 Cioranescu, D.; Donato, P. **An introduction to homogenization.** Oxford lecture series in mathematics and its applications. Oxford University Press Inc, New York, 1999.

3 CIORANESCU, D.; DONATO, P.; MURAT, F.; ZUAZUA, E. Homogenization and correctors for the wave equation in domains with small holes, **Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa** v.18, p. 251-293, 1991.

4 CIORANESCU, D.; MURAT, F. Un terme étrange venu d'alleurs. Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications (Brézis, H. e Lions, J. L. , eds), Collège de France Seminar, v.2 e 3, **Research Notes in Mathematics**, v.60 e 70, Pitman, p.93-138 e 154-178, 1982.

5 LIONS, J. L.; MAGENES, E. **Problèmes aux Limites non Homogènes, Aplications**. Dunod, Paris, 1968, Vol. 1.