

OTIMIZAÇÃO DA SEÇÃO DE UMA VIGA SUBMETIDA À FLEXÃO E AO CISALHAMENTO ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

OPTIMIZATION OF THE SECTION OF A BEAM SUBMITTED TO THE FLEXURE AND SHEARING THROUGH THE PROGRAMMING NON-LINEAL

Scheila Valechenski Biehl¹, Moisés Meza Pariona²

¹ Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG, Departamento de Matemática e Estatística, Campus em Uvaranas, Ponta Grossa, PR

² Autor para contato: Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG, Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Ciência de Materiais, Laboratório LIMAC, Campus em Uvaranas, Ponta Grossa, PR, Brasil; (42) 3220-3056; e-mail: mmpariona@uepg.br

Recebido para publicação em 17/05/2005

Aceito para publicação em 11/07/05

RESUMO

O trabalho consiste em minimizar a área da secção transversal de uma viga retangular, fixada horizontalmente em uma parede, submetida a um momento fletor e a uma força cisalhante, sendo que este tipo de aplicação tem a característica de não linear. Portanto, o método utilizado foi o de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), que encontra pontos candidatos a solução ótima do problema. Em seguida, aplicou-se as condições de segunda-ordem, que determinam qual dos pontos encontrados é realmente a solução do problema. Deste modo, através da programação não-linear foi encontrada a dimensão ideal da secção transversal de uma viga fixada horizontalmente em uma parede, satisfazendo as restrições do problema que consistem da tensão de flexão máxima permitida, da tensão de cisalhamento máxima permitida e que a espessura não deve exceder duas vezes a largura. O resultado da análise teórica se mostrou coerente com o resultado obtido pelo método gráfico.

Palavras-chave: otimização, programação não linear, método Karush-Kuhn-Tucker, viga

ABSTRACT

The purpose of the present work was to minimize the cross-sectional area of a rectangular beam subjected to a bending moment and to a shear force. Due to the non-linear characteristic of the problem, the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) method was used to find the candidates points of the solution. Then, the second-order conditions were applied to determine which of these candidates points were really the solution

of the problem. So, using the non-linear programming, the ideal dimension of the cross-sectional area of a beam fastened horizontally in a wall was found, considering the allowable bending stress, the allowable bending shear stress and the fact that the thickness of the beam should not exceed twice its width. The results of the theoretical analysis were coherent with those obtained by the graphic method.

Key words: optimization, non-linear programming, Karush-Kuhn-Tucker method, beam

1. Introdução

As últimas décadas têm-se caracterizado por uma aplicação crescente de métodos científicos na resolução de problemas tecnológicos complexos. Um dos principais fatores que têm contribuído para isso é o avanço tecnológico, principalmente na área de otimização. Muitos problemas aplicativos de otimização são citados (Instituto de Matemática e Estatística, 2005) como projetos de sistemas de distribuição de energia elétrica, posicionamento de satélites, projetos de computadores e de chips VLSI, roteamento ou escalonamento de veículos, alocação de trabalhadores ou máquinas a tarefas, empacotamento de caixas dentro de um containers, corte de barras e placas, *etc.* Muitos desses problemas podem ser modelados como problemas de maximizar (ou minimizar) uma função cujas variáveis devem obedecer a certas restrições, e de modo geral o ponto ótimo se encontra no contorno do domínio da região viável, podendo também ser interior à região factível. Encontrar soluções ótimas, ou mesmo aproximadas, para esses tipos de problemas é um desafio nem sempre fácil de ser vencido. A otimização visa fundamentalmente o estudo teórico de técnicas para a solução de problemas como os descritos acima, bem como a implementação eficiente de tais técnicas para a solução de problemas mais complexos.

Um detalhe importante para a compreensão e manipulação de um problema de programação matemática é a sua modelagem, por meio da qual torna-se mais clara e evidente a apresentação do problema, facilitando os procedimentos para sua resolução. O trabalho desenvolvido por Hernández (1998), apresenta a otimização de estruturas de aço, e o procedimento adequado da construção da modelagem do problema,

que tem grande importância para aplicações práticas de engenharia. Para este tipo de aplicação, ele definiu as variáveis do problema, o conjunto de restrições e a função objetivo do problema. Formulou deste modo o processo de otimização, considerando o peso da estrutura e a tensão máxima que ela suporta como o conjunto de restrições, para minimizar a função objetivo dada pela área transversal destas estruturas, ainda mostrou a representação gráfica do conjunto de restrições que mostra a localização da solução ótima. Griffiths *et al.* (2003) tratarão este problema por uma heurística diferente das propostas pelos métodos tradicionais, o método aplicado foi o Algoritmo Genético (GA).

A otimização também tem muitas aplicações nas áreas comerciais e industriais, sendo de suma importância para o planejamento de maximizar o lucro ou minimizar os custos de uma empresa. Além disso, pode projetar sistemas adequados na área de engenharia, melhorando as características desse sistema e economizando o custo, por isso, os problemas de otimização também são de grande importância do ponto de vista econômico. Birgin *et al.* (2005) mostra um exemplo dessa aplicação, trata-se do processo empilhamento de carga dentro de um container. O problema consiste em colocar um número máximo de cilindros de determinado raio em uma caixa retangular, para isto, elaborou um fluxograma onde desenvolveu o processo de otimização, e o resultado numérico foi comparando com outros métodos.

1.1. Objetivo do Trabalho

Neste trabalho foi realizada a aplicação da teoria de otimização, neste caso, trata-se em minimizar a

área da secção transversal de uma viga retangular, fixada horizontalmente na parede (Arora, 1989), submetida a um momento fletor e a uma força de corte máximo. Para este fim, aplicou-se o método mais geral da programação não-linear desenvolvido por Karush-Kuhn-Tucker (KKT), onde são encontrados pontos candidatos a ótimo do problema, e em seguida aplicaram-se as condições de segunda-ordem para verificar se o ponto encontrado é realmente a solução ótima do problema.

1.2. Problemas de Otimização com Restrições

a) Formulação não-linear

O problema de programação não-linear é proposto através da modelagem de uma função objetivo $f(x)$ não-linear e condicionada por certas restrições, seja por equações e/ou inequações lineares ou não-lineares. Em geral, como mostra Chong *et al.* (1996), onde a variável é representada pelo vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e a estrutura do problema de otimização é representada, como:

Minimizar $f(x)$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} h_i(x) = 0, & i = 1, \dots, m \\ g_j(x) \leq 0, & j = 1, \dots, p, \end{cases}$$

onde

$$x \in \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, e m \leq n.$$

Definição 1: Qualquer ponto satisfazendo as restrições do problema é chamado um *ponto factível*. O conjunto de todos os pontos factíveis (candidatos a ponto ótimo) é dado por Chong *et al.*

$$L(x, \lambda^*, u^*, s) = f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* h_i(x) + \sum_{i=1}^m u_i^* (g_i(x) + s_i^2) = f(x) + \lambda^T * h(x) + u^T * (g(x) + s^2)$$

$$(1996): \quad \left\{ x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, g(x) \leq 0 \right\}$$

Definição 2: Um ponto x^* satisfazendo as restrições $h_1(x^*)=0, \dots, h_m(x^*)=0$ é chamado *ponto regular* das restrições se os vetores gradientes $\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*)$ são linearmente independentes (Luenberger, 2003).

b) Definição de minimização

O problema de otimização é encontrar o valor mínimo para uma função objetivo, respeitando um conjunto de restrições (região factível). Mas primeiramente é necessário definir o ponto ótimo de uma função (Arora, 1989):

· *Ótimo local* é o valor ótimo (máximo ou mínimo) da função objetivo em uma sub-região da região factível.

· *Ótimo global* é o valor ótimo (máximo ou mínimo) da função objetivo em toda a região factível.

c) Condições Necessárias de Primeira-Ordem

As condições necessárias de primeira-ordem são importantes para determinar pontos candidatos à solução ótima de um problema. O ponto candidato ao mínimo local deve ser factível (definição 1), por isso deve-se verificar atentamente todas as restrições estabelecidas para assegurar que o teorema seguinte seja satisfeito.

Teorema 1 - Condições Necessárias de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Seja x^* um ponto regular de um conjunto de restrições e a existência do mínimo local de $f(x)$ é estabelecido pelas restrições:

$$\begin{cases} h_i(x) = 0, & i = 1, \dots, m \\ g_i(x) \leq 0, & i = 1, \dots, p \end{cases}$$

Define-se a função de Lagrange como (Chong, *et al.* 1996):

Neste teorema, λ^* refere-se ao vetor multiplicador de Lagrange e u^* o vetor multiplicador de Karush-Kuhn-Tucker (Chong, *et al.* 1996), de tal maneira que a Lagrangeana é estacionária com relação a x_j, λ_i^*, u_i^* e s_i , isto é:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m u_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0; \quad j=1 \text{ a } n$$

$$h_i(x^*) = 0; \quad i=1 \text{ a } p$$

$$g_i(x^*) + s_i^2 = 0; \quad i=1 \text{ a } m$$

$$u_i^* \cdot s_i = 0; \quad i=1 \text{ a } m \quad \text{e}$$

$$u_i^* \geq 0; \quad i=1 \text{ a } m$$

onde todas as derivadas são calculadas no ponto x^* .

Definição 3: A inequação $g_i \leq 0$ é dita *ativa* em x se $g_i(x) = 0$, e é *inativa* em x se $g_i(x) < 0$ (Chong, *et al.* 1996).

d) Condições Necessárias e Suficientes de Segunda-Ordem

As soluções das condições necessárias de primeira-ordem são pontos candidatos a mínimo local de um problema. As condições necessárias e suficientes de segunda-ordem determinam se algum dos pontos encontrados é realmente um mínimo local ou não.

Teorema 2 - Condições Necessárias de Segunda-Ordem Seja x^* satisfazendo as condições necessárias de primeira ordem (KKT) para problemas de otimização. Define-se a Hessiana da função de Lagrange L em x^* como (Arora, 1989):

$$\nabla^2 L = \nabla^2 f + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \cdot \nabla^2 h_i + \sum_{i=1}^m u_i^* \cdot \nabla^2 g_i$$

Considerar uma direção factível diferente de zero ($\bar{y} \neq 0$) satisfazendo o seguinte sistema linear no ponto x^* :

$$\begin{cases} \nabla h_i^T \cdot \bar{y} = 0; \quad i=1 \text{ a } p \\ \nabla g_i^T \cdot \bar{y} = 0; \text{ para todas as desigualdades ativas, isto é, } g_i(x^*) = 0 \end{cases}$$

Então para x^* ser um ponto de mínimo local do

problema, ele deve satisfazer:

$$Q \geq 0 \quad \text{onde } Q = \bar{y}^T \cdot \nabla^2 L(x^*) \cdot \bar{y}$$

Definição 4: O plano tangente no ponto x^* da superfície $S = \{x \in R^n : h(x^*) = 0\}$ é o conjunto (Luenberger, 2003):

$$T(x^*) = \{\bar{y} : \nabla h(x^*) \cdot \bar{y} = 0\}$$

Teorema 3 - Condições Suficientes de Segunda-Ordem. Seja x^* satisfazendo as condições necessárias de primeira-ordem de KKT para problemas de otimização. Se

$$Q > 0, \quad \text{onde } Q = \bar{y}^T \cdot \nabla^2 L(x^*) \cdot \bar{y}$$

então x^* é um *ponto de mínimo global* (significa que não existem outros pontos de ótimo local na vizinhança de x^*).

Teorema 4 - Condição Suficiente Forte. Seja satisfazendo as condições necessárias de primeira ordem de KKT para problemas de otimização. Define-se a Hessiana $\nabla^2 L(x^*)$ para a função de Lagrange no ponto x^* como

$$\nabla^2 L = \nabla^2 f + \sum_{i=1}^p v_i^* \cdot \nabla^2 h_i + \sum_{i=1}^m u_i^* \cdot \nabla^2 g_i$$

Então se $\nabla^2 L(x^*)$ é definida positiva, x^* é um ponto de mínimo global.

Definição 5: A forma quadrática de uma função $F(x) = \frac{1}{2} x^T A x$ ou de uma matriz A pode ser definida como positiva, semidefinida positiva, negativa, semidefinida negativa ou zero. A verificação desta afirmação pode ser feita através dos autovalores ou dos determinantes das sub-matrizes das menores principais (Arora, 1989).

2. Aplicação da otimização usando a programação não-linear

Uma viga de secção transversal retangular está sujeita a um momento fletor dado por M (N.m) e a

uma força de cisalhamento máximo dado por V (N). Para esta situação, a tensão de flexão na viga é dada pela equação $|\sigma| = \frac{6M}{bd^2}$ (Pa) e a tensão de cisalhamento

é dada por $|\tau| = \frac{3V}{2bd}$ (Pa), onde b é a largura e d é a espessura da viga de seção transversal em unidades de mm. Deve-se cumprir que as tensões de flexão e de cisalhamento não devem exceder aos valores máximos permitidos 10MPa e 2MPa, respectivamente. Exige-se também, que a espessura da viga não exceda duas vezes o tamanho da largura. Desse modo, deseja-se minimizar a área do corte transversal da viga, mostrada na Figura 1.

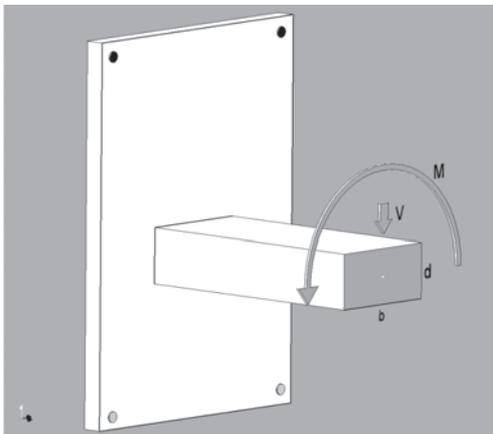


Figura 1 - Uma viga retangular submetido a um momento fletor M e a uma força de cisalhamento V .

A função objetivo para o problema é a área da seção transversal, que é dada por:

$$(1) \quad f(b, d) = bd$$

As restrições do problema consistem do momento fletor, tensão de cisalhamento e a espessura em razão da largura. Para esta aplicação, foi considerado $M = 40\text{KN.m}$ e $V = 150\text{KN}$ (Arora, 1989).

$$(2) \quad \sigma = \frac{6(40)(1000)(1000)}{bd^2}, \text{ N/mm}^2$$

$$(3) \quad \tau = \frac{3(150)(1000)}{2bd}, \text{ N/mm}^2$$

A tensão do momento fletor permissível é:

$$(4) \quad 10\text{MPa} = 10(10^6)\text{N/m}^2 = 10\text{N/mm}^2$$

E a tensão de cisalhamento permissível é:

$$(5) \quad 2\text{MPa} = 2(10^6)\text{N/m}^2 = 2\text{N/mm}^2$$

Logo, segundo as eqs. (2) e (4), (3) e (5) tem-se:

A restrição da tensão do momento fletor:

$$g_1 = \frac{2,4 \cdot 10^8}{bd^2} - 10 \leq 0$$

A restrição da tensão cisalhante:

$$g_2 = \frac{2,25 \cdot 10^5}{bd} - 2 \leq 0$$

A condição exigindo que a espessura não exceda duas vezes a largura pode ser expressa como:

$$g_3 = d - 2b \leq 0$$

Finalmente, as condições de não-negatividade:

$$g_4 = -b \leq 0$$

$$g_5 = -d \leq 0$$

Em seguida o modelo deve ser proposto na forma padrão para sua resolução pelos teoremas citados na teoria de programação não-linear:

minimizar $f(b, d) = bd$]

$$\text{sujeito a } \begin{cases} g_1 = \frac{2,4 \cdot 10^8}{bd^2} - 10 \leq 0 \\ g_2 = \frac{2,25 \cdot 10^5}{bd} - 2 \leq 0 \\ g_3 = d - 2b \leq 0 \\ g_4 = -b \leq 0 \\ g_5 = -d \leq 0 \end{cases}$$

2.1. Processo de Otimização

Acrescentando as constantes s_i^2 , onde $i = 1, 2, \dots, 5$, pelo teorema 1:

Minimizar $f(b,d) = bd$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \frac{2,4 \cdot 10^8}{bd^2} - 10 + s_1^2 = 0 & (6) \\ \frac{2,25 \cdot 10^5}{bd} - 2 + s_2^2 = 0 & (7) \\ d - 2b + s_3^2 = 0 & (8) \\ -b + s_4^2 = 0 & (9) \\ -d + s_5^2 = 0 & (10) \end{cases}$$

Para poder analisar de maneira mais viável as variáveis u_i e s_i , é necessário construir um planejamento fatorial em dois níveis (Box, 1978) das variáveis u_i ($i=1,2,3,4,5$), pois estas variáveis podem assumir só dois valores, zero ou valores positivos. Como consequência desta montagem, é possível analisar os valores de s_i , sendo que estes valores também obedecem a forma da estrutura de planejamento fatorial.

Como são 5 variáveis de u_i , então tem-se $2^5 = 32$ possibilidades. Este tipo de planejamento pode ser observado na Tabela 1:

Tabela 1 - Possíveis valores de u_i e s_i .

Casos	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
1	0	0	0	0	0	arb.	arb.	arb.	arb.	arb.
2	0	0	0	0	>0	arb.	arb.	arb.	arb.	0
3	0	0	0	>0	0	arb.	arb.	arb.	0	arb.
4	0	0	0	>0	>0	arb.	arb.	arb.	0	0
5	0	0	>0	0	0	arb.	arb.	0	arb.	arb.
6	0	0	>0	0	>0	arb.	arb.	0	arb.	0
7	0	0	>0	>0	0	arb.	arb.	0	0	arb.
8	0	0	>0	>0	>0	arb.	arb.	0	0	0
9	0	>0	0	0	0	arb.	0	arb.	arb.	arb.
10	0	>0	0	0	>0	arb.	0	arb.	arb.	0
11	0	>0	0	>0	0	arb.	0	arb.	0	arb.
12	0	>0	0	>0	>0	arb.	0	arb.	0	0
13	0	>0	>0	0	0	arb.	0	0	arb.	arb.
14	0	>0	>0	0	>0	arb.	0	0	arb.	0
15	0	>0	>0	>0	0	arb.	0	0	0	arb.
16	0	>0	>0	>0	>0	arb.	0	0	0	0
17	>0	0	0	0	0	0	arb.	arb.	arb.	arb.
18	>0	0	0	0	>0	0	arb.	arb.	arb.	0
19	>0	0	0	>0	0	0	arb.	arb.	0	arb.
20	>0	0	0	>0	>0	0	arb.	arb.	0	0
21	>0	0	>0	0	0	0	arb.	0	arb.	arb.
22	>0	0	>0	0	>0	0	arb.	0	arb.	0
23	>0	0	>0	>0	0	0	arb.	0	0	arb.
24	>0	0	>0	>0	>0	0	arb.	0	0	0
25	>0	>0	0	0	0	0	0	arb.	arb.	arb.
26	>0	>0	0	0	>0	0	0	arb.	arb.	0
27	>0	>0	0	>0	0	0	0	arb.	0	arb.
28	>0	>0	0	>0	>0	0	0	arb.	0	0
29	>0	>0	>0	0	0	0	0	0	arb.	arb.
30	>0	>0	>0	0	>0	0	0	0	arb.	0
31	>0	>0	>0	>0	0	0	0	0	0	arb.
32	>0	>0	>0	>0	>0	0	0	0	0	0

A equação de Lagrange para este problema aplicando o teorema 1 é dada por:

$$L = f(b, d) + u_i g_i(b, d)$$

$$L = bd + u_1 \left(\frac{2,4 \cdot 10^8}{bd^2} - 10 + s_1^2 \right) + u_2 \left(\frac{2,25 \cdot 10^5}{bd} - 2 + s_2^2 \right) + u_3 (d - 2b + s_3^2) + u_4 (-b + s_4^2) + u_5 (d + s_5^2)$$

Derivando a equação de Lagrange em função de b e em função de d , pelo teorema 1, e igualando estas derivadas a zero, obtém-se as condições de KKT:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial b} = d + u_1 \left(\frac{-2,4 \cdot 10^8}{b^2 d^2} \right) + u_2 \left(\frac{-2,25 \cdot 10^5}{b^2 d} \right) - 2u_3 - u_4 = 0 & (11) \\ \frac{\partial L}{\partial d} = b + u_1 \left(\frac{-4,8 \cdot 10^8}{bd^3} \right) + u_2 \left(\frac{-2,25 \cdot 10^5}{bd^2} \right) + u_3 - u_5 = 0 & (12) \\ u_i s_i = 0; g_i + s_i^2 = 0; u_i \geq 0 & (13) \end{cases}$$

Para resolver as condições de KKT, deve-se analisar os 32 casos da tabela 1:

· Quando $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$ na equação (11), ocorre $d = 0$, que é falso, pois d (espessura da viga) deve ser positivo. Cancelam-se, então, os casos 1 e 2 (linhas 1 e 2 da tabela).

· Quando $u_1 = u_2 = u_3 = u_5$ na equação (12), ocorre $b = 0$, que é falso, pois b (largura da viga) deve ser positivo. Cancela-se, então, o caso 3 (linha 3 da tabela).

· Quando s_4 e/ou s_5 na equação (9) e/ou (10) forem iguais a zero, ocorre $b = 0$ e/ou $d = 0$, que é falso. Conseqüentemente cancelam-se os casos (linhas) 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31 e 32 da tabela 1.

Eliminando-se estes casos, ainda resta analisar os casos 9, 13, 17, 21, 25 e 29 da tabela 1.

Caso (linha) 9: $u_1 = s_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0$

Substituindo estes valores nas equações (7), (11) e (12) obtém-se: $bd = 1,125 \cdot 10^5$ e $u_2 = 5,625 \cdot 10^4 \geq 0$, satisfazendo as condições de KKT. Assim, a equação $bd = 1,125 \cdot 10^5$ substituindo nas restrições (g_1) e (g_3)

mostra uma família de soluções possíveis dada pelo intervalo:

$$\begin{cases} 237,17 \leq b \leq 527,34 \text{ mm} \\ 213,33 \leq d \leq 474,33 \text{ mm} \\ \text{sendo } bd = 1,125 \cdot 10^5 \end{cases}$$

Caso (linha) 13: $u_1 = s_2 = s_3 = u_4 = u_5 = 0$

Substituindo nas equações (8) e (7) tem-se $d = 474,34$ mm e $b = 237,17$ mm. Logo, substituindo estes valores nas equações (11), (12) e (g_1) tem-se $u_2 = 5,625 \cdot 10^4$, $u_3 = 0$ e $g_1 = -5,5 \leq 0$, que satisfazem as condições de KKT. Portanto, o ponto é um candidato a ponto ótimo.

Caso (linha) 17: $s_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0$

Substituindo estes valores nas equações (11) e (12) obtém-se um sistema com duas equações inconsistentes, ou seja, não existe solução para este caso.

Caso (linha) 21: $s_1 = u_2 = s_3 = u_4 = u_5 = 0$

Substituindo estes valores nas equações (13) e (11) obtém-se o ponto $b = 181,71$ mm e $d = 363,42$ mm. Porém, esse ponto resulta $u_1 = 4,402,35$ e $u_3 = -60,57 < 0$, logo este caso não tem solução.

Caso (linha) 25: $s_1 = s_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0$

Substituindo estes valores nas equações (11) e (12) tem-se $bd = 112.500$, e usando este valor na equação (11) encontra-se $d = 213,33$ mm e $b = 527,34$ mm. Substituindo esses pontos nas equações (6), (7) e g_3 , obtém-se $u_1 = 0$, $u_2 = 5,625 \cdot 10^4$ e $g_3 = -841,35 < 0$. Logo, as condições de KKT são satisfeitas e esse ponto é um candidato a solução ótima.

Caso (linha) 29: $s_1 = s_2 = s_3 = u_4 = u_5 = 0$

Substituindo estes valores nas equações (8) e (6) obtém-se $b = 181,71$ mm e $d = 363,42$ mm. Mas,

substituindo estes pontos nas equações (11) e (12) resulta um sistema com duas equações e três incógnitas, que é um sistema indeterminado, ou seja, não há solução para este caso.

Com a análise de todas as possibilidades foram encontrados três pontos candidatos a solução ótima, que foram os casos 9, 13 e 25. Porém, resta saber qual ponto encontrado é realmente a solução ótima do problema. Para isto é necessário analisar as condições necessárias e suficientes de segunda-ordem aplicando os teoremas 2 e 3.

Analisando as condições de otimalidade de segunda ordem para o caso 9 (teorema 2). Para isto foi calculada a Hessiana da equação Lagrangeana, que é dada pela soma da Hessiana da função objetivo com o produto do vetor multiplicador de Lagrange pela Hessiana da restrição ativa. Assim:

$$\nabla^2 L = \nabla^2 f + u_2 \cdot \nabla^2 g_2 = \begin{vmatrix} \frac{22,5 \cdot 10^4}{b^2} & 2 \\ 2 & \frac{22,5 \cdot 10^4}{d^2} \end{vmatrix}$$

Verificando a forma dessa matriz pelo teorema de sub-matrizes (Arora, 1989), encontrou-se que $\nabla^2 L$ é semidefinida positiva, logo o ponto encontrado não é um mínimo global (teorema 4). No entanto, é necessário verificar se o ponto candidato será um mínimo local.

Dessa maneira, deve-se encontrar uma direção $\bar{y} \neq 0$ pertencente ao plano tangente (definição 4), ou seja:

$$\bar{y} \neq 0 \in \tilde{T}(b, d, u) = \{ \bar{y} : \nabla g_2(b, d) \cdot \bar{y} = 0 \}, \text{ onde } \nabla g_2$$

é o gradiente da restrição ativa g_2 (definição 3) e \bar{y} o

$$\text{o vetor } \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}. \text{ Que resulta: } \bar{y} = \begin{vmatrix} 1 \\ -d/b \end{vmatrix} \cdot c; \quad c = y_1$$

é uma cte

Portanto:

$$Q = \bar{y}^T \cdot \nabla^2 L(x^*) \cdot \bar{y} = c \begin{vmatrix} 1 & -d/b \\ -d/b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

O resultado de $Q=0$ significa pelo teorema 2, que o ponto encontrado é o mínimo local do problema. Neste caso, tem-se uma família de soluções possíveis que está no intervalo:

$$\begin{cases} 237,17 \leq b \leq 527,34 \text{ mm} \\ 213,33 \leq d \leq 474,33 \text{ mm} \\ \text{sendo } bd = 1,125 \cdot 10^5 \text{ mm}^2 \end{cases}$$

Os pontos encontrados no caso 13 e no caso 25 estão contidos no intervalo acima, por isso não foi necessário analisar as condições necessárias e suficientes de segunda ordem para os pontos encontrados nestes casos, que também serão soluções para o problema.

2.2. Solução Gráfica para a Modelagem de uma Viga Retangular

Foi feita uma solução gráfica através das restrições g_1 , g_2 e g_3 , tal como é mostrada na Figura 2. A interseção destes conjuntos mostra a solução factível e dentro desta região mostra-se também a curva A-B que é a solução ótima do problema. Sendo que esta solução ótima concorda com a análise teórica feita. Observa-se que a solução ótima da espessura (d) e da largura (b) encontram-se dentro de um intervalo, tal como, $237,17 \leq b \leq 527,34 \text{ mm}$ e $213,13 \leq d \leq 474,33 \text{ mm}$.

Sabe-se que peso da viga é proporcional ao volume da viga e por sua vez o volume é proporcional à área transversal da viga. Por este motivo, que a função objetivo foi considerada como a área transversal da viga. Esta corroboração é possível de fazer se a função objetivo possuir somente duas variáveis e para uma função objetivo de duas ou mais variáveis só é possível através de tratamentos teóricos ou através de softwares disponíveis no mercado.

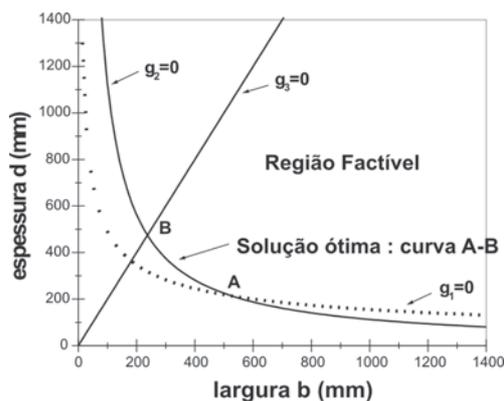


Figura 2 - Região factível e solução ótima do problema da viga retangular.

3. Conclusão

No estudo da programação não-linear não existe um algoritmo “universal”, ou seja, não se têm à disposição, ainda, algoritmos eficientes que garantam a obtenção de pontos de ótimo global para modelos não-lineares, visto que os graus e complexidade de não-linearidade podem ser bastante diversificados. Devido a isso e ainda pelo fato de não haver essa garantia da obtenção do chamado *ótimo global*, mas somente de pontos de *ótimo local*, a otimização global vem justificando um grande número de trabalhos de pesquisa. Neste trabalho foi aplicado o método mais geral da programação não-linear desenvolvido por Karush-Kuhn-Tucker (KKT), onde foram encontrados pontos candidatos a solução ótima do problema, analisando-se todas as possibilidades através de um planejamento fatorial de dois níveis, e em seguida aplicaram-

se as condições de segunda-ordem para determinar se algum dos pontos encontrados era realmente a solução ótima do problema. Como resultado obteve-se que as variáveis designadas estavam contidas num determinado intervalo, ou seja, há uma família de soluções possíveis dentro de alguns limites especificados. Comparou-se ainda o resultado analítico com o resultado gráfico, sendo que ambos mostraram-se coerentes.

REFERÊNCIAS

1. INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA. Disponível em www.ime.usp.br/dcc/areas/node10html#OtimComb. Acesso em março, 2005.
2. HERNÁNDEZ, S. **Optimum Design of Steel Structures**. J. Construct. Steel Res. vol. 46, p.374-378, 1998.
3. BIRGIN, E.G.; MARTÍNEZ, J.M.; RONCONI, D.P. **Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container: A nonlinear approach**. European Journal of Operational Research, v.160, p.19-33, 2005.
4. GRIFFITHS, D.R.; MILES, J.C. **Determining the optimal cross-section of beams**. Advanced Engineering Informatics, v.17, p.59-76, 2003.
5. ARORA, J.S. **Introduction to optimum design**. McGraw-Hill Book Company, 1989.
6. CHONG, E.K.P.; ZAK, S.H. **An introduction to optimization**. New York: John Willey & Sons, Inc., 1996.
7. LUENBERGER, D.G. **Linear and nonlinear programming**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.
8. BOX, G.E.P. **Statistics for experiments: an introduction to design, data analysis, and model building**. New York: John Willey & Sons, p.653, 1978.