ISSN Eletrônico: 1984-0187
ISSN Impresso: 1518-5648

https://doi.org/10.5212/OlharProfr.v.24.16896.068

Ensino e aprendizagem de cálculo: explorando os três mundos da Matemática

Teaching and learning of calculus: exploring the three worlds of Mathematics

Enseñanza y aprendizaje del cálculo: explorando los tres mundos de las Matemáticas

Rafael Winícius da Silva Bueno[1]

https://orcid.org/0000-0002-9573-8053

Lori Viali[2]

https://orcid.org/0000-0001-9944-3845

Resumo: Este artigo traz uma pesquisa teórica, de cunho qualitativo, caracterizada como um estudo bibliográfico, realizada com o objetivo de descrever a teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall, e conectá-la com aspectos relevantes para o ensino e a aprendizagem de Cálculo. Nesse sentido, foi construído um panorama geral sobre os mundos Conceitual Corporificado, Operacional Simbólico e Formal Axiomático e foram trazidas ideias inerentes à teoria e voltadas para o estudo de conceitos desse campo do conhecimento. Percebeu-se, em oposição aos usuais processos mecânicos e repetitivos usados para o cálculo de limites, derivadas e integrais, que uma abordagem pedagógica alternativa pode ser construída. Dessa forma, sugere-se introduzir o estudo do Cálculo a partir de já-encontrados da geometria, da aritmética e da álgebra, que pertencem à realidade corpórea e simbólica, vislumbrada nos mundos habitados pelos acadêmicos que ingressam no Ensino Superior.
Palavras-chave: Três mundos da matemática. Educação superior. Cálculo diferencial e integral.

Abstract: This paper brings a theoretical investigation, in a qualitative perspective, understood as a bibliographic study, developed with the objective to describe the Three Worlds of Mathematics theory, proposed by David Tall, and connect it with relevant aspects to the teaching and learning of Calculus. In this sense a general view was built on the Conceptual Embodied, Operational Symbolic and Formal Axiomatic worlds and that are related specifically with this mathematical knowledge field were presented. The results led to the conclusion that in opposition to the mechanical and repetitive process used to calculate limits, derivatives and integrals that an

[1] Doutor em Educação em Ciências e Matemática pela PUCRS. Professor de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha. E-mail: rafael.bueno@iffarroupilha.edu.br

[2] Doutor em Engenharia de Produção pela UFSC. Professor Permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. E-mail: viali@pucrs.br

alternative pedagogical approach can be built. In this regard, a suggestion is made for the introduction of the study of Calculus starting from met-before related to geometry, arithmetic and algebra, that belong to embodied and symbolic reality, perceived in the worlds inhabited by the students that are starting their path at the university.
Keywords: Three worlds of mathematics. Higher education. Calculus.

Resumen: El presente trabajo presenta una investigación teórica cualitativa, caracterizada como un estudio bibliográfico, realizada con el objetivo de describir la teoría de los Tres Mundos de las Matemáticas, propuesta por David Tall, y conectarla con aspectos relevantes para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral. Con esa intención, se construyó una visión general de los mundos Conceptual Corporificado, Operativo Simbólico y Axiomático Formal. A continuación, se plantearon ideas inherentes a la teoría y centradas en el estudio de los conceptos fundamentales de este campo del conocimiento matemático. Se observó, en oposición a los procesos mecánicos e repetitivos, habituales en el cálculo de límites, derivadas e integrales de funciones reales, que se puede construir un enfoque pedagógico alternativo. Por ello, se sugiere introducir el estudio del Cálculo a partir de geometría, aritmética y álgebra, que pertenecen a la realidad corpórea y simbólica, vislumbradas en los mundos habitualmente habitados por estudiantes que ingresan a la educación superior.
Palabras-clave: Tres mundos de las matemáticas. Enseñanza superior. Cálculo.

Introdução

Imergindo no panorama atual de pesquisas que tratam sobre o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral é possível perceber que ainda predominam as práticas pedagógicas consideradas tradicionais (ARTIGUE, 1995; ALMEIDA; FATORI; SOUZA, 2010; BACKENDORF; BASSO, 2018). Dessa forma, segundo D'Ambrósio (1997), costuma-se tratar os alunos como um grupo homogêneo. Como resultado, excluindo-se as felizes exceções, acaba-se tolhendo o desenvolvimento do potencial criativo e intelectual dos estudantes. Ademais, segundo destacam Puhl, Müller e Lima (2020), predominam as estratégias didáticas expositivas, que limitam o envolvimento dos discentes, tornando-os passivos.

Essa situação termina trazendo consequências indesejadas para as disciplinas de Cálculo, que, de acordo com Frant (2016), são consideradas árduas pelos alunos e têm um índice de reprovação considerável. Essa realidade, conforme enfatiza Segadas-Vianna (2016), contribui para uma elevada taxa de evasão acadêmica já nos primeiros semestres dos cursos de ciências exatas.

Percebe-se, portanto, que o Ensino Superior tende a centrar-se em aspectos algébricos e algorítmicos do Cálculo. Assim, em muitos casos, os acadêmicos acabam realizando apenas processos mecânicos e repetitivos, que levam a soluções mesmo que não tenha sido construída compreensão alguma sobre o que foi feito.

Esse cenário predominante acaba desconsiderando o fato de que uma teoria matemática não é criada isoladamente, em um mundo particular, habitado apenas por cientistas. Ao contrário, tanto os conceitos do Cálculo quanto outras descobertas importantes da Matemática emergem, normalmente, da reflexão sobre a realidade corpórea, que leva os estudiosos a observar o meio ambiente, a criar conjecturas, a realizar experimentos e a analisar criticamente os resultados obtidos.

Ignorar essa perspectiva, conforme argumenta Biembengut (2016), acaba levando os estudantes, em muitos casos, a não serem capazes de aplicar a teoria e os algoritmos aprendidos nas suas atividades profissionais futuras. De acordo com Tall (1996), a origem desse problema remonta à falta de compreensão dos docentes -e das instituições de ensino- de que, apesar de a matemática universitária ser uma extensão da escolar, particularmente no que envolve a utilização de métodos numéricos e algébricos ela requer uma evolução. Assim, a partir da reconstrução de ideias já estudadas pelos acadêmicos, desenvolve-se, gradualmente, a compreensão da amplitude e das aplicações de concepções matemáticas mais sofisticadas, que, por fim, também podem levar à construção de novas teorias.

Dessa forma, buscando-se contribuir para o desenvolvimento de subsídios teóricos capazes de colaborar para a evolução do ensino e da aprendizagem do Cálculo, destaca-se a presente pesquisa, de cunho qualitativo, que se concentra na teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall. Nesse contexto, o objetivo dessa investigação é descrever o trabalho de Tall sobre o desenvolvimento cognitivo matemático, conectando-o com importantes aspectos do ensino e da aprendizagem dessa área do conhecimento.

Sendo assim, esse texto está estruturado em cinco seções. A primeira é a introdução, na qual o tema é contextualizado e o objetivo da investigação é apresentado. Na segunda seção, são apresentados os processos desenvolvidos nessa investigação, descrevendo os caminhos percorridos para buscar responder às inquietações que geraram o interesse pelo tema proposto. Na terceira, ideias gerais da teoria dos Três Mundo da Matemática são discutidas. Na quarta parte, procura-se conectar essas ideias iniciais, e outras complementares, com o ensino e a aprendizagem do Cálculo. A quinta e última seção, por sua vez, é utilizada para trazer as considerações finais sobre o estudo realizado.

Metodologia

De acordo com Deslandes (2002), a pesquisa científica transcende o senso comum por meio do método científico, que permite a reconstrução da realidade enquanto objeto de conhecimento, unindo, dialeticamente, o teórico e o empírico. Dessa forma, Severino (2007, p. 102) acrescenta:

> A ciência utiliza-se de um método que lhe é próprio, o método científico, elemento fundamental do processo do conhecimento realizado pela ciência para diferenciá-la não só do senso comum, mas também das demais modalidades de expressão da subjetividade humana, como a filosofia, a arte [...].

Conforme argumenta Minayo (2002, p. 16), entende-se por metodologia "o caminho do pensamento e a prática exercida na abordagem da realidade". De acordo com a socióloga, a metodologia também inclui as concepções teóricas de abordagem, o conjunto de técnicas que viabilizam a construção da realidade e o potencial criativo do pesquisador.

A partir dessa concepção de metodologia, e do objetivo dessa pesquisa, descrito anteriormente nesse texto, escolheu-se para o percurso dessa investigação a abordagem qualitativa, a qual, de acordo com o que argumenta Borba (2004), caracteriza a preferência por procedimentos descritivos, tendo em vista que a interpretação trazida admite, de forma explícita, uma interferência subjetiva, entendendo o conhecimento como uma compreensão contingente, negociada, e não como uma verdade absoluta. Nesse sentido, Minayo (2002) afirma que a pesquisa qualitativa trabalha com um universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que leva a um conjunto mais profundo de relações construídas entre os processos e os fenômenos, o qual não é perceptível nem captável quantitativamente, por equações, médias e outros recursos estatísticos. No que diz respeito à normatização em uma investigação de cunho qualitativo, Garnica (2001, p. 42) ressalta que esse viés se constitui em:

> [...] um meio fluido, vibrante, vivo e, portanto, impossível de prender-se por parâmetros fixos, similares à legislação, às normas, às ações formalmente pré-fixadas. Em abordagens qualitativas de pesquisa, não há modelos fixos, não há normatização absoluta, não há a segurança estática dos tratamentos numéricos, do suporte rigidamente exato.

Dessa forma, Minayo (2002) destaca que nada substitui a criatividade do pesquisador e que a supervalorização de técnicas pode resultar em um formalismo árido ou em respostas estereotipadas. Ressalta, contudo, que o completo desprezo pelos métodos acaba levando a um empirismo raso, que pode ser ilusório em suas conclusões, ou a especulações.

Nesse contexto, essa pesquisa se caracteriza como um estudo bibliográfico sobre a teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall, e sobre suas conexões com aspectos relevantes para o ensino e a aprendizagem do Cálculo. Esse processo, em conformidade com o que apontam Fiorentini e Lorenzato (2012), foi realizado a partir de análises e revisões de estudos e teve como material de trabalho referenciais publicados em documentos escritos, como livros, artigos científicos e anais de eventos, entre outros.

Destaca-se que o ponto de partida para esse estudo bibliográfico foram as inúmeras referências encontradas no *website*[3] do idealizador da teoria dos Três Mundos da Matemática, David Tall. A partir dessa fonte inicial, inúmeras leituras foram realizadas e, como é usual, cada texto estudado acabou levando a outros trabalhos, que, com suas ideias, sustentam e complementam as posições defendidas nessa teoria.

[3] http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/

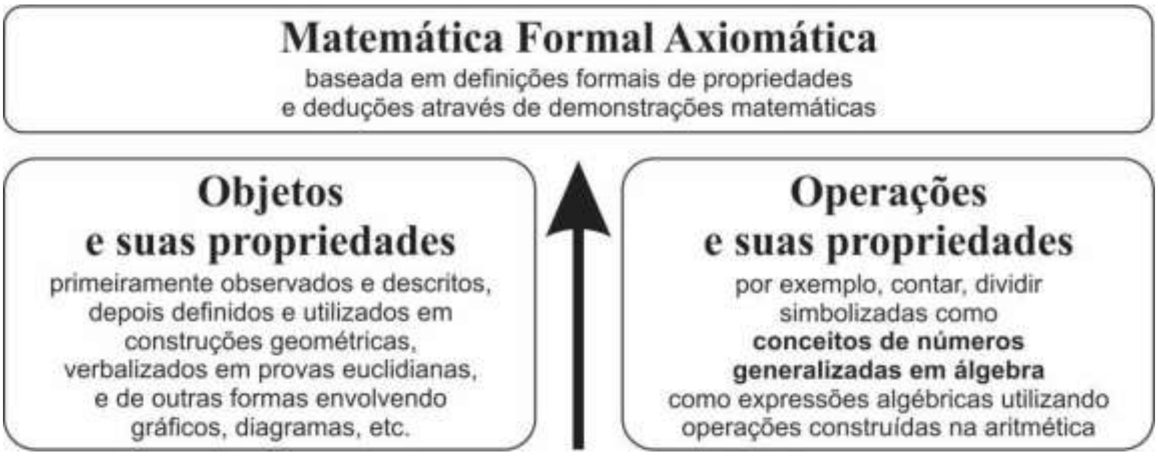
Assim, apesar de a linha de largada ser bem definida, o caminho percorrido foi traçado a partir da percepção pessoal dos pesquisadores sobre as teorias desenvolvidas por David Tall e seus colegas. Por essa razão, ideias anteriores aos Três Mundos da Matemática também são destacadas nesse estudo, pois são consideradas importantes (ou mesmo fundamentais) para a construção de um arcabouço teórico capaz de sustentar uma compreensão da densa teoria analisada e, ainda, conectá-la a contextos de ensino e de aprendizagem do Cálculo.

Os Três Mundos da Matemática

O professor britânico David Tall dedicou a sua carreira ao estudo da evolução do pensamento matemático. Em suas pesquisas, constatou que o que acontece em cada estágio de aprendizagem é afetado significativamente por experiências prévias e tem um efeito importante no desenvolvimento de estágios posteriores. Nesse sentido, acredita que não é suficiente focar apenas em um estágio particular de ensino e aprendizagem, uma vez que os alunos desse estágio estarão sob o efeito do que já encontraram e o que aprendem em determinado momento irá afetar seus futuros estudos.

Dessa forma, em 2013, David Tall teve seu trabalho coroado com a publicação da obra clássica *How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics*[4] . A Figura 1, traz à luz, segundo Tall (2013), três formas diferentes de conhecimento dessa ciência: a inicial, envolvendo o estudo de objetos e suas propriedades; a segunda, que começa com a aritmética e evoluiu até a álgebra e seu simbolismo cada vez mais complexo; e a terceira, que se origina do estudo acadêmico avançado da matemática pura e, portanto, formal.

Figura 1 - Esquema inicial para as três formas de conhecimento em Matemática.



Fonte: Tall, 2013.

[4] Como os humanos aprendem a pensar matematicamente: explorando os três mundos da Matemática.

Desse modo, Tall (2013) propôs a sua construção teórica inovadora. Assim, foram introduzidas as suas criações conceituais sobre o desenvolvimento cognitivo matemático, as quais se fundamentam em três mundos: Conceitual Corporificado; Operacional Simbólico; e Formal Axiomático.

De acordo com Tall (2004), o Mundo Conceitual Corporificado é construído a partir das percepções e interações que acontecem no mundo real e se desenvolvem, gradualmente, até a criação de imagens mentais cada vez mais sofisticadas. A ideia de corporificação refere-se, portanto, segundo Lima (2007), à observação, descrição, ação e reflexão sobre experiências que contemplam, em uma fase inicial, apenas os objetos físicos, mas que acabam incorporando complexidades cada vez maiores até o desenvolvimento de experiências estritamente mentais.

O Mundo Operacional Simbólico, por sua vez, desenvolve-se a partir de ações físicas que se tornam procedimentos matemáticos traduzidos pela utilização dos símbolos em aritmética, álgebra e no Cálculo, por exemplo. Sua gênese remonta às ações que se desenvolvem até se tornarem processos matemáticos que podem ser trocados, inclusive, por conceitos sobre os quais se debruçam pensamentos mais abstratos (BUENO; VIALI, 2019).

O Mundo Formal Axiomático traduz-se na construção de conhecimentos matemáticos de forma lógica, a partir de definições, axiomas e deduções formais, fazendo com que as propriedades matemáticas sejam deduzidas, exclusivamente, pelo desenvolvimento de demonstrações rígidas. Sendo assim, nesse mundo não são utilizados apenas objetos perceptíveis, mas, sobretudo, experiências mentais cada vez mais abstratas que culminam com a criação de estruturas matemáticas sofisticadas, como os conceitos de anéis, corpos e grupos, por exemplo (TALL, 2013).

De acordo com Lima e Tall (2008), cada mundo cresce em complexidade à medida que a incursão matemática de um indivíduo evolui, o que gera diferentes caminhos no desenvolvimento do pensamento matemático dos seres humanos. Durante essa jornada, os acadêmicos se deparam com diversos problemas que requerem ideias prévias (escolares ou não) para sua resolução. Essas ideias prévias são denominadas por Tall (2013) já-encontrados[5] e são definidas pelo autor como estruturas cognitivas resultantes de experiências anteriores.

Algumas dessas ideias prévias levam a um progresso crescente de sofisticação. Outras levam a um caminho alternativo que pode acarretar, inclusive, concepções errôneas. Quando um aluno estuda limites, por exemplo, ele aprende que, se existem $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$, sendo a um número real, então:

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$$

[5] Em inglês *met-before*.

Esse já-encontrado, que é verdadeiro para o estudo de limites de funções reais, se for relembrado isolado das suas causas e condições, pode ser problemático para o aprendizado no contexto do conceito de integral de um produto de funções reais, por exemplo, pois pode levar o estudante a imaginar, equivocadamente, que:

$$\int [f(x) \cdot g(x)]\, dx = \left[\int f(x) dx\right] \cdot \left[\int g(x)\, dx\right]$$

Os obstáculos originados de já-encontrados não são, portanto, resultado de falta de conhecimento. Pelo contrário, são conhecimentos antigos, sedimentados pelo tempo, e que resistem à construção de novas ideias que ameacem a estabilidade intelectual de quem os detém. Sendo assim, conforme argumenta D'Amore (2005, p. 104):

> Obstáculo é uma ideia que, no momento da formação do conceito, foi eficaz para enfrentar os problemas (mesmo que apenas cognitivos) precedentes, mas que se revela ineficaz quando se tenta aplicá-la a um problema novo. Dado o sucesso obtido (aliás, principalmente devido a ele) tende-se a conservar a ideia já adquirida e comprovada e, apesar da falência, busca-se salvá-la: esse fato, porém, termina por ser uma barreira para as aprendizagens sucessivas.

A compreensão do que caracteriza um obstáculo é fundamental para o desenvolvimento do estudo de como os humanos aprendem a pensar matematicamente. Na construção de novas teorias e conceitos, como os do Cálculo, por exemplo, muitos matemáticos contribuíram, ao longo dos séculos, para uma evolução, não linear e sem ordem predefinida, que ultrapassou várias barreiras cognitivas até chegar à forma com a qual o conhecimento é apresentado atualmente.

Nesse sentido, ao se confrontar com um conceito inovador, os indivíduos catalisam uma revolução interna de ideias e, nesse processo, conflitos que desafiam percepções anteriores e consolidadas podem emergir. Concordando com essa visão, Pais (2006) afirma, então, que "a cognição não flui com a mesma linearidade com que o texto científico" é publicado e, consequentemente, apresentado aos estudantes. Ademais, Tall (2013, p. 403) ressalta que "professores deveriam estar cientes dos aspectos positivos e problemáticos que os estudantes enfrentam enquanto buscam construir sentido sobre a Matemática".

Os Três Mundos da Matemática e o Cálculo

O desenvolvimento do Cálculo possibilitou que o ser humano calculasse como as coisas variam (diferenciação), como elas se constroem (integração), estabelecesse a relação entre essas duas questões (Teorema Fundamental do Cálculo) e construísse inúmeros modelos, buscando explicar a realidade observada utilizando, por exemplo, equações diferenciais. Segundo Tall (2013), essas ideias podem ser corporificadas visualmente e dinamicamente como a inclinação da reta tangente a uma curva em um determinado ponto, no caso da derivada, e como a área sob uma curva, ao fazer referência à integral.

Nesse contexto, os trabalhos de Isaac Newton[6] (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz[7] (1646 – 1716) trouxeram uma nova realidade para esse campo do conhecimento, a partir da construção de métodos algorítmicos para o cálculo de taxas de variação instantânea e áreas. Com as contribuições desses pensadores, o Cálculo passou a ser visto tanto no mundo físico real, fonte das percepções humanas de variação e crescimento, quanto no Mundo Operacional Simbólico, no qual ocorrem as resoluções de situações-problema envolvendo manipulações algébricas e aplicações de técnicas para encontrar derivadas e integrais de funções reais (TALL, 2003).

Contudo, de acordo com Tall (2013), o Cálculo foi o foco de grandes debates através dos séculos, desde as ideias iniciais trazidas por Arquimedes de Siracusa (c. 280 a.C.), na Grécia Antiga, passando pelas inovações de Newton e Leibniz, no século XVII, e chegando até os pensadores do século XIX. Essas discussões decorreram, principalmente, pelo fato de essa área do conhecimento tratar de quantidades arbitrariamente pequenas e de processos potencialmente infinitos.

Esses debates foram resolvidos, então, com o trabalho de Karl Weirstrass[8] (1815 – 1897), que formalizou definições por meio de épsilons e deltas, o que levou à eliminação das incertezas ainda existentes nessa área. Nesse contexto, de acordo com Edwards (1979), Weirstrass formulou uma definição puramente aritmética do conceito de limite, substituindo a descrição dinâmica por uma totalmente estática, sem mencionar a ideia de movimento ou mesmo questões geométricas. Dessa forma, Weirstrass escreveu que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Essa abordagem possibilitou que os matemáticos construíssem, enfim, a teoria moderna da Análise Matemática, a qual, apesar de ter resolvido discussões formais importantes, é, frequentemente, fonte de dificuldades para os estudantes no seu primeiro encontro com o Cálculo na graduação. Nesse contexto, Tall e Mejía-Ramos (2004) afirmam que essas dificuldades se apresentam, pois, enquanto o

---

[6] Matemático inglês e professor da Universidade de Cambridge. Foi o primeiro homem a conceber um procedimento geral para determinar variações instantâneas e, então, invertê-lo para o cálculo de áreas, passando a usar em suas pesquisas o que atualmente é denominado Teorema Fundamental do Cálculo.

[7] Advogado e matemático alemão responsável pela obra *Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais*, de 1684, que foi, conforme destaca Bardi (2008), a primeira publicação sobre o Cálculo a ser divulgada em qualquer parte do planeta.

[8] Matemático alemão e professor da Universidade de Berlim. De acordo com Boyer (1959), o simbolismo puro de Weirstrass foi responsável por erradicar do Cálculo a noção controversa de um valor infinitesimal fixo.

matemático vê o Cálculo pelas lentes das provas formais, os alunos têm seu conhecimento matemático estruturado nos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico. Essa questão leva a um problema importante, pois acaba sendo criado um hiato cognitivo considerável entre os mundos habitados pelos estudantes e o mundo mais sofisticado e formal, da Análise Matemática, habitado pelo matemático profissional.

Usualmente, o professor de Cálculo, que obviamente tem solidificados os conceitos de limite, derivada e integral, vê a disciplina como uma construção lógica, feita a partir da definição de limite, que é um dos seus já-encontrados. Portanto, suas aulas são conduzidas a partir de uma definição desse conceito.

No entanto, esse pensamento parece desconsiderar a visão do estudante, que, conforme ressalta Tall (2008), provavelmente se sentiria mais confortável se o conhecimento fosse desenvolvido a partir de uma abordagem corporificada da derivada, por exemplo, por meio da visualização da inclinação da reta tangente a uma curva representada no plano cartesiano, antes de serem introduzidas as técnicas simbólicas de cálculos e a linguagem formal do limite. Tall (2013) destaca, portanto, que a rota mais natural para os alunos atingirem seu potencial cognitivo se encontra, provavelmente, em uma abordagem pedagógica que faça uso de uma combinação dos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico.

De acordo com Tall e Mejía-Ramos (2004), os estudantes que estão iniciando sua jornada de aprendizado do Cálculo têm muitas experiências anteriores que fundamentam suas concepções matemáticas. Inicialmente, quando abordam a aritmética, são introduzidos a situações nas quais os símbolos representam um processo, que faz deles uma operação, que leva sempre a uma resposta. Em contrapartida, no estudo da álgebra, um símbolo pode se tornar unicamente potencial, como em $57x + 32$ onde $+$ representa uma operação que não pode ser resolvida enquanto o valor de x não for conhecido. Essa questão, conforme aponta Tall (2013), causa problemas no estudo da álgebra, que é muito importante para o desenvolvimento do Cálculo, pois alguns alunos acabam criando, até mesmo, aversão à manipulação de símbolos que não geram uma resposta numérica única.

Referindo-se a essa situação, que trata do caráter simbólico dualístico existente na Matemática, Tall e Gray (1991) propuseram a noção de proceito, definindo-o como o amálgama entre processo e conceito, no qual o processo e o seu produto acabam sendo representados pelos mesmos símbolos. Tall (2004) afirma que a noção de proceito se constrói, inicialmente, a partir de ações no Mundo Conceitual Corporificado e torna-se mais sofisticada com a introdução de atividades simbólicas na aritmética, aumentando sua complexidade com a introdução de conceitos de números mais evoluídos (frações, números racionais, números irracionais, números complexos, etc.) que permitem o cálculo e a manipulação de símbolos com grande eficácia e precisão. Essa evolução continua com a generalização da aritmética até a chegada da álgebra, por meio da manipulação de símbolos para, inicialmente, resolver equações, e, posteriormente, chegar até a construção de conceitos mais gerais, como aqueles utilizados na parte algébrica do Cálculo, por exemplo.

Segundo afirma Tall (2004), esse contexto sugere que muitos conceitos simbólicos são desenvolvidos gradualmente para a representação de corporificações, a fim de evoluírem cada vez mais, até chegarem a simbolismos mais sofisticados. Entretanto, há muitas ocasiões em que alguns indivíduos não conseguem interpretar o que, de fato, significam os processos realizados, de forma que os acabam levando adiante em uma rotina baseada apenas em repetição mecânica, o que caracteriza uma visão do processo, unicamente, sem um desenvolvimento conceitual capaz de levar à habilidade proceitual.

Foi o que aconteceu, por exemplo, com Girolamo Cardano[9] (1501 - 1576) e Nicoló Fontana[10] (1500 - 1557), mais conhecido por Tartaglia[11], que, de acordo com Garbi (1997), entraram em choque em uma disputa pela autoria do método de resolução de equações de terceiro grau. No seu método de resolução, os dois matemáticos efetivaram cálculos que levavam a raízes quadradas de números negativos, as quais acabavam, eventualmente, sendo anuladas, resultando em uma solução aceitável para a época.

Os números resultantes dessas raízes quadradas de números negativos não faziam qualquer sentido naquele momento histórico e eram desvinculados de qualquer representação geométrica corporificada. Atualmente, entretanto, eles são representados pelos números complexos, que são corporificados com pontos no plano de Argand-Gauss. Esse episódio, conforme destaca Tall (2004), mostra que, em algumas ocasiões, a utilização de manipulação simbólica pode se desenvolver até levar, novamente, a uma conceituação corporificada significativa.

Segundo afirmam Tall e Gray (1991), essa ambivalência da notação matemática, caracterizada como proceito, se bem compreendida, traduz-se em uma flexibilidade de pensamento que permite ao estudante se movimentar entre o processo de resolver uma expressão e o conceito de manipulá-la mentalmente como parte de uma construção mais ampla. Essa capacidade é tão importante, que pode ser considerada como o alicerce sobre o qual se sustenta o sucesso do pensamento matemático.

[9] Nascido em Pavia, na Itália, além de trabalhos sobre Matemática, envolvendo principalmente equações algébricas, escreveu sobre medicina, física, filosofia e música.

[10] Matemático italiano nascido na Brescia.

[11] Apelido, que quer dizer gago, recebido devido a um defeito de fala originado por uma profunda cicatriz na boca, que foi resultado de um ataque das tropas francesas à Brescia, em 1512.

Nesse sentido, no estudo de métodos de integração, por exemplo, normalmente abordados em disciplinas iniciais de Cálculo, os alunos deparam-se com situações em que o símbolo $\int$ não designa um processo a ser realizado, mas unicamente o conceito de integral. Sendo assim, na integração por partes é comum a resolução de problemas, como o ilustrado a seguir, em que, em determinado momento, a integral não precisa ser calculada, mas apenas manipulada, caracterizando, assim, a compreensão do que Tall e Gray (1991) denominam proceito.

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x sen(x) - \int e^x sen(x) dx$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x sen(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

Assim, após os cálculos iniciais anteriores, percebe-se, na transição seguinte, que a integral que surgiu no segundo membro da equação não precisa mais ser resolvida (calculada). Basta, portanto, que seja manipulada como um conceito. Dessa forma, somando-se, em ambos os membros da equação, $\int e^x \cos(x)\, dx$, obtém-se:

$$2\int e^x \cos(x)\, dx = e^x sen(x) + e^x \cos(x)$$

Sendo assim, encontra-se a solução da integral inicial, que é dada por:

$$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^x}{2}[sen(x) + \cos(x)] + C$$

Tall e Mejía-Ramos (2004) afirmam que há problemas ainda maiores no estudo do Cálculo. Essa situação se acentua pelo fato de o conceito de limite, normalmente o primeiro a ser abordado no estudo da disciplina, ser potencialmente infinito. Tall (2003) ressalta que muitos estudantes acreditam que o limite de uma função é algo que pode continuar indefinidamente, sem que possa ser calculado nem determinado por um valor específico. Essa questão leva a uma grande quantidade de equívocos conceituais, como a crença de que o limite é algo que nunca pode ser alcançado ou ultrapassado, por exemplo.

Entretanto, quando os estudantes são apresentados às regras de diferenciação, eles encontram novamente a segurança de procedimentos que levam a uma resposta. Essa é uma característica que indica o porquê de os acadêmicos terem dificuldades na compreensão do conceito de limite e, mesmo assim, acreditarem que são capazes de entender o Cálculo. Essa confiança baseia-se na expectativa desses estudantes, construída durante sua trajetória escolar, de receber a indicação do que fazer e como fazer para, depois, serem testados apenas na sua capacidade de repetir trais procedimentos. Dessa forma, Backendorf e Basso (2018, p. 3) argumentam:

> Essa inversão na construção do conhecimento matemático causa dificuldades, tornando o aprendizado mais angustiante. São perceptíveis os obstáculos que se apresentam quando um conceito novo está para ser construído, e, principalmente, quando entra na operação um objeto desconhecido. Com isso, as construções mentais não correm tão naturalmente, o que gera desconforto e consequentemente incompreensão, tornando a trajetória dos aprendizes do Cálculo repleta de impasses. E, quando não ocorre a assimilação de conceitos, em muitos casos, o estudante opta por processos rápidos e algoritmos mecânicos.

Tall e Mejía-Ramos (2004) destacam que outra questão problemática do ensino e da aprendizagem do Cálculo é a prática de tentar introduzir conceitos de uma esfera "superior" à dos alunos - habitada pelos matemáticos – por meio de definições e provas formais. Essa situação leva os estudantes a enfrentar concepções que requerem grandes reconsiderações de suas crenças, que foram construídas a partir de experiências que podem não ser consistentes com as definições que são propostas.

Nesse contexto, Tall e Vinner (1981), no seu clássico artigo *Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity*[12], cunharam o termo conceito imagem para descrever a ampla estrutura cognitiva associada a um conceito, a qual inclui imagens mentais e propriedades e processos associados. Segundo os autores, o conceito imagem é constantemente (re)construído, ao longo do tempo, sofrendo vários tipos de influências e mudando à medida que o estudante se depara com novas situações enriquecedoras e se desenvolve. Pode-se afirmar, portanto, que o conceito imagem é caracterizado pelo que é acionado na memória de um indivíduo quando ele se depara com uma referência a determinado conceito.

Do mesmo modo, foi trazido à luz por Tall e Vinner (1981) o termo conceito definição, que se traduz na forma como as palavras são utilizadas para especificar um conceito. Pode, inclusive, ser uma reconstrução pessoal da definição de determinado conceito, sendo, nesse caso, uma combinação de palavras utilizada para evocar o seu conceito imagem. Nesse contexto, os autores afirmam que um conceito definição pessoal pode diferir de um conceito definição formal, sendo esse último o conceito definição aceito pela comunidade matemática.

Ainda de acordo com Tall e Vinner (1981), para que um conceito seja construído por um indivíduo, é fundamental que um conceito imagem do mesmo seja formado, pois a mera memorização do conceito definição, seja ele pessoal ou formal, não implica na sua compreensão. Em contrapartida, a ausência da memorização de um conceito definição não impede que esse conceito acabe se desenvolvendo por experiência, sem a necessidade de recorrer a sua definição formal.

Essas questões sugerem que uma abordagem pedagógica de conceitos matemáticos, como limite, derivada e integral, não deve focar apenas em definições formais precisas e axiomáticas. Deve,

[12] Conceito Imagem e Conceito Definição em Matemática com Referência Especial aos Conceitos de Limite e Continuidade.

imperativamente, também buscar construir situações capazes de promover a interação dos estudantes com uma ampla gama de ideias relacionadas a esses conceitos, possibilitando, assim, que cada acadêmico construa o seu conceito imagem sobre o conteúdo abordado.

Giraldo (2004) destaca que a utilização de definições formais pode se configurar, inclusive, em obstáculo para os alunos em estágios tenros de aprendizagem do Cálculo. Segundo o autor, um obstáculo inicial se configura na utilização da própria linguagem, pois as definições matemáticas são feitas a partir de palavras que têm certo significado na linguagem natural, mas que devem ser abstraídas desses significados para que a compreensão dessas definições seja construída.

A palavra limite, por exemplo, é comumente entendida como uma fronteira que não pode ser alcançada. Já a noção de tangente é comumente assumida como um já-encontrado pelos professores, no início do estudo do Cálculo, e, então, utilizada livremente para se introduzir o estudo da derivada. Entretanto, Tall (2010) destaca que a noção de reta tangente, construída no contexto da geometria euclidiana, conforme ilustrado na Figura 2, leva à ideia intuitiva de que essa reta "encosta" na curva em apenas um ponto e, de forma alguma, a intercepta. Essas concepções e significados, construídos a partir de experiências prévias, nem sempre contribuem para o entendimento de novos conceitos no contexto das definições necessárias para o estudo do Cálculo.

Figura 2 – Afinal, o que é uma tangente?

Fonte: Adaptado de Tall, 2010.

Nesse sentido, Tall e Mejía-Ramos (2004) afirmam que, para poder evoluir na forma como se trabalha com o ensino e a aprendizagem de Cálculo, permitindo que essa área do conhecimento matemático faça sentido para os discentes, é necessária uma compreensão não só de como os conceitos como são comumente discutidos pela comunidade matemática, mas, sobretudo, uma compreensão de como esses conceitos são construídos pelos acadêmicos no desenvolvimento do seu conhecimento pessoal. Portanto, apesar de os matemáticos terem seus já-encontrados baseados no conceito de limite, os alunos, que não têm experiência alguma com o Mundo Formal Axiomático, podem se beneficiar de uma introdução ao Cálculo a partir de ideias provenientes dos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico.

Segundo Tall e Mejía-Ramos (2004), uma questão que ainda precisa de atenção é a que se refere ao papel da demonstração no estudo do Cálculo, em detrimento da busca de construção de significado a partir do ponto de vista dos alunos. Esse fato sugere que a necessidade de uma pequena minoria, que progredirá para a disciplina de Análise Matemática, por exemplo, se sobrepõe à necessidade da maioria, que utilizará as ideias do Cálculo para construir experimentos mentais a fim de resolver problemas reais por meio do cálculo, da manipulação simbólica e da criação de modelos.

A área abaixo de um gráfico, por exemplo, pode ser notada analisando-se uma figura no mundo corporificado. Nesse sentido, Tall e Mejía-Ramos (2004) ratificam que é possível perceber que a área terá um valor numérico, sendo o principal problema, portanto, encontrar esse valor simbolicamente, e não provar a sua existência.

Nesse sentido, demonstrar a existência da área é uma questão do Mundo Formal Axiomático destinada a matemáticos profissionais, engajados em estudos mais complexos e sofisticados, como o da integral de Lebesgue[13], por exemplo. Esse problema não tem significado algum para a vasta maioria dos estudantes de Cálculo, que não prosseguirão para disciplinas de Análise Matemática ou para um mestrado em matemática pura. Nesse contexto, Tall (2008) destaca que o estudo do Cálculo, na graduação, não pertence ao Mundo Formal Axiomático, que o olha de cima, mas pertence à realidade de Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz, que perceberam seus conceitos a partir de já-encontrados construídos nos mundos Conceitual Corporificado, da geometria e dos gráficos, e Operacional Simbólico, da aritmética e da álgebra.

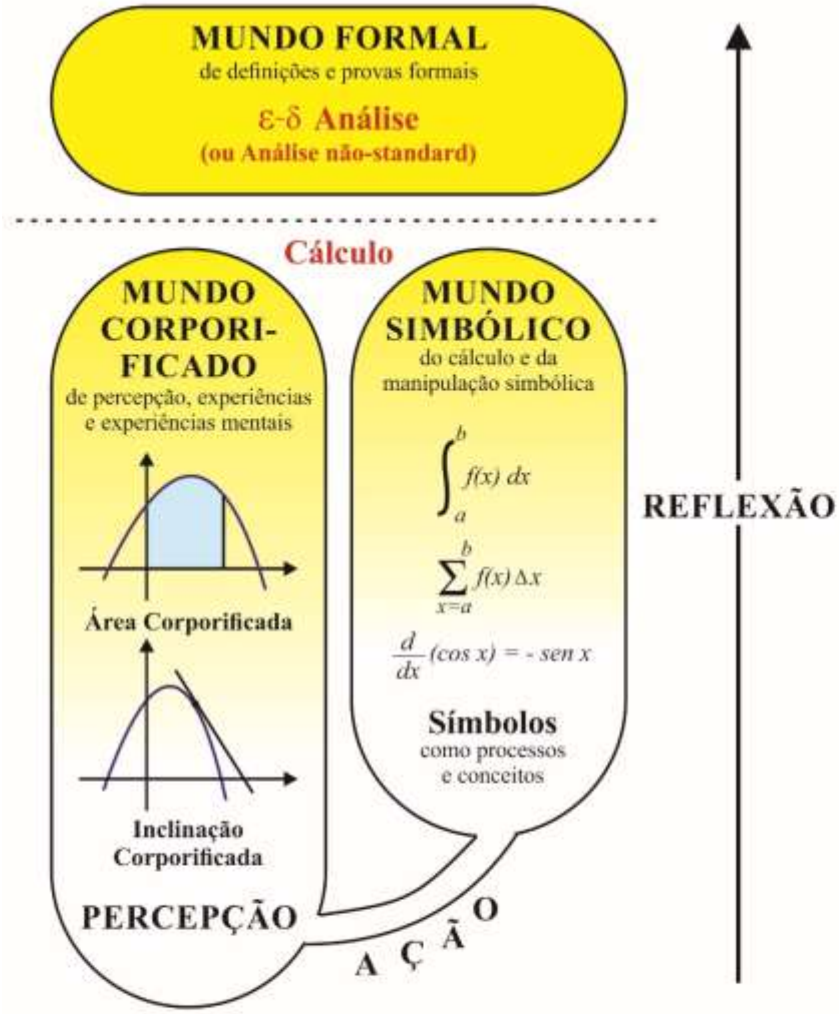
Essa proposta, entretanto, não indica que se deve partir da Matemática do ponto de vista de um profissional e apenas simplificar as suas ideias, formalmente construídas, até que se chegue a uma abordagem meramente intuitiva. Configura-se, em oposição a essa ideia, em construir um ponto de vista a partir da base, desenhado cuidadosamente para alcançar as sutilezas matemáticas a partir da posição em que o estudante se encontra. Para alcançar esse objetivo, é necessária a construção de uma integração entre a Matemática e a percepção que os acadêmicos trazem sobre essa ciência e seus conceitos (TALL, 2010).

Assim, Tall (2003), conforme aponta a Figura 3, defende uma abordagem corporificada na introdução ao estudo do Cálculo, concentrando-se, inicialmente, nas ações e ideias perceptuais fundamentais dos acadêmicos. Nesse contexto, o estudo não começa com perspectivas formais sobre limite, mas com ideias corporificadas, que são traduzidas, por exemplo, por meio de representações gráficas de funções. Essa abordagem, contudo, não deve se ater apenas a aplicações reais, pois, embora

[13] O matemático francês Henri Lebesgue (1875 – 1941) demonstrou que toda função limitada, em um intervalo fechado e passível de ser mensurado, é Lebesgue integrável e propôs, inclusive, uma releitura do Teorema Fundamental do Cálculo, para a integral de Lebesgue.

essas sejam componentes importantes do contexto geral, as concepções matemáticas também devem ser exploradas e construídas, por meio de uma sofisticação gradual que possa levar a generalizações.

Figura 3 – A estrutura conceitual do Cálculo e da Análise Matemática.



Fonte: Adaptado de Tall e Mejía-Ramos, 2004.

A ideia central de uma abordagem corporificada, de acordo com Tall (2003), é construída pela interação com a visão física do gráfico de uma função, sempre enfatizando que as funções envolvem variáveis numéricas. A inclinação do gráfico, em determinado ponto, é um número, a área sob o gráfico é um número e a inclinação da reta tangente e a área, por sua vez, têm gráficos que expressam também quantidades numéricas. Nesse sentido, pode-se, inclusive, construir os gráficos de derivadas e antiderivadas no mesmo plano, se assim for necessário.

Essa questão, entretanto, pode ser complicada se for feita uma introdução ao Cálculo na qual apenas aplicações reais específicas são abordadas, sem que generalizações sejam criadas. Uma situação clássica diz respeito à construção da inclinação da reta tangente ao gráfico baseada, única e exclusivamente, em representações da distância em função do tempo, determinando, portanto, a velocidade ou, por sua vez, da velocidade em função do tempo, determinando a aceleração. Obviamente, esses contextos ilustram muito bem os conceitos estudados, mas, se as atividades pedagógicas se restringirem apenas a esses (ou outros) casos práticos, sem a construção de generalizações matemáticas, a aprendizagem pode ser prejudicada.

Conforme argumenta Tall (2013), trazer à realidade essas ideias sobre o ensino e a aprendizagem de Cálculo não é uma tarefa simples, uma vez que os professores, como todos os seres humanos, são criaturas sociais e tendem a repetir para os seus alunos as concepções e os métodos com os quais conviveram como estudantes. Os conhecimentos construídos pela maioria dos professores foram forjados a partir de grandes conflitos cognitivos originados de um ensino baseado em repetições mecânicas, que foi passado de geração para geração. Dessa forma, conceitos matemáticos continuam a ser ensinados por meio de métodos algorítmicos e passam, então, a ser temidos e evitados.

Assim, como consequência, o propósito das aulas acaba, frequentemente, deixando de ser a potencial compreensão de conceitos para se tornar uma mera memorização de técnicas e procedimentos. Esses processos repetitivos podem até ser úteis em algumas aplicações específicas e, principalmente, para alcançar a aprovação nas tão temidas avaliações, mas não são suficientes, na maior parte dos casos, para compreensões mais amplas sobre o Cálculo e o poder de suas ferramentas matemáticas. Nesse contexto, acredita-se que o sentido do aprendizado do Cálculo pode acabar se perdendo entre fórmulas e procedimentos que devem ser rigidamente seguidos pelos acadêmicos tal como o professor escreve na lousa.

Considerações finais

Em contrassenso com a evolução histórica, lenta e gradual do Cálculo, que se desenvolveu por cerca de dois mil anos até chegar às contribuições de Weirstrass, as aulas contemporâneas dessa área do conhecimento são conduzidas, usualmente, a partir de uma visão vertical que prioriza práticas mecânicas e definições formais. Conforme apontam Brolezzi e Barufi (2007), a condução das aulas dessa disciplina a partir de uma lógica inversa, abordando, nessa ordem, limites, derivadas e, só então, as integrais, remonta aos cursos de Cálculo propostos por Augustin Louis Cauchy[14] (1789 - 1857), na *École Polytechnique*[15], há cerca de 200 anos.

Seguindo esse paradigma tradicional e dominante de ensino, acredita-se, entretanto, que se pode contribuir para criar uma ruptura muito radical e indesejada entre a matemática escolar e o início das construções mais sofisticadas do Cálculo. Sendo assim, pode-se acabar construindo uma barreira cognitiva considerável entre os mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico, habitados pelos acadêmicos que ingressam nas instituições de Ensino Superior, e o Mundo Formal Axiomático, no qual vivem os professores de Cálculo.

Dessa forma, ratificando o que afirmam Tall e Mejía-Ramos (2004) e Tall (2010), entende-se que a introdução ao estudo do Cálculo não deve ser feita a partir da definição de limite, que adentra em um mundo demasiado complexo para os discentes. Argumenta-se, então, que, apesar de o limite ser um já-encontrado típico dos matemáticos e docentes do Ensino Superior, ainda é um conceito muito sofisticado e abstrato para quem nunca realizou uma única incursão sequer ao Mundo Formal Axiomático das definições, teoremas, demonstrações, corolários e lemas.

Nesse contexto, entende-se que o estudo das ideias iniciais do Cálculo deve se fundamentar em uma abordagem mais sensível, baseada nas percepções humanas. Assim, pode-se concentrar a atuação pedagógica, prioritariamente, em já-encontrados característicos dos alunos provenientes das escolas básicas e nas suas experiências sensoriais, que podem contribuir, significativa e gradualmente, para a construção de ideias matemáticas. Nesse contexto de ensino e de aprendizagem, conforme destaca Tall (2010), deve-se trabalhar, então, para o desenvolvimento paralelo de corporificações conceituais e simbolismos proceituais, deixando, a princípio, a noção de limite ainda implícita.

Sendo assim, sugere-se construir uma inversão epistemológica, a partir de um cenário didático no qual seja abordada a realidade corpórea dos discentes, caracterizada, em grande parte, pelas concepções trazidas, no século XVII, por Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Esses pensadores não fizeram uso do conceito de limite para introduzir as derivadas e integrais, mas de ideias provenientes da geometria, aritmética e álgebra, que pertencem aos mundos em que os acadêmicos ainda residem ao ingressar em cursos de ciências exatas nas instituições de Ensino Superior.

[14] Cientista francês que contribuiu para diversas áreas da Matemática, estudando, entre outros assuntos, equações diferenciais, convergência de séries infinitas e probabilidade. É lembrado, também, por sua dedicação intensa à causa do rigor matemático, que, no que diz respeito ao Cálculo Diferencial e Integral, culminou com o desenvolvimento da Análise Matemática.

[15] Escola Politécnica.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; FATORI, L. H.; SOUZA, L. G. S. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando modelagem matemática. **Revista Ciência e Tecnologia**, São Paulo, v.16, n. 10, jan. 2010. Disponível em: http://www.revista.unisal.br/sj/index.php/123/article/view/17 Acesso em: ago. 2020.

ARTIGUE, M. La Enseñanza de los Princípios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M. *et. al*. **Ingeniería Didáctica em Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial IberoAmérica, 1995. p. 97-140.

BACKENDORF, V. R.; BASSO, M. V. A. GeoGebra na Aprendizagem de Conceitos de Matemática Avançada. **Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 16, n. 1, p. 1-10, 2018. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/86026 Acesso em: maio 2020.

BARDI, J. S. **A Guerra do Cálculo**. Rio de Janeiro: Record, 2008.

BIEMBENGUT, M. S. O Cálculo no Contexto da Cultura Acadêmica Francesa. In: FONSECA, L. **Didática do Cálculo:** epistemologia, ensino e aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BORBA, M. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. In: 27ª Reunião Anual da Anped, 2004, Caxambu, MG. **Anais** […] Caxambu: 2004, p. 1-18. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/ Acesso em: jan. 2020.

BOYER, C. B. **The history of the calculus and its conceptual development**. New York: Dover Publications, 1959.

BROLEZZI, A. C.; BARUFI, M C. B. **História da Matemática e o Ensino de Cálculo**: reflexões sobre o pensamento reverso. Guarapuava: SBHMat, 2007.

BUENO, R. W. S.; VIALI, L. O Cálculo e os Três Mundos da Matemática: um estado do conhecimento. **Revista Dynamis**, Blumenau, v. 25, n. 2, p. 40-55, 2019. Disponível em: https://proxy.furb.br/ojs/index.php/dynamis/article/view/7824 Acesso em: jan. 2020.

D'AMORE, B. **Epistemologia e Didática da Matemática**. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

D'AMBRÓSIO, U. **Transdisciplinaridade**. São Paulo: Palas Athenas, 1997.

DESLANDES, S. F. A Construção do Projeto de Pesquisa. In: MINAYO, M. C. S (org.). **Pesquisa Social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2002.

EDWARDS, C. H. **The historical development of calculus**. New York: Springer, 1979.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FRANT, J. B. Prefácio. In: FONSECA, L. (org.). **Didática do Cálculo**: epistemologia, ensino e aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2016. p.6.

GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Makron Books, 1997.

GARNICA, A. V. M. Pesquisa Qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. **Mimesis**, Bauru, v. 22, n. 1, p. 35-48, 2001.

GIRALDO, V. **Descrições e Conflitos Computacionais**: o caso da derivada. 2004. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004. Disponível em: https://www.cos.ufrj.br/index.php/pt-BR/publicacoes-pesquisa/details/15/2052 Acesso em: jan. 2020

LIMA, R. N. **Equações Algébricas no Ensino Médio**: uma jornada por diferentes mundos da matemática. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica: São Paulo, 2007. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11251 Acesso em: set. 2019.

LIMA, R. N.; TALL, D. Procedural Embodiment and Magic in Linear Equations. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, p. 3-18, 2008. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-007-9086-0 Acesso em: set. 2019

MINAYO, M. C. S. Ciência, Técnica e Arte: o desafio da pesquisa social. In: MINAYO, M. C. S (org.). **Pesquisa Social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2002.

PAIS, L. C. **Ensinar e Aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PUHL, C. S.; MÜLLER, T. J.; LIMA, I. G. As Contribuições de David Ausubel para os Processos de Ensino e de Aprendizagem. **Revista Dynamis**, Blumenau, v. 26, n. 1, p. 61-77, 2020. Disponível em: https://proxy.furb.br/ojs/index.php/dynamis/article/view/8589 Acesso em: ago. 2020.

SEGADAS-VIANNA, C. C. Obstáculos Referentes ao Desenvolvimento do Conceito de Função. In: FONSECA, L. (org.). **Didática do Cálculo**: epistemologia, ensino e aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2016. p. 122-130

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. São Paulo: Cortez, 2007.

TALL, D. Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In: 20th University Mathematics Teaching Conference, 1996, Nothingham. **Proceedings** […] Nothingham: 1996. p. 1-18. Disponível em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/. Acesso em: jan. 2020.

TALL, D. Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In: CARVALHO, L. M.; GUIMARÃES, L. C. **História e Tecnologia no Ensino da Matemática**, v. 1, Rio de Janeiro: 2003. p. 1-28. Disponível em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/. Acesso em: jan. 2020.

TALL, D. Thinking trough three worlds of mathematics. In: **Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 28, 2004, Bergen, Norway. Disponível em: Acesso em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/. Acesso em: dez. 2019.

TALL, D. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. In: **Mathematics Education Research Journal**, Suiça: Springer 2008. p. 5-24.

TALL, D. A Sensible Approach to the Calculus. In: National and International Meeting on the Teaching of Calculus, 2010, Puebla, México. **Proceedings [...]**, Puebla: 2010. p. 1-29. Disponível em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/. Acesso em: nov. 2019.

TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically**: exploring the three worlds of mathematics. New York: Cambridge, 2013.

TALL, D.; GRAY, E. Duality, Ambiguity, and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. In: International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 15. 1991, Assisi, **Proceedings** […] Assisi: 1991. p. 115-141. Disponível em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/. Acesso em: jan. 2019.

TALL, D.; MEJÍA-RAMOS, J. P. Reflecting on Post-Calculus Reform. In: International Congress of Mathematics Education. Plenary for Topic Group 12: Calculus. 2004, Copenhagen. **Proceedings** […] Copenhagen: 2004. p. 1-14. Disponível em: : https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/. Acesso em: jan. 2019.

TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Suiça: 1981, n. 12, p. 151-169. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/BF00305619. Acesso em: jan. 2019.

Recebido em: 17 de setembro de 2020.

Versão corrigida recebida em: 09 de janeiro de 2021.

Aceito em: 03 de fevereiro de 2021.

Publicado online em: 26 de junho de 2021.