

TRANSIENTE DE MEMÓRIAS EM REDE COM ACOPLAMENTO LOCAL E NÃO LOCAL

TRANSIENTS OF MEMORIES IN A LATTICE WITH LOCAL AND NON-LOCAL COUPLING

Robson Conrado Bonetti¹, Fabiana Heirich¹, Carlos Adalberto Schnaider Batista¹, Antonio Marcos Batista²

¹ Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG, Departamento de Física, Ponta Grossa, PR

² Autor para contato: Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG, Departamento de Matemática e Estatística, Ponta Grossa, PR, Brasil; e-mail: batista@interponta.com.br

Recebido para publicação em 23/07/2007

Aceito para publicação em 31/10/2007

RESUMO

Uma aplicação de modelos de mapas acoplados foi utilizada para explicar a formação de padrões de memórias, observadas em experiências de ondas de densidade de carga em NbSe₃. Consideramos uma rede com conexões locais e conexões não locais distribuídas aleatoriamente. O tempo transiente, para a formação da memória, foi obtido em função dos parâmetros da rede e da probabilidade das conexões não locais.

Palavras-chave: memórias, redes, aleatória.

ABSTRACT

An application of coupled map models was used in order to explain the formation of memorie patterns, observed in experiences of waves in an NbSe₃ charge density. We considered a web with local and non-local randomly distributed connections. The transient time for the formation of memory was obtained from the parameters of the web and from the probability of non-local connections.

Key words: memories, web, random distribution.

1 Introdução

Inúmeros modelos atuais de interesse têm o tempo como variável discreta (ou seja, assume apenas

valores inteiros $n = 0, 1, 2, \dots$), e descrevem a evolução no tempo de um sistema dinâmico expressando o seu estado como uma função do instante anterior, que são denominados de mapas. Uma das principais utili-

zações dos mapas é auxiliar na análise de sistemas contínuos. Tais modelos discretos são denominados equações a diferenças, relação de recorrência, mapas iterados ou simplesmente mapas. Eles têm sido bastante utilizados em sistemas dinâmicos, no estudo de formação de padrões e no estudo de caos. Mapas são relações de recorrência, computacionalmente mais fáceis de tratar do que as equações diferenciais, pois o uso de modelos contínuos ou discretos envolve uma escolha que tem por base vários fatores, analíticos e computacionais.

Sistemas dinâmicos espaço-temporais com um grande número de graus de liberdade têm sido amplamente estudados na comunidade científica devido a sua multidisciplinaridade e aplicabilidade em todas as áreas científicas. Este interesse é motivado em virtude do grande número de problemas práticos onde a dinâmica espacial desempenha um papel significativo: fenômenos de turbulência observados em fluidos e plasmas, sistemas óticos, física do estado sólido, química, redes neurais (HOPFIELD, 1982), formação de padrões em sistemas naturais, redes de mundo pequeno (WATTS, 1999), sistemas dinâmicos acoplados em biologia e tecnologia, dentre outros. Para o estudo destes sistemas utilizamos um modelo espaço-temporal (KANEKO, 1983), onde temos a possibilidade da ocorrência de memórias.

Um modelo espaço-temporal muito utilizado é a rede de mapas acoplados. As redes de mapas acoplados quando comparadas a outros sistemas com extensão espacial, como é o caso das equações diferenciais parciais que são modelos onde o tempo, o espaço e a variável de estado são contínuos e cadeias de osciladores acoplados onde o tempo e a variável de estado são contínuos e o espaço é discreto, são computacionalmente mais fáceis de manipular. As equações diferenciais parciais requerem uma quantidade muito grande de informações (uma função contínua) para especificar o estado e exigem grandes recursos computacionais para a simulação (CRUTCHFIELD e KANEKO, 1987). As redes de mapas acoplados apresentam maior complexidade quando comparadas com autômatos celulares que são modelos onde o tempo, o espaço e a variável de estado são discretos, devido à capacidade de produção de informação local. O nosso trabalho é baseado em redes de mapas acoplados. Consideramos redes de mapas acoplados (KANEKO,

1993) com o intuito de analisar a formação de memórias em um sistema dinâmico com muitos graus de liberdade. O sistema, uma simples equação de difusão discretizada, armazena memórias, sendo que este mecanismo de memória pode ser comparado a uma rede neural (HOPFIELD, 1982), que é um sistema dinâmico com parâmetros ajustáveis, o qual armazena padrões desejados que minimizam uma energia funcional.

A possibilidade da formação de memórias foi estudada por Coppersmith para explicar o experimento de uma onda de densidade de carga (ODC) em cerâmicas semicondutoras de NbSe_3 (COPPERSMITH e colaboradores, 1997), em que a memória codificada é manifestada como a sincronização da resposta a um trem de pulsos elétricos periódicos tal que V/I (V = voltagem, I = corrente da onda de densidade de carga, que é proporcional a velocidade da onda de densidade de carga v) diminui quando cada pulso cessa (COPPERSMITH e colaboradores, 1997; COPPERSMITH e LITTLEWOOD, 1987). Para explicar a formação de memórias de curta duração foi proposta uma rede de mapas acoplados com pulsos periódicos, com a rede armazenando uma seqüência de pulsos durante um curto espaço de tempo e posteriormente perdendo quase toda a informação quando a perturbação externa é desligada. O sistema é deterministicamente forçado para um ponto fixo, e uma vez que este ponto fixo é atingido, não é mais possível recuperar as memórias de curta duração. Logo, é possível manter as memórias transientes adicionando um ruído ao sistema, já que múltiplas memórias são observadas em amostras da cerâmica semicondutora de NbSe_3 , quando é feito um arranjo que induz ruído ao experimento.

2 Redes aleatórias

Rede é uma noção simples, abstrata e intuitiva, usada para representar a idéia de alguma espécie de relação entre os objetos. As redes são úteis para representar várias estruturas que aparecem na prática, como exemplo, estruturação de dados, resolução e modelagem de problemas, abstração de problemas computacionais, dentre outros.

No mundo atual, muitos sistemas têm sua estrutura formada por uma rede complexa, sendo que no começo era utilizado o estudo de redes regulares. Após 1950, redes sem um perfil organizacional bem definido passaram a ser tratadas como redes aleatórias através dos trabalhos de Paul Erdős e Alfréd Rényi (Erdős e Rényi, 1959), que mostraram que métodos probabilísticos poderiam ser utilizados para resolver problemas da teoria de redes. Todo sistema complexo apresenta algum tipo de princípio organizacional que, em geral, influencia sua topologia.

Desenvolvimentos tecnológicos recentes causaram um grande avanço no estudo de redes complexas. A informatização dos processos de aquisição de dados permitiu a construção de grandes bancos de dados com informações sobre a topologia de várias redes reais. O aumento da capacidade de cálculo dos computadores viabilizou o estudo das redes formadas por milhões de sítios. A crescente interação entre pesquisadores de diferentes áreas permitiu que os mesmos tivessem acesso a dados sobre as redes de diversas naturezas. Impulsionado por esses fatores, vários conceitos e métodos foram investigados e propostos nos últimos anos.

Os primeiros estudos sobre redes e suas propriedades foram dos matemáticos Paul Erdős e Alfréd Rényi (WATTS, 1999; BUCHANAN, 2002; BARABÁSI, 2003), destacando-se os trabalhos sobre redes aleatórias. Analisando a formação das redes sociais, eles demonstraram que bastava uma conexão entre cada um dos convidados de uma festa, para que todos estivessem conectados ao final dela e quanto mais ligações eram adicionadas, maior a probabilidade de serem gerados agrupamentos, ou seja, grupos de nós mais conectados. Portanto, uma festa poderia ser um agrupamento de pessoas que de tempos em tempos estabeleciam relações com outros grupos.

Erdős e Rényi acreditavam que as conexões entre esses nós eram aleatórias, no sentido de que esses nós se agregavam aleatoriamente, concluindo que todos os nós de uma determinada rede, deveriam ter mais ou menos a mesma quantidade de conexões, ou igualdade nas chances de receber novas ligações, constituindo-se, assim, como redes igualitárias (Barabási, 2003). Logo, quanto mais complexa era a rede anali-

sada, maior as chances de ser aleatória.

Na teoria de redes aleatórias de Erdős, parte-se de um número previamente dado de nós e em seguida eles são conectados. Mais exatamente, parte-se de N nós e nenhuma ligação, e em seguida conecta-se aleatoriamente com probabilidade P cada par de nós. Essa probabilidade pode ser calculada como a fração entre as ligações atuais e a totalidade das ligações possíveis $[N(N-1)/2]$. Num grafo aleatório cada nó i possui um determinado número de ligações z_i . O número médio de ligações por sítio, ou a conectividade média $\langle z \rangle$ da rede, é dado por

$$\langle z \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i = \frac{1}{N} 2 \frac{P[N(N-1)]}{2} = P(N-1) \approx PN \quad (1)$$

quando $N \rightarrow \infty$

3 Modelo

A forma do acoplamento que inicialmente utilizaremos é

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \text{int} \{ K [f(x_n^{(i+1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-1)})] - (1 + A_n) \} \quad (2)$$

onde o tempo n é discreto ($n = 0, 1, 2, \dots$), i é o índice referente às posições dos mapas na rede ($i = 1, 2, \dots, N = \text{tamanho do sistema}$), K é o parâmetro de acoplamento entre os mapas, $f(x)$ é o mapa característico de cada sítio, x é a variável de estado, que pode representar a posição, a fase ou outra propriedade física do sistema e $\text{int}\{z\}$, é uma função descontínua que retorna o maior inteiro igual ou menor do que z . A função $\text{int}\{z\}$ surge na equação (2), pois a cada final de pulso as partículas estão em um potencial mínimo que com o decorrer das iterações formará um padrão na rede (padrão das memórias). A equação (2) descreve a dinâmica das posições de N partículas em um poço de potencial periódico, com as partículas vizinhas conectadas por molas de constante elástica $K < 1$, onde todas as partículas estão na presença de um forçamento periódico externo da forma $(1 + A_n)$. A equação descreve a dinâmica de uma onda de densidade de carga deslizando (ODC) e está relacionada a modelos de uma variedade de sistemas dinâmicos (CARLSON e LANGER, 1989; HERZ e HOPFIELD, 1995).

A equação (2) descreve a dinâmica das posições de N partículas em um poço de potencial periódico (Figura 1), com as partículas vizinhas acopladas por molas de constante elástica $K < 1$, onde todas as partículas estão na presença de um forçamento periódico externo da forma $(1 + A_n)$

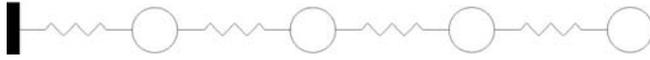


Figura 1 - Partículas acopladas com seus vizinhos através de molas elásticas.

Para observarmos as formações das memórias utilizamos a variável de curvatura $c_n^{(i)}$, que é a segunda derivada da variável de estado,

$$c_n^{(i)} = K[f(x_n^{(i+1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-1)})] \quad (3)$$

Utilizando as equações (2) e (3), podemos verificar a formação de memórias permanentes (valores finais das variáveis de curvatura) e memórias transientes, para 10 mapas acoplados localmente em uma rede unidimensional com uma extremidade fixa e outra livre (Figura 2)

$$x_n^{(0)} = 0 \quad x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)} \quad (4)$$

onde a dinâmica do mapa isolado é linear $f(x) = x$, e aplicando pulsos A_n em ciclos que se repetem com valores 9 e 10 ($A_1 = 9, A_2 = 10, A_3 = 9, A_4 = 10, \dots$), verifica-se que os sítios da rede, após um determinado número de iterações, armazenam certos níveis de memória. As memórias são provenientes dos pulsos, que ocasionam na variável de curvatura $c_n^{(i)}$, com o decorrer das iterações, valores constantes. Para os valores de $c_n^{(i)} = 1$ a $c_n^{(i)} = 9$ a temos memórias transientes, enquanto que para o valor $c_n^{(i)} = 10$ temos uma memória permanente.

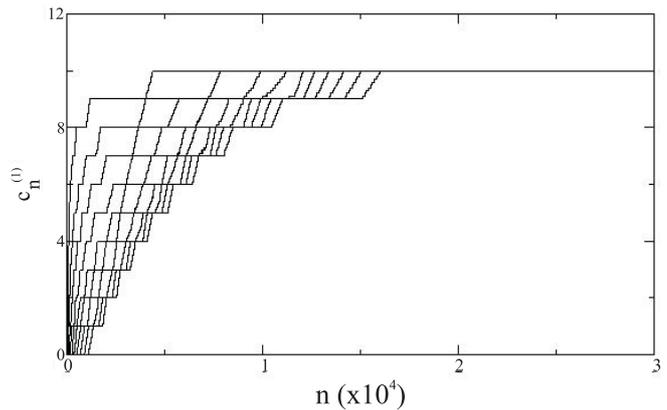


Figura 2 - $c_n^{(i)}$ versus n . O tamanho da rede é $N = 10$, com $K = 0,01$, $A_n = 9$ para n ímpar e $A_n = 10$ para n par e a função é linear $f(x) = x$.

Para compreender como as memórias formam-se, necessitamos olhar para Figura (2). Inicialmente, cada pulso A_n causa um incremento de mesmo valor para cada sítio $x_n^{(i)}$, menos para o mapa acoplado na extremidade fixa ($x_n^{(0)} = 0$), o qual começa apresentar um aumento da variável de curvatura $c_n^{(i)}$. Com o passar das iterações a variável de curvatura aumenta cada vez mais até que o acoplamento entre o primeiro sítio e a extremidade fixa possua um valor constante com a aplicação, ou seja, $A_1 = 9$. Depois de algumas iterações o acoplamento não é mais suficiente para mudar a ação do forçamento ($A_2 = 10$), gerando um aumento da variável de curvatura até a memória permanente. Isso ocorre para $c_n^{(2)}$ e $c_n^{(3)}$ e para outros $c_n^{(i)}$. Deste modo a variável de curvatura estende-se para todos os valores inteiros dos $c_n^{(i)}$, e ao final de um longo tempo, ocorre uma saturação (COPPERSMITH e colaboradores, 1997; BATISTA e colaboradores, 2000), $c_n^{(i)} = 10$. Não há necessidade das forças impulsivas (A_n) serem diferentes porque os valores finais das variáveis de curvatura serão iguais ao maior valor das forças impulsivas aplicadas. Valores diferentes de A_n acarretam um aumento no tempo transiente para o sistema atingir a memória permanente.

Utilizando a Figura (2), podemos observar que as memórias transientes são formadas durante um número determinado de iterações e posteriormente perde-se toda a sua informação, não podendo ser mais recuperada. À medida que o tempo (n) evolui, a variável de curvatura é forçada para um ponto fixo, onde ficará enquanto o pulso periódico estiver agindo sobre o sistema (Pontes e colaboradores, 2005). Podemos observar na Figura (3), que para uma rede com $N=2$ as memórias transientes quase não estão presentes no sistema e em uma rede com $N=10$ ocorre o aparecimento das memórias transientes e o tempo necessário para os sítios atingirem o valor final da variável de curvatura é maior do que em uma rede com $N=2$. O tempo necessário para o sítio i atingir o valor permanente da variável de curvatura ($c_n^{(i)} = 10$), varia em relação ao tamanho da rede.

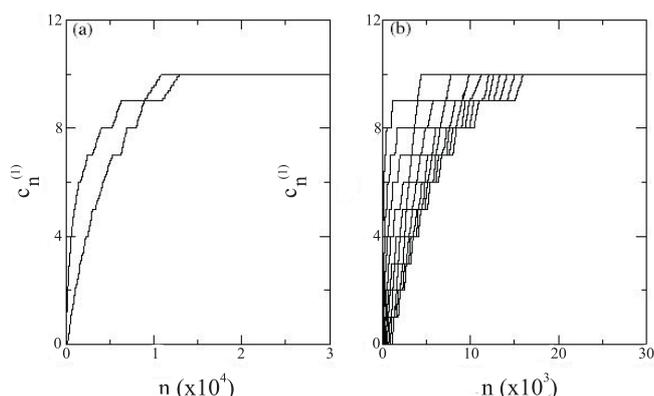


Figura 3 - $c_n^{(i)}$ versus n , com $K=0,01$, $A_n=9$ para n ímpar e $A_n=10$ para n par e $f(x)=x$. (a) $N=2$ e (b) $N=10$.

O tempo (n^*) necessário para que todos os sítios atinjam a memória permanente segue uma lei de potência

$$n^{*(i)} = b^{(i)} K^{\beta^{(i)}} \quad (5)$$

conforme pode ser visto na Figura 4.

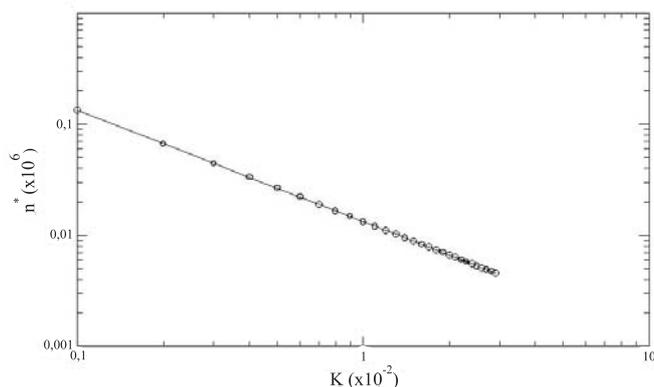


Figura 4 - n^* versus K , para uma rede $N=10$, $i=10$, $A_n=10$ para todos os n e $f(x)=x$.

4 Formação de memórias

Partimos de mapas localmente acoplados inserindo conexões aleatórias para a construção de nosso modelo. Seja o seguinte conjunto de mapas localmente acoplados

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \text{int} \{ K [f(x_n^{(i+1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-1)}) + M^{(i)}] - (1 + A_n) \} \quad (6)$$

para observarmos a formação de memórias com conexões aleatórias, utilizaremos a variável de curvatura $c_n^{(i)}$ definida pela relação

$$c_n^{(i)} = K [f(x_n^{(i+1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-1)}) + M^{(i)}] \quad (7)$$

onde as conexões aleatórias são dadas por

$$M^{(i)} = \sum_j \{ [f(x_n^{(j)}) - f(x_n^{(i)})] I_{ij} \} \quad (8)$$

sendo j o índice dos sítios escolhidos aleatoriamente, onde $j \neq i$, $j \neq i+1$ e $j \neq i-1$. Os termos aleatórios ou de conexões não-locais são representados pelos elementos da matriz conectividade simétrica I_{ij} . Estes elementos de matriz são 1 e 0, que nos dizem se os sítios $x^{(i)}$ e $x^{(j)}$ estão ($I_{ij} = 1$) ou não ($I_{ij} = 0$) conectados. Para uma rede com $N=10$ temos a seguinte matriz de conexão

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

nesta matriz de conexão os elementos da última coluna e da última linha são sempre nulos porque o sítio i está conectado apenas com o $(n-1)$ sítio (penúltimo sítio), representando assim o sítio que está na extremidade livre. Os elementos da diagonal principal da matriz de conexão são nulos porque o sítio não se conecta aleatoriamente com ele mesmo, e os elementos da diagonal inferior e superior da matriz são sempre nulos, pois expressam as conexões locais e esta matriz de conexão representa as conexões não-locais. Esta matriz de conexão é simétrica onde a conexão que vai do sítio i para o sítio j é a mesma que vai no sentido contrário, por exemplo, os elementos $a_{35} = a_{53} = 1$, significa que os sítios 3 e 5 estão conectados e os elementos $a_{49} = a_{94} = 0$, significa que os sítios 4 e 9 não estão conectados.

Na Figura (5) para 10 mapas acoplados por molas de constante elástica K em uma rede unidimensional com conexões aleatórias, com uma extremidade fixa e outra livre, calculamos o tempo médio τ para o sistema atingir o valor da memória permanente em função da probabilidade P , sendo P o número de conexões da rede dividido pelo número máximo de possíveis conexões e

$$\tau = \frac{\sum_{m=1}^h n_m^*}{h} \quad (10)$$

onde n_m^* é o tempo em que todos os sítios da rede já atingiram a memória permanente e h é o número de configurações da matriz I . Por exemplo, na matriz de conexão $I(9)$ temos uma configuração ($h=1$) de quatro conexões distribuídas aleatoriamente, que correspondem aos elementos $I_{19} = I_{91} = 1$, $I_{27} = I_{72} = 1$, $I_{35} = I_{53} = 1$ e $I_{48} = I_{84} = 1$. Para o cálculo do tempo médio (10) consideramos $h=50$, ou seja, 50 maneiras diferentes de distribuições dos elementos iguais a 1 na matriz I .

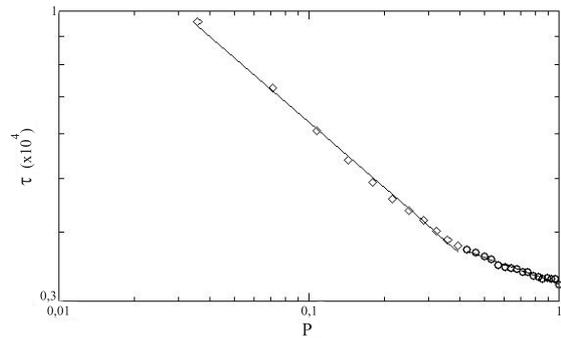


Figura 5 - τ versus P , com $N=10$, $A_n=10$, $f(x)=x$, $K=0,01$ e $h=50$. Para $P=0$ o acoplamento é local e $P=1$ temos o acoplamento global.

Analisando a dependência do tempo médio τ para que a rede atinja a memória permanente, com a probabilidade P que isto ocorra, fixamos a intensidade dos pulsos em $A_n=10$ e o tamanho da rede em $N=10$ e verificamos que tal dependência ocorre em forma de uma lei de potência

$$\tau = \beta P^\gamma \quad (11)$$

na Figura (5) para $P(0 \text{ a } 0,4)$, quadrados, temos $\gamma = -0,39132$, $\beta = 2558,4$ e coeficiente de correlação igual a $-0,9986151$ e para $P(0,4 \text{ a } 1)$, na Figura (5), círculos, temos $\gamma = -0,1564538$, $\beta = 3227,2$ e coeficiente de correlação igual a $-0,9842179$.

Na Figura (6) vemos que a medida que aumentamos o valor da constante de acoplamento da mola K o valor do coeficiente angular permanece aproximadamente constante. A constante da mola influencia o tempo para atingir a memória permanente, conforme pode ser visto na Figura (4), mas não influencia no coeficiente angular do tempo médio (τ) em função da probabilidade (P).

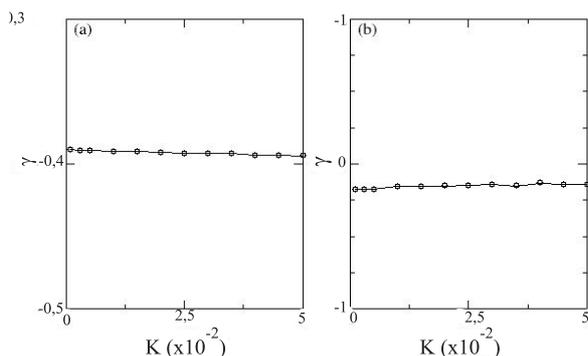


Figura 6 - γ versus K , com $N = 10$, $f(x) = x$, $A_n = 10$ e $h = 50$. (a) $P(0 \text{ a } 0,4)$ e (b) $P(0,4 \text{ a } 1)$.

Conclusões

Consideramos uma rede de mapas acoplados para estudar a formação de padrões de memórias em um sistema dinâmico espaço-temporal com muitos graus de liberdade. O sistema, uma simples equação de difusão discretizada, armazena memórias após um tempo transiente (BATISTA, 2001). Esta possibilidade foi explorada por Coppersmith e colaboradores (1997) para explicar o experimento de uma onda de densidade de carga (ODC) em amostras de NbSe_3 , onde a memória é manifestada como a sincronização da resposta a pulsos elétricos periódicos. Esse sistema é semelhante a uma rede de partículas acopladas com seus primeiros vizinhos através de molas elásticas que estão sujeitas a um forçamento periódico. Em resposta a este forçamento, o sistema apresenta uma dinâmica de formação de memórias de curta duração e evolui para padrões de memórias permanentes. O sistema é de-deterministicamente forçado para um ponto fixo (memória permanente). Uma vez que este ponto fixo é atingido, perde-se toda a informação das memórias transientes.

Para o mapa linear $f(x) = x$ no acoplamento (2) verificamos a formação de memórias ou padrões. Considerando uma seqüência periódica de pulso de amplitude A_n , observamos que o tempo transiente para a obtenção da memória permanente do sistema, depende de certos parâmetros do sistema. O tamanho do sistema influencia no tempo transiente, pois quanto maior o número de partículas do sistema o tempo necessário para a obtenção do padrão final das memórias aumenta. O tempo transiente aumenta para os sítios

que estão mais distantes do início da rede. O tempo necessário para o sítio obter o padrão final da memória aumenta com um polinômio de quarta ordem em relação ao início da rede. O tempo transiente para a obtenção das memórias é inversamente proporcional a constante de acoplamento K (constante da mola). Então para uma otimização no tempo da armazenagem de tais memórias devemos usar uma rede de intensidade de pulso baixa, tamanho pequeno e um parâmetro de acoplamento alto. Uma forma de alterarmos os padrões das memórias é aumentar o forçamento externo exercido sobre o sistema e inserir um termo não-linear que descreve o mapa de cada sítio.

Na seqüência estudamos a formação de memórias em uma rede de mapas acoplados com conexões locais e não locais. Considerando o mapa linear $f(x) = x$, verificamos que o tempo médio para que a rede atinja a memória permanente segue uma lei de potência com a probabilidade P . Ocorre uma variação na declividade a partir de $P = 0,4$ e esta declividade não apresenta dependência com o parâmetro de acoplamento.

REFERÊNCIAS

- HOPFIELD, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. **Proceedings of National Academy of Science**, USA, v. 79, p. 2554-2558, 1982.
- WATTS, D. J. **Small Worlds: the dynamics of networks between order and randomness**, Princeton Studies in Complexity. New Jersey: Princeton University Press, 1999.
- KANEKO, K. **Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems**. Singapore: World Scientific, 1983. 222 p. Ph. D. Thesis.
- CRUTCHFIELD, J. P.; KANEKO, K. **Phenomenology of spatiotemporal chaos**. in: Directions in chaos, 1. ed. Singapore: Hao Bai-lin World Scientific, v. 1, 1987.
- KANEKO, K. **Theory and application of coupled map lattices**. Wiley: Chichester; 1993.
- COPPERSMITH, S. N.; JONES, T. C.; KADANO, L. P.; LEVINE, A.; MCCARTEN, J. P.; NAGEL, S. R., VENKATARAMANI, S. C.; WU, X. **Self-organized short-time memories**, Physical Review Letters, v. 78, n. 21, p. 3983-3986, 1997.
- COPPERSMITH, S. N.; LITTLEWOOD, P. B. **Pulse-duration memory effect and deformable charge-density waves**, Physical Review B, v. 36, n. 1, p. 311-317, 1987.

8. ERDÖS, P.; RÉNYI, A. **On random graphs I**. Publ. Math. Debrecen 6, p. 290-297, 1959.
9. BUCHANAN, M. **Nexus: small worlds and the groundbreaking theory of networks**. New York: W. W. Norton e Company, 2002.
10. BARABÁSI, A. L. **Linked: how everything is connected to everything else and what it means for business, science and everyday life**. Cambridge: Plume, 2003.
11. CARLSON, J. M.; LANGER, J. S. **Properties of earthquakes generated by fault dynamics**, Physical Review Letters, v. 62, n. 22, p. 2632-2635, 1989.
12. HERZ, A. V. M.; HOPFIELD, J. J. **Earthquake cycles and neural reverberations: Collective oscillations in systems with pulse-coupled threshold elements**, Physical Review Letters, v. 7, n. 6, p. 1222-1225, 1995.
13. BATISTA, A. M.; VIANA, R. L.; LOPES, S. R. **Multiple short-time memories in coupled weakly nonlinear map lattices**, Physical Review E, v. 61, n. 5, p. 5990-5993, 2000.
14. PONTES, J. A. C.; BATISTA, A. M., VIANA, R. L.; LOPES, S. R. **Short-term memories with a stochastic perturbation**, Chaos, Solitons and Fractals, v. 23, p. 1689-1694, 2005.
15. BATISTA, A. M. **Memórias, espectro de Lyapunov e sincronização de sistemas acoplados**. Curitiba, 2001, Tese de Doutorado, UFPR.