

Las geometrías no euclidianas en y para la formación del profesorado de matemáticas: Una revisión de literatura

Geometrias não euclidianas na e para a formação de professores de matemática: Uma revisão da literatura

Non-Euclidean geometries in and for the mathematics teacher education: A literature review

Melvin Cruz Amaya¹

 <https://orcid.org/0000-0002-4063-0002>

Gisela Montiel Espinosa²

 <https://orcid.org/0000-0003-1670-9172>

Resumen: La ciencia cuestiona la pertinencia de la geometría escolar por el tratamiento que hace del espacio. Por ello, en la investigación, se discute la incorporación de geometrías no euclidianas en la formación inicial y continua del profesorado de matemáticas. De ahí que esta revisión de literatura se proponga sintetizar y describir, en un rango amplio y actual, el estado reciente de la investigación en matemática educativa sobre estas geometrías en la formación docente. Para ello, se configuró un método en tres momentos: la búsqueda; la evaluación, selección y organización de las fuentes encontradas; y la lectura, análisis y redacción de resultados. Como resultados, destaca un interés regional y temporal que prioriza la práctica docente. Además, se reconoce una perspectiva deficitaria y prescriptiva del conocimiento del profesorado y una perspectiva, minoritaria, del profesor como sujeto de conocimiento. Se concluye con la necesidad de investigación sobre varios fenómenos, entre ellos, las generalizaciones euclidianas.

Palabras-clave: Educación matemática. Contenidos de la formación docente. Geometría.

Resumo: A ciência questiona a relevância da geometria escolar por seu tratamento do espaço. Portanto, a pesquisa discute a incorporação de geometrias não euclidianas na formação inicial e continuada de professores de matemática. Assim, esta revisão de literatura visa sintetizar e descrever, de forma ampla e atual, o estado recente da pesquisa em educação matemática sobre essas geometrias na formação de professores. Para isso, configurou-se um método em três momentos: a busca; a avaliação, seleção e organização das fontes encontradas; e leitura, análise e redação dos resultados. Os resultados destacam um interesse regional e temporal que prioriza a prática docente. Além disso, reconhece-se uma perspectiva deficitária e prescriptiva do conhecimento dos professores e uma perspectiva, minoritária, do professor como sujeito do conhecimento. Conclui-se que há a necessidade de pesquisas sobre diversos fenômenos, inclusive generalizações euclidianas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Conteúdos da formação de professores. Geometria.

¹ Maestro en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México. E-mail: melvin.cruz@cinvestav.mx

² Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Investigadora asociada al Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. E-mail: gmontiele@cinvestav.mx

Abstract: Science challenges the relevance of school geometry in its treatment of space. Therefore, the research discusses the incorporation of non-Euclidean geometries in the initial and continuing education of mathematics teachers. Hence, this literature review aims to synthesize and describe, in a broad and current range, the recent state of research in educational mathematics on these geometries in teacher education. To do this, we configured a method in three moments: the search, evaluation, selection, and organization of the sources found and reading, analyzing, and writing results. The results highlight a regional and temporal interest that prioritizes teaching practice. Furthermore, a deficit and prescriptive perspective of teachers' knowledge and a minority perspective of the teacher as a subject of knowledge are recognized. We conclude with the need for research on various phenomena, including Euclidean generalizations.

Keywords: Mathematics education. Contents of teacher education. Geometry.

Introducción

La geometría euclidiana ha sido el fundamento temático de la geometría escolar desde los inicios del estudio de la geometría, dado que permite la organización y sistematización del conocimiento intuitivo y experimental del espacio en el que vivimos (Moreno-Armella; Brady; Elizondo, 2018). Sin embargo, la investigación en el campo de la educación de la geometría en los últimos años refleja los cuestionamientos hechos desde la ciencia sobre la pertinencia de este conocimiento en el ciudadano actual, debido a la importancia del razonamiento visoespacial y al tratamiento multidisciplinar del espacio (Sinclair *et al.*, 2016; Sinclair; Cirillo; Villiers, 2017; Viveros, 2019).

Es de interés para la ciencia actual entender el espacio y sus cambios, por ello se crean y combinan disciplinas científicas —tales como astronáutica, geonáutica, geofísica, ingeniería oceánica y naval, física del espacio y ciencias atmosféricas— que pretenden una descripción más detallada del espacio y donde la geometría euclidiana se limita a lo local (Bruce *et al.*, 2017; Soares *et al.*, 2020). Estas ciencias demandan conocimientos geométricos que trasciendan del espacio local al molecular y al astronómico desde el bachillerato, para cimentar en el estudiantado su conocimiento disciplinar o multidisciplinar en los estudios universitarios y, en tanto ciudadanía, le permitan tratar con su entorno.

Buscando el desarrollo de razonamientos y habilidades en esta dirección, en algunos lugares se incorporaron las Geometrías No Euclidianas (GNE) dentro de los currículos de bachillerato, recayendo en el profesorado de matemáticas la responsabilidad de ocuparse de su atención. Esto implicó también la integración de las GNE en currículos para la formación inicial docente de matemáticas y en programas de formación continua. Sin embargo, en países como Costa Rica, Colombia, Chile y Argentina, las GNE no están presentes en los niveles básicos, pero se encuentran en algunos currículos para la formación inicial del profesorado de matemáticas.

Con el antecedente que se tiene en el campo de la educación de la geometría, cuando se hace referencia al conocimiento geométrico del profesorado, las GNE en la formación docente de matemáticas genera múltiples preocupaciones. Como se ha puesto un énfasis significativo al dominio

matemático, algunos estudios identifican carencias, deficiencias, errores y comprensiones limitadas (Jones; Tzekaki, 2016), es decir, un enfoque centrado en las deficiencias del profesorado sobre determinados procesos o conceptos matemáticos (Ponte; Chapman, 2006), que trae como consecuencia las prescripciones de lo que debe conocer. Se vislumbra que, desde la investigación, el acercamiento a las GNE como conocimiento matemático para la enseñanza será atendido desde estas mismas perspectivas (deficitaria y prescriptiva).

Sin embargo, desde el campo del desarrollo profesional docente y en específico los programas de investigación sobre el conocimiento del profesorado de matemáticas, se reconoce que es complejo referir a este conocimiento, dada la necesaria combinación de múltiples saberes, por lo que, para su descripción y estructura, se proponen modelos que pretenden sistematizarlos. Por ejemplo, con alguno de estos modelos, las GNE como conocimiento matemático deben estar imbricadas con otros conocimientos, así como el curricular, pedagógico, entre otros. Por lo tanto, incorporar estas geometrías en la formación docente requiere fundamentos en diferentes direcciones.

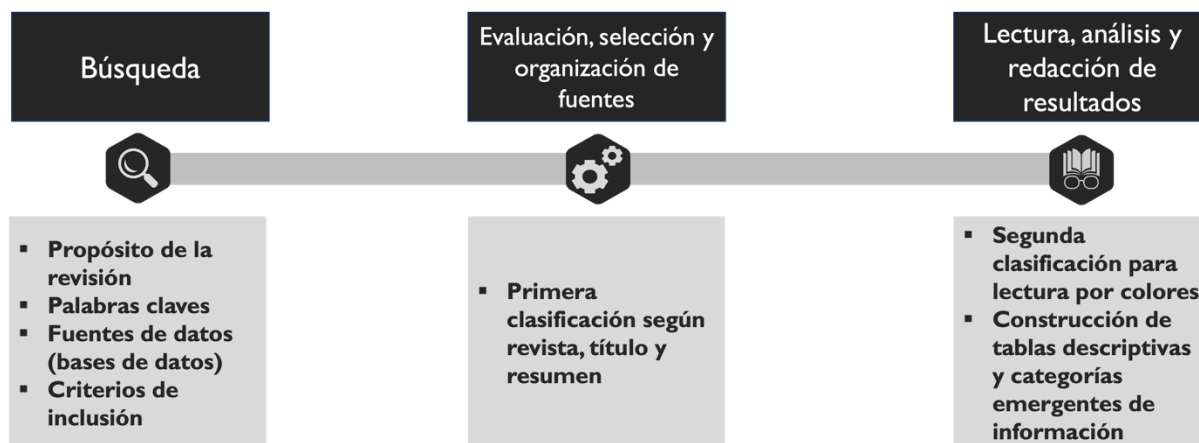
En Brasil, por ejemplo, se incorporaron estas geometrías tanto en bachillerato como en la formación del profesorado. Por ello, la investigación sobre las GNE generó por lo menos dos cambios en los objetos de estudios —que aún no se ven reflejados en las discusiones globales y generales sobre la educación de la geometría—, de centrarse en los estudiantes de bachillerato o educación básica a enfocarse en el profesorado y su formación; y de analizar las GNE como conocimiento matemático a estudiar también su didáctica. En los últimos años, la preocupación por el estudio de las GNE en la formación docente ha incrementado, dejando consigo resultados de investigación que atienden su tratamiento; resultados que requieren de una articulación y sistematización como producto o estado actual de las investigaciones recientes en este campo.

Por ello, este estudio propone una revisión de literatura que tiene por objetivo sintetizar y describir, en un rango amplio, el estado actual de la investigación en matemática educativa sobre las GNE —tomando en consideración las dos principales: la geometría hiperbólica y la geometría elíptica-esférica— como conocimiento del profesorado de matemáticas. Con una visión global de la investigación sobre las GNE como conocimiento del profesorado de matemáticas, esta revisión representará un aporte al campo al sintetizar un rango amplio y actual de estudios relevantes sobre las GNE en y para la formación del profesorado. También es un aporte en cuanto permite contextualizar y/o fundamentar nuevos estudios con dicha población en el área de geometría y mostrar espacios de investigación abiertos, donde investigadoras e investigadores interesados puedan reconocer fenómenos de estudio.

Metodología

Con base en el marco búsqueda, valoración, síntesis y análisis (SALSA - Search, Appraisal, Synthesis and Analysis) propuesto por Grant y Booth (2009), para esta revisión de literatura, se configuró un método empírico con un grado de sistematicidad que permitiera el logro del objetivo propuesto. Aunque este marco fue utilizado por Grant y Booth (2009) para clasificar revisiones de literatura, se retomó su estructura para constituir un método en tres momentos: la búsqueda; la evaluación, selección y organización de las fuentes encontradas; y la lectura, análisis y redacción de resultados (ver Figura 1).

FIGURA 1. Método de revisión de literatura



Fuente: construcción propia.

Previo a la búsqueda, se necesitó especificar el objetivo de la revisión (presentado anteriormente). Además, se definieron palabras claves y combinaciones de ellas en español, portugués e inglés, a saber: “profesor (docente)” AND “geometría”, “profesor (docente)” AND “geometría no euclidiana”, “profesor (docente)” AND “geometría esférica”, “profesor (docente)” AND “geometría hiperbólica”. Después, se determinaron los lugares de búsqueda; para ello, dada la posibilidad en cuanto acceso, se retomaron las siguientes bases de datos y buscadores: Dialnet, SpringerLink, JSTOR, Scopus, Scielo, Eric, Conricyt, Web of Science, Latindex y Google Scholar.

Por último, se establecieron criterios de inclusión, tomando en consideración toda tesis (maestría y doctorado), artículo de investigación y/o libro o capítulo de libro donde se investiguen las GNE (geometría hiperbólica y geometría esférica) con profesores y profesoras de matemáticas o estudiantes de cualquier nivel educativo, con referencias o reflexiones sobre el profesorado; y todo documento publicado desde el 2010 hasta abril del 2023, a excepción de documentos publicados en

años anteriores, citados en los documentos seleccionados, que estén dentro del rango de tiempo y que sean considerados importantes para el proyecto, es decir, donde se reflexione sobre las GNE como conocimiento del profesorado de matemática.

Tomando en consideración los elementos anteriores, se desarrolló la búsqueda. Seguidamente, se hizo una evaluación, selección y organización de las fuentes encontradas; para ello, a través de la lectura del título, el resumen y la revista a la que pertenecen, se clasificaron por revista y en dos categorías de contenido como primera organización de los documentos: los estudios sobre las GNE con el profesorado de matemáticas como población, y estudios con otras poblaciones, estudiantes en diferentes niveles educativos, que hacen referencia al profesorado en sus problemáticas, discusiones y/o prospectivas.

Luego, para la lectura de los documentos, internamente, en las dos categorías de la organización inicial, se clasificaron y etiquetaron los documentos por colores: verde, azul y amarillo. Los documentos etiquetados en color verde eran los documentos —artículos o capítulos con estructura de reporte de investigación, de reflexión teórica o histórica, sin considerar libros o tesis— que en su totalidad tratan sobre las GNE y la formación del profesorado de matemáticas. Las fuentes marcadas con color verde fueron leídas a profundidad y de cada una de ella se elaboró una ficha bibliográfica y se hicieron notas rápidas, recordatorio de ideas asociadas a las lecturas; notas de literatura, opiniones o reflexiones sobre apartados específicos de la lectura; y notas permanentes, reflexiones justificadas por argumentos de varias fuentes.

Los documentos etiquetados con color azul son aquellos en los que únicamente algunos de los apartados del documento refieren a las GNE y la formación del profesorado de matemáticas. Aquí se contemplan las tesis, libros y algunos artículos, de los cuales se leyeron a profundidad únicamente los apartados de interés y se hicieron notas rápidas, de literatura y permanentes sobre su información. Finalmente, los documentos etiquetados de color amarillo son aquellos documentos en los que su objeto de estudio no son las GNE como conocimiento docente, pero algunos apartados del documento, como la problemática, la discusión y conclusión, presentan reflexiones sobre ello. Los apartados de interés de las fuentes marcadas con color amarillo fueron leídos de manera exploratoria, sacando de ellas algunas notas rápidas.

De los productos de las lecturas, en el análisis se construyeron tablas descriptivas de los documentos, tomando en consideración: base de datos, revista, año de publicación, geometría que tratan (hiperbólica, esférica o ambas), población, idioma, tipo de producción académica (tesis, libros, capítulo o artículo), país donde se desarrolló el estudio, y tipo de investigación (empírica o teórica). Además, en mapas conceptuales, se construyeron y organizaron categorías emergentes de información,

las cuales permitieron atender el objetivo. Dado el carácter descriptivo de éste, se optó por un método inductivo para la construcción de estas categorías (Moraes, 2003), a partir de preguntarse qué pretenden, buscan o explican estas investigaciones.

Se identificó que las investigaciones exponen la importancia de estas geometrías como conocimiento del profesorado de matemáticas, pero reconocen algunos obstáculos que se anteponen al estudio de estas geometrías en la formación docente y, consecuencia de ello, promueven recursos didácticos que puedan favorecer su tratamiento con esta población. A partir de esta estructura de abordaje, se construyeron las siguientes categorías de información: argumentos que se anteponen a la incorporación de las GNE en la formación del profesorado de matemáticas, argumentos que justifican o favorecen esta incorporación y los elementos didácticos que se propone para llevar a cabo dicha incorporación.

Resultados

Los resultados de esta revisión se presentan en dos fases: la fase descriptiva, donde se pretende una exposición de los documentos seleccionados a través de algunas características y sus implicaciones; y la fase analítica, producto del estudio detallado de las categorías emergentes de información.

a) Fase descriptiva

De la búsqueda, se tomaron en cuenta 38 documentos como unidades de análisis, cuya descripción se puede revisar en el Apéndice A. Al organizarlos, se clasificaron en dos categorías iniciales de contenido: estudios sobre GNE con el profesorado de matemáticas como población (28 documentos) y estudios con otras poblaciones, estudiantes en diferentes niveles educativos, que hacen referencia a la población docente en sus problemáticas, discusiones y/o prospectivas (7 documentos). Sin embargo, ya que algunos documentos no aplicaban a esta clasificación, los documentos que reportan revisiones de literatura o reflexiones teóricas (3 documentos), se creó una tercera categoría denominada *Sin población* (ver Tabla I).

La mayoría de los documentos son artículos de investigación, esto porque normalmente los artículos son productos que condensan los principales resultados de una investigación, además, por la clasificación por colores, de las tesis únicamente se leyeron algunos apartados; en cambio, los artículos que tenían como población al profesorado de matemáticas, los cuales fueron la mayoría, se clasificaron en color verde y se leyeron a profundidad. En los criterios de inclusión se especificó que se podrían incorporar documentos publicados con anterioridad que particularmente discutieran sobre las GNE como conocimiento del profesorado de matemática. Uno de ellos fue publicado en el 2003.

TABLA I. Características particulares de los estudios

Variables	Profesores	Estudiantes	Sin población	Total Cantidad (%)
Idioma				
▪ Español	1	0	0	1 (2.6%)
▪ Inglés	5	3	0	8 (21.1%)
▪ Portugués	22	4	3	29 (76.3%)
Producción académica				
▪ Tesis (doctorado)	1	0	0	1 (2.6%)
▪ Tesis (maestría)	2	0	0	2 (5.3%)
▪ Capítulo de libro	0	2	0	2 (5.3%)
▪ Artículo	25	5	3	33 (86.8%)
País donde se hizo el estudio				
▪ Canadá	1	0	0	1 (2.6%)
▪ Estados Unidos	1	0	0	1 (2.6%)
▪ Indonesia	1	0	0	1 (2.6%)
▪ Italia y Hungría	1	0	0	1 (2.6%)
▪ Italia	0	1	0	1 (2.6%)
▪ México	1	0	0	1 (2.6%)
▪ Portugal	1	0	0	1 (2.6%)
▪ Chile	0	1	0	1 (2.6%)
▪ Grecia	0	1	0	1 (2.6%)
▪ Brasil	22	4	3	29 (76.3%)
Tipo de investigación				
▪ Teórica	7	0	3	10 (26.3%)
▪ Empírica	21	7	0	28 (73.7%)
Año de publicación				
▪ 2003, 2010-2011	2	0	0	2 (5.3%)
▪ 2012 - 2014	7	1	0	8 (21.1%)
▪ 2015 - 2017	8	1	1	10 (26.3%)
▪ 2018 - 2020	4	3	0	7 (18.4%)
▪ 2021 – (abril, 2023)	7	2	2	11 (28.9%)
Clasificación por colores				
▪ Amarillo	1	7	1	9 (23.7%)
▪ Azul	7	0	1	8 (21.1%)
▪ Verde	20	0	1	21 (55.3%)

Fuente: elaboración propia.

Esta tabla permite hacer algunas observaciones orientadas al interés situacional de la investigación en matemática educativa sobre las GNE como conocimiento del profesorado de matemáticas. Tanto el idioma de publicación como el país donde se desarrollaron los estudios muestran, con un 76.3%, el interés que ha puesto Brasil en la investigación y discusión del tema. Sin embargo, es importante especificar que, aunque el porcentaje es el mismo para el idioma y el país, no refiere a los mismos documentos, dado que se tiene una investigación escrita en inglés realizada en

Brasil y una investigación escrita en portugués desarrollada en Portugal. Como se mencionó en la introducción, Brasil ha incorporado en diferentes estados estas geometrías en la educación básica y bachillerato, por lo que tiene sentido la ampliación de esta incorporación e investigación en la formación docente.

Los años de publicación muestran un interés temporal por esta problemática. En los últimos años, la investigación sobre las GNE como conocimiento del profesorado de matemáticas ha incrementado. Dado que la mayoría de las investigaciones se ha desarrollado en Brasil, se puede pensar que la preocupación por esta problemática es situacional en cuanto espacio y tiempo, de hecho, la evidencia descriptiva de esta revisión justifica esta idea. Sin embargo, antes de plantear una conclusión al respecto, es necesario considerar dos argumentos más: el primero, que existen investigaciones en otros países que exponen esta preocupación y que hacen investigación al respecto, pero que no tienen las mismas justificaciones y motivaciones; y el segundo, que existen algunos países que no tienen incorporadas las GNE en la educación básica, pero que las tienen en los currículos para la formación docente de matemáticas.

Las características de los documentos seleccionados representan un contexto de análisis, que permitirá reconocer en la fase analítica resultados que se fundamentan en experiencias particulares. Con una segunda clasificación por colores, se desarrolló la lectura de los documentos; y con base en las categorías de análisis, se estructuró la fase analítica.

b) Fase analítica

Los resultados de la fase analítica se presentan desde las categorías emergentes de información, las cuales se configuraron con la lectura y análisis crítico de las fuentes al preguntarse por el interés de estas investigaciones.

Categoría I: Argumentos que se anteponen a la incorporación de las GNE en la formación del profesorado de matemáticas

Estos argumentos atienden diferentes situaciones; por ello, para fines explicativos, se categorizaron en: argumentos históricos-educativos, recurrentes en investigaciones educativas a través del tiempo; argumentos cognitivos, referentes al proceso de aprendizaje de estas geometrías; argumentos didácticos, asociados a las condiciones y conocimientos didácticos necesarios para su estudio; y los argumentos contextuales, vinculados a las circunstancias sociales y culturales en las que se estudia o podrían estudiarse.

Entre los argumentos histórico-educativos se reconocen dos problemáticas asociadas a la geometría escolar, la poca actualización tanto del conocimiento geométrico como del conocimiento didáctico-geométrico (Moreno-Armella; Elizondo, 2017; Santos, 2020) y el señalamiento de la geometría relegada por la aritmética y el álgebra y sujeta a ser enseñada bajo sus enfoques (Ferreira; Oliveira; Dante, 2016; Pinto; Carneiro, 2011; Santos, 2020). En la geometría escolar, se “sigue arraigando un enfoque exclusivamente axiomático del pensamiento geométrico, en el que el profesor prioriza los aspectos aritméticos y algebraicos en detrimento de los geométricos” (Santos, 2020, p. 59, traducción propia), lo que deja a la geometría en un segundo plano. Estas problemáticas obstaculizan la incorporación de estas geometrías en cualquier nivel educativo, ya que esta incorporación implicaría un cambio radical en la geometría escolar y una revaloración de la geometría.

En esta misma categoría de argumentos, Gaiowski y Bassoi (2014) y Lovis, Franco y Barros (2014) describen la creencia de que las profesoras y los profesores, al estudiar las GNE, van a manifestar las mismas dificultades que mostraron quienes las construyeron. Al citar los obstáculos y resistencias que dificultaron la construcción de las GNE, Lovis, Franco y Barros (2014, p. 20, traducción propia) mencionan que “la hipótesis es que estas dificultades, estos obstáculos, también se manifiestan en los profesores/alumnos cuando estudian estos contenidos”. Ahora bien, es importante señalar que la construcción de estas geometrías no fue lineal, se transformó con los aportes de muchas personas y múltiples circunstancias socioculturales. Aunado a esta idea, la matemática pensada para formar parte del conocimiento del profesorado pasa por procesos de transposición, potenciados por intereses políticos, comerciales, culturales, resultados de investigación, entre otros, lo que justifica que estos conocimientos se desprendan de los problemas, contextos y dificultades que enfrentaron y usaron quienes las construyeron.

Entre los argumentos más expuestos, destacan los argumentos cognitivos. El primero de ellos refiere a la inestabilidad de los conocimientos euclidianos del profesorado, es decir, dado que en algunos casos desconocen, combinan o usan de manera indistinta ciertas nociones geométricas euclidianas, resulta complejo pensar en el estudio de nuevas geometrías (Lovis; Franco; Barros, 2014; Caldato; Pavanello, 2014; Pereira; Manrique; Antunes, 2022). Sin embargo, se requiere más investigación sobre esta inestabilidad para referir a su tratamiento.

Otro de los obstáculos asociados a la geometría euclidiana, son las generalizaciones euclidianas, también llamadas ideas o reglas euclidianas. Según Lovis, Franco y Barros (2014), son evidentes cuando algunos razonamientos euclidianos —verdaderos únicamente en esta geometría— pueden ser considerados generales sin reconocer la especificidad de la superficie en la que se trabaja, por ejemplo, la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180° , por un punto exterior a una recta pasa

una única paralela, y el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados. De acuerdo con Assis (2017), Pinto (2013), Rocha *et al.* (2020) y Santos (2020), estas generalizaciones son consecuencia de la permanencia única de la geometría euclidiana en el conocimiento geométrico del profesorado. El arraigo de estas generalizaciones puede anteponerse al aprendizaje de otras geometrías, no obstante, la exposición de sus limitaciones en otras superficies genera diferencias inmediatas entre geometrías y con ellas cuestionamientos a nociones geométricas particulares.

En esta misma categoría de argumentos, se destaca la presentación y representación de las GNE. De acuerdo con Assis (2017), en los pocos lugares donde se estudian las GNE en la formación docente, estas geometrías se presentan desde un enfoque formalista, esto es, bajo un sistema axiomático; provocando un alejamiento en el profesorado y en consecuencia la decisión de discriminarlas de su enseñanza. Así mismo, las representaciones gráficas de los objetos geométricos en estas geometrías difícilmente se relacionan con ese objeto, una justificación se puede reconocer del estudio de Lovis, Franco y Barros (2014, p. 28, traducción propia) donde “los profesores creían que las representaciones de los objetos geométricos eran, de hecho, el propio objeto”, lo cual dificulta asociar dos representaciones al mismo objeto.

Finalmente, entre los argumentos cognitivos, también se anteponen aspectos lingüísticos. Dada la centración en la geometría euclidiana, al estudiar otras geometrías, el profesorado interactúa con términos, reglas o axiomas que *a priori* carecen de significados, así como, el biángulo y el triángulo trirectángulo en la geometría esférica (Lovis; Franco; Barros, 2014). Estos argumentos complejizan el aspecto didáctico en la formación docente, de ahí que los argumentos didácticos estén centrados en carencias.

Sobre los argumentos didácticos, Aparecida (2015), Caldatto y Pavanello (2014), Ferreira, Oliveira y Dante (2016), y Gambini y Lénárt (2021) reconocen carencias de conocimiento disciplinar y didáctico en las y los formadores del profesorado, asociadas a las GNE. Este argumento deviene de la ampliación de la incorporación de las GNE. Por ejemplo, en algunos estados de Brasil, primero se ingresaron en bachillerato y de ahí surge la necesidad de integrarlas a la formación docente; en consecuencia, también se requirió que quienes formaban a estos docentes las conocieran (Caldatto Y Pavanello, 2014).

Además, para justificar el estudio de estas geometrías en la formación docente, aún se tienen carencias de recursos didácticos y de metodologías de enseñanza (Aparecida, 2015; Gaiowski; Bassoi, 2014; Santos, 2020). El profesorado del estado de Paraná, Brasil, que participó en el proceso de incorporación de las GNE en el bachillerato, alude a la falta de libros de texto y materiales que favorezcan el tratamiento de estas geometrías (Caldatto; Pavanello, 2014). Como lo mencionan Gaiowski y Bassoi (2014, p. 2, traducción propia) la incorporación de las GNE se vuelve compleja, dado

“el desconocimiento del contenido, la falta de orientaciones metodológicas por gran parte de los profesores o incluso la ausencia de libros de texto que aborden el tema”.

La población participante en el estudio de Caldato y Pavanello (2014) también expuso la carencia de tiempo para atender una malla ampliada, dado que la incorporación de estas geometrías solo aumentó la cantidad de contenidos en el currículo. Además, dadas estas condiciones, que siempre han sido una preocupación, probablemente uno de los tópicos que serán excluidos en la enseñanza serán las GNE.

Los últimos argumentos en este apartado están asociados a las circunstancias del contexto en el que se pretende dar el estudio de estas geometrías por el profesorado. El primero de ellos puede reconocerse en cualquier población que estudie estas geometrías, la influencia que tiene el contexto local en la racionalidad de las personas (Pinto, 2013). El contexto local es bien descrito por la geometría euclidiana, por ello, el estudio de nuevas geometrías representa un desafío grande, el desafío de pensar en contexto astronómicos y moleculares. Además, en esta categoría de argumentos, Caldato y Pavanello (2014) y Pereira, Manrique y Antunes (2022) reconocen que las adversidades que enfrenta la educación pública obstaculizan cualquier desarrollo en la educación, por consiguiente, también a la incorporación de las GNE en la formación docente. Caldato y Pavanello (2014) argumentan que las precarias condiciones del desarrollo profesional docente, de infraestructura institucional y de investigación, que enfrenta la educación pública en Brasil predisponen la consideración de nuevos contenidos matemáticos.

Así mismo, el papel del profesorado de matemáticas en los cambios curriculares tiene repercusiones en el estudio de estas geometrías (Caldato; Pavanello, 2014; Pereira; Manrique; Antunes, 2022). Dado su profesionalismo y su reconocimiento como sujetos de conocimiento, éste debe tener la posibilidad de participar de manera activa en el proceso de incorporación de estas geometrías, ya que únicamente con su participación se dará en la práctica esta incorporación. Caldato y Pavanello (2014) señalan que en Brasil hubo un proceso de convencimiento al profesorado, con el cual se buscaba evidenciar un discurso de construcción colectiva de los lineamientos curriculares; desafortunadamente, sin una reflexión sobre lo que son estas geometrías y las implicaciones de su incorporación.

Los argumentos que se anteponen a la incorporación de estas geometrías en la formación docente devienen de las experiencias y realidades de algunos lugares, de la necesaria investigación sobre algunos fenómenos relacionados a estas geometrías, y de la valoración de la geometría y del profesorado de matemáticas. Las mismas investigadoras e investigadores que argumentan en este sentido, responden a sus argumentos fundamentando dicha incorporación; como consecuencia,

emerge la segunda categoría de análisis, los argumentos que justifican o favorecen la incorporación de las GNE en la formación docente de matemáticas.

Categoría 2: Argumentos que justifican o favorecen la incorporación de las GNE en la formación del profesorado de matemáticas

Al igual que los argumentos en contra, los argumentos a favor de la incorporación se categorizaron en: argumentos histórico-epistemológicos, los cuales provienen del valor de los datos históricos y la construcción de estas geometrías; argumentos cognitivos, referentes a la adquisición de estos conocimientos; argumentos didácticos, asociados a las condiciones y conocimientos didácticos; y argumentos contextuales, vinculados a las circunstancias sociales y culturales.

Entre los argumentos histórico-epistemológicos, un buen grupo de investigadoras e investigadores mencionan que el estudio de estas geometrías permite al profesorado reflexionar sobre la concepción del espacio, la verdad matemática, el rigor, la consistencia y los sistemas axiomáticos (Aparecida; Pinto, 2021; Assis, 2017; Caldatto; Pavanello, 2014; Santos, 2020; Soares et al., 2021; Song; Schwenz, 2013); por ende, esto genera discusiones sobre la construcción de la ciencia y la evolución de las matemáticas. Esta reflexión se justifica por la consistencia de las GNE, por ejemplo, Assis (2017, p. 396, traducción propia) describe que “la consistencia de la geometría hiperbólica hace plausible el debate sobre su inclusión en el currículum de los cursos de formación de profesores de matemáticas”, es decir, que la veracidad de este conocimiento le atribuye un potencial para ser conocido por lo menos por docentes de matemáticas.

Además, estas geometrías potencian los conocimientos históricos y filosóficos del profesorado al analizar su construcción y las circunstancias socioculturales que lo permitieron (Soares et al., 2020). El Proyecto Político Pedagógico (PPP) del estado de Paraná en Brasil expone la relevancia del conocimiento histórico en el profesorado sobre la fundamentación matemática de las GNE, a través de la negación del V postulado de Euclides (Assis, 2017). En consecuencia, el estudio de estas geometrías genera en el profesorado una concepción de la matemática construible y en construcción (Aparecida; Pinto, 2021; Pivatto; Schuhmacher, 2013; Pivatto; Schuhmacher; Silva, 2016), la cual tiene una repercusión positiva y directa en su práctica docente, al presentar a sus estudiantes “la construcción del conocimiento matemático como algo dinámico, vivo, transformador, para deconstruir la visión de una Ciencia ya hecha, de unos resultados intocables, de un conocimiento único” (Santo, 2020, p. 47, traducción propia).

Por su parte, entre los argumentos cognitivos se encuentra el más destacado sobre el estudio de las GNE en cualquier población, el potencial que tienen estas geometrías en la significación de la

geometría euclidiana (Gambini, 2021; Lovis; Franco, 2015; Oliveira; Ferreira, 2020; Santos, 2020; Santos; Souza, 2021a, 2021b; Souza, 2022; Wasserman; Stockton, 2013). Cuando el profesorado reflexiona sobre nociones geométricas en superficies diferentes al plano, cuestiona esas nociones en el plano, y con ello, le atribuye nuevos significados; además, repiensa aspectos didácticos tanto de la geometría euclidiana como de las no euclidianas (Oliveira; Ferreira, 2020).

Haciendo referencia a la enseñanza de las GNE por el enfoque de comparación entre geometrías, Gambini (2021, p. 242, traducción propia) concluye que “los profesores reconocieron las ventajas de este método, no sólo para despertar y reforzar el interés por la geometría, sino también para mejorar y acelerar la comprensión de los conceptos euclidianos”. Los justificantes del estudio de las GNE no pretenden una discriminación de la geometría euclidiana, de hecho, ésta se reconoce como la esencia de la racionalidad, por favorecer el tratamiento con el espacio local.

Igualmente, en los argumentos cognitivos, estas geometrías favorecen en el profesorado una cultura geométrica (Coelho; Perovano; Ribeiro, 2020; Kotarinou; Stathopoulou, 2017; Pinto, 2013; Pinto; Carneiro, 2011; Pinto; Portella; Machado, 2017), una cultura matemática (Pinto; Carneiro, 2011) y una cultura científica (Kotarinou; Stathopoulou, 2017; Pinto; Carneiro, 2011). Refiriéndose a la posibilidad de que la suma de los ángulos internos de un triángulo pueda ser mayor o menor que 180° , Pinto y Carneiro (2011, p. 91, traducción propia) mencionan que “preguntas como éstas desarrollan procesos mentales en los estudiantes que les llevan a buscar mejorar su cultura geométrica durante su educación”. El conocimiento único de la geometría euclidiana limita al profesorado en su enseñanza sobre el tratamiento del espacio, además, la construcción de las GNE representa una forma de construcción de conocimiento científico, el desarrollo de conocimiento a partir de la negación de uno previamente establecido.

Muy cercanos a los argumentos anteriores, se exponen los argumentos didácticos. Como se mencionó anteriormente, dado que el conocimiento de las GNE potencia la significación de la geometría euclidiana, Oliveira y Ferreira (2020) y Santos (2020) exponen que el conocimiento de estas geometrías por el profesorado contribuye a la calidad de la enseñanza de la geometría en educación básica y media, dado que el estudio de las GNE puede entenderse como una “posibilidad de cambiar la forma en que los profesores entienden y realizan la práctica de la enseñanza de la geometría” (Santos; Souza, 2021a, p. 16, traducción propia). Así mismo, para los lugares en los cuales las GNE son parte de los lineamientos curriculares en la educación básica y media, esta incorporación permite que, al ingresar al sistema laboral, el profesorado responda a las demandas curriculares e institucionales (Pinto, 2013).

Por su parte, entre los argumentos contextuales, el conocimiento de las GNE favorece el cumplimiento del objetivo atribuido a la geometría, el desarrollo del pensamiento que permite tratar con nuestro entorno (Assis, 2017; Kotarinou; Stathopoulou, 2017; Santos, 2020; Santos; Souza, 2021a). De acuerdo con Santos (2020, p. 198, traducción propia), al aceptar la existencia de otros modelos geométricos, el profesorado "modifica la forma en que se relaciona con el espacio en el que vive y, así, desarrolla una mayor autonomía en el proceso de construcción de los conceptos geométricos en estudio". El conocimiento de las GNE permite a los científicos explicar el mundo físico a través del reconocimiento del espacio atómico, local y astronómico, por lo que, para Santos (2020), este reconocimiento sensibilizaría la práctica docente en geometría, en particular sobre el tratamiento del espacio.

Por añadidura, responder a ese objetivo implica valorar las demandas de la ciencia actual que exige una descripción detallada del espacio, fortaleciendo la interdisciplinariedad en la formación docente (Pivatto; Schuhmacher, 2014; Santos; Souza, 2021b). Por otro lado, cuando interactúan con las GNE, reconocen su papel en la explicación del espacio y aceptan las limitaciones de la geometría euclidiana al representar algunos fenómenos físicos (Kotarinou; Stathopoulou, 2017; Oliveira; Ferreira, 2020; Santos, 2020; Santos; Souza, 2021a; Soares et al., 2021).

Los argumentos en contra del estudio de estas geometrías por parte del profesorado de matemáticas están asociados con:

- la geometría escolar, su actualización y el papel que juega la geometría;
- la construcción de las GNE, su presentación y representación; y
- las carencias de conocimiento disciplinar y didáctico.

Más que anteponerse al estudio de estas geometrías por el profesorado, son argumentos que exponen la necesaria fundamentación y justificación de la incorporación de estas geometrías desde la investigación.

Por su parte, los argumentos a favor responden al por qué y para qué de las GNE en la formación docente. La evidencia muestra que la justificación para el estudio de las GNE no solo deviene de que estas geometrías estén en los lineamientos curriculares de educación básica o media, donde el profesorado va a laborar; muchos de los argumentos apuntan a generar en la población docente un conocimiento geométrico, matemático y científico más amplio, en beneficio de su práctica docente, así esté centrada en la geometría euclidiana. Aunque no se puede asegurar que se tienen los elementos suficientes para justificar y fundamentar el estudio de estas geometrías por el profesorado, se pueden reconocer algunas propuestas didácticas que aportan en este sentido, y con la tercera categoría de análisis se pretende describirlas.

Categoría 3: Elementos didácticos que se propone para llevar a cabo dicha incorporación

Dado que los elementos didácticos que propone la investigación son de naturaleza distinta, se organizó su reporte en: modelos introductorios, entendidos como contextos geométricos convenidos para el estudio de estas geometrías; estrategias didácticas, que refieren a procesos particulares asociados a enfoques metodológicos; y enfoques metodológicos, los cuales estructuran de forma general los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta geometría en la formación del profesorado.

Entre los modelos introductorios asociados a la geometría hiperbólica destacan el círculo de Klein, círculo en el que las cuerdas son consideradas líneas rectas (Assis, 2017; Rocha *et al.*, 2020); el círculo de Poincaré, círculo donde las líneas rectas son arcos de circunferencias ortogonales a la frontera (Assis, 2017; Kotarinou; Stathopoulou, 2017); y el semiplano de Poincaré, como lo describen Moreno-Armella y Elizondo (2017), si el plano euclidiano es atravesado por una recta, entonces el semiplano de Poincaré es uno de esos semiplanos, donde las semicircunferencias ortogonales a la recta frontera son consideradas líneas rectas.

Por su parte, para la geometría esférica, uno de los más comunes es la consideración de la superficie de la esfera; para ello, se pueden utilizar diferentes esferas como herramientas. Entre las más destacadas está la esfera de Lénárt, propuesta por el profesor e investigador húngaro István Lénárt, que cuenta con sus propias herramientas de construcción y medición: hojas esféricas, compás esférico, y regla esférica (Gambini, 2021; Gambini; Lénárt, 2021). Un segundo modelo para la geometría esférica lo propone Pinto (2018), la proyección estereográfica, entendida como la representación de la superficie de la esfera al proyectar todos sus puntos desde uno de ellos, normalmente el polo norte en una esfera unitaria, sobre el plano horizontal que pasa por su centro.

En cuanto a las estrategias didácticas utilizadas y recomendadas desde la investigación, dado que son contenidos relativamente nuevos, Ferreira, Oliveira y Dante (2016), Gaiowski y Bassoi (2014), Gambini y Lénárt (2021), Oliveira y Ferreira (2020), y Song y Schwenz (2013) aluden a la necesidad de enseñar a través de resultados de investigación que fundamenten el qué y el cómo. Referente a procesos de enseñanza, las fuentes de datos sugieren una variedad de estrategias, algunas asociadas al conocimiento disciplinar y otras relacionadas al conocimiento didáctico. Sobre las estrategias vinculadas al conocimiento disciplinar, Pinto (2013), Pinto (2018) y Pinto, Portella y Machado (2017) sugieren un tratamiento inicial de forma exploratoria, es decir, con una introducción paulatina de su axiomática.

Relativo al conocimiento didáctico, se propone una enseñanza por medio de la interdisciplinariedad y contextualidad, en otras palabras, a través de diferentes contextos de aplicación que favorezcan el acercamiento a estas geometrías (Aparecida; Romualdo, 2015; Caerols; Carrasco; Asenjo, 2021; Conceição, 2018; Pataki, 2003; Pinto; Portella; Machado, 2017; Song; Schwenz, 2013);

por ejemplo, para la geometría esférica, algunos de estos contextos son: la geografía (Conceição, 2018; Pataki, 2003; Pinto, 2013), arte-fotografía (Caerols; Carrasco; Asenjo, 2021), navegación aérea y marítima (APARECIDA; ROMUALDO, 2015; PINTO, 2013), la geología —principalmente en el paleomagnetismo que estudia el campo magnético de la Tierra— (Aparecida; Romualdo, 2015), la astronomía (Aparecida; Romualdo, 2015; Caerols; Carrasco; Asenjo, 2021), la propia matemática (Pinto; Carneiro, 2011), y el Sistema de Posicionamiento Global (GPS) (Song; Schwenz, 2013).

Por su parte, Assis (2017), Ferreira, Oliveira y Dante (2016), Oliveira y Ferreira (2020), y Silva y Costa (2022) reconocen el potencial de la historia de las GNE en la enseñanza de estas geometrías. Aludiendo a la histórica con fines didácticos para el estudio de las GNE, Oliveira y Ferreira (2020, p. 478, traducción propia) exponen que “es posible pensar en una formación docente que explore los conceptos que componen la Matemática escolar, pero que también permita una mirada pedagógica sobre cómo enseñar dichos conceptos”. Aunado a estas estrategias, Gambini (2021) sostiene que, en la caracterización de nociones matemáticas, no solo de las GNE, el movimiento y las vivencias juegan un papel importante, ya que, a través del uso del cuerpo y sus sentidos, los aprendices organizan el hacer y orientan su percepción; de ahí que, propone como estrategia a la experimentación sensorio-motriz.

Una de las rutas didácticas para la enseñanza de la geometría euclidiana es el uso de software de geometría dinámica, estrategia que trasciende a la enseñanza de las GNE en la formación del profesorado (Assis, 2017; Ferreira; Oliveira; Dante, 2016; Kotarinou; Stathopoulou, 2017; Moreno-Armella; Elizondo, 2017; Pinto, 2018; Rocha *et al.*, 2020; Soares *et al.*, 2020; Song; Schwenz, 2013). Algunas de las propuestas para estas geometrías son Cabri Geometry, Cinderella, GeoGebra, No Euclid, y Cabri II. De acuerdo con Ribeiro y Perovano (2020), aunque se reconocen potencialidades de los ambientes de geometría dinámica en la atención de las GNE, se sugieren modificaciones y convenciones, puesto que los softwares están programados bajo una racionalidad euclidiana.

La estrategia sugerida en una fase inicial del estudio de las GNE es el uso de material manipulable (Caerols; Carrasco; Asenjo, 2021; Conceição, 2018; Gambini, 2021; Kotarinou; Stathopoulou, 2017; Pivatto; Schuhmacher, 2013; Soares *et al.*, 2020), ya que, al involucrar el sentido de la vista y el tacto, el aprendizaje de estas geometrías se vuelve más significativo.

Estas estrategias no se promueven de forma independiente. En su conjunto, pretenden el paso de lo experimental a lo abstracto y el paso de lo manipulativo a lo digital. En este sentido, Gambini (2021, p. 241, traducción propia) expone: “creemos que el resultado más importante obtenido ha sido la multimodalidad de la enseñanza, el uso contemporáneo en clase de herramientas matemáticas y de laboratorio”. La multimodalidad refiere al uso de varias estrategias didácticas en la enseñanza de estas geometrías (Kotarinou; Stathopoulou, 2017).

En cuanto a los enfoques metodológicos, se reconocen tres. El primero es la enseñanza de las GNE a través de un enfoque comparativo entre la geometría euclidiana y la o las GNE. Propuesto en 1990 por István Lénárt en Hungría (Gambini, 2021; Gambini; Lénárt, 2021; Pivatto; Schuhmacher, 2014), originalmente consistía en la enseñanza comparada y contrastada entre la geometría plana y la geometría esférica, sin embargo, los últimos trabajos de Lénárt y su grupo proponen agregar a la geometría hiperbólica (Gambini; Lénárt, 2021), por lo que el contraste se daría entre las tres geometrías.

El segundo es el enfoque basado en competencias y habilidades, propuesto por Pivatto y Schuhmacher (2014) en Brasil, en particular para la enseñanza de las GNE en la formación inicial del profesorado. Este enfoque busca el desarrollo de sus competencias disciplinares, por ejemplo, simplificar las GNE, comprender su estructura lógica, reconocer variables relevantes como geodésicas, y establecer relaciones incompatibles entre geometrías. Además, se busca desarrollar habilidades didácticas, como el uso de conocimientos previos, reforzar la geometría euclidiana y tener claro el objetivo de estudiar las GNE. Finalmente, el enfoque etnomatemático, propuesto por Sukestiyarno et al. (2023) en Indonesia, que pretende el desarrollo de habilidades espaciales por medio del estudio de las GNE haciendo, a través del uso de contextos reales de aplicación, matemáticas más relevantes y significativas.

Estos elementos didácticos procuran mostrar rutas de atención de las GNE en la formación docente. Sin embargo, surgen preguntas sobre su pertinencia por la manera o el grado de atención que tienen de las problemáticas, lo cual se discutirá en el siguiente apartado.

Discusión

Con el fin de lograr una reflexión profunda sobre algunos puntos particulares, este apartado se desarrolla en cuatro momentos: primero, se reconocen las implicaciones de las características de los documentos revisados; luego, se reflexiona sobre los elementos que tienen una influencia en el estudio de las GNE por el profesorado; seguidamente, se exponen los aportes de estos elementos a las problemáticas que discute el campo de la educación de las GNE; y, finalmente, las potencialidades particulares de esta revisión de literatura.

Sobre lo primero, dada la exposición del interés regional y temporal de la investigación presentada en los resultados descriptivos, se reconoce un contexto en el que los resultados de estas investigaciones refieren a una necesidad, es decir, en algunos estados de Brasil las GNE forman parte de los lineamientos curriculares de bachillerato, por lo que es prioritario el apoyo a la formación y práctica docente. A través de los resultados analíticos, se reconocen argumentos que justifican el

estudio de estas geometrías en la formación docente y que no están asociados a su enseñanza, tal como el potencial de las GNE en la significación de la geometría euclidiana. Estos argumentos son otros motivos para el estudio de las GNE en la formación docente en matemáticas.

Los estudios desarrollados en países como Hungría e Italia son un reflejo de que este objeto de estudio tiene justificaciones de diferente índole, lo cual justifica que en algunos países las GNE formen parte de la formación del profesorado sin que estén en los lineamientos curriculares de bachillerato y educación básica. Al respecto, se reconoce que algunos de los elementos que tienen influencia en el estudio de estas geometrías devienen de la geometría escolar. La poca actualización de la geometría escolar y el hecho de que se ha ido convirtiendo en un contexto de aplicación para la aritmética y el álgebra ha provocado inestabilidad en los conocimientos euclidianos y la constitución de generalizaciones euclidianas en el profesorado (Santos, 2020), fenómenos que afectan el estudio de nuevas geometrías. Por otro lado, se reconoce que el estudio de las GNE fortalece a la geometría escolar, porque favorece la significación de la geometría euclidiana y contribuye a la calidad de su enseñanza (Gambini, 2021; Santos; Souza, 2021a, 2021b; Souza, 2022).

Otros elementos provienen de la historia de la geometría. La construcción del fundamento matemático de las GNE representa un hito en la historia de las matemáticas y en la historia de la ciencia. La negación del V postulado de Euclides se convirtió en un método de construcción de conocimiento científico (Pinto; Carneiro, 2011); es un ejemplo que muestra que las matemáticas son una actividad humana, están vivas, se construyen y reconstruyen a través del tiempo (Aparecida; Pinto, 2021); un caso paradigmático que permitió replantear la verdad, el rigor y la consistencia matemática (SOARES *et al.*, 2021); y representa el inicio de la construcción de un conocimiento que se replantea el tratamiento con el espacio (Oliveira; Ferreira, 2020).

La naturaleza de las GNE también tiene influencia en su estudio por el profesorado, lo que se nota en los argumentos que refieren a la representación de nociones en estas geometrías y los aspectos lingüísticos relacionados a ellas (Assis, 2017). Además, el hecho de que el profesorado que formó parte del proceso de incorporación de estas geometrías en el estado de Paraná, Brasil, expuso la necesidad sobre profundizar en las características particulares de estas geometrías (Caldatto; Pavanello, 2014) muestra una necesidad de investigación centrada en su naturaleza. El conocimiento epistemológico asociado a estas geometrías daría referencia sobre qué y cómo enseñarlas, considerando sus particularidades. Aunados a estos elementos, también las circunstancias contextuales que enfrentan en la educación afectan su estudio considerando, por supuesto, que estas implicaciones serán particulares, dependiendo de la región a la que se haga referencia.

Como tercer momento, pensar en las GNE como conocimiento del profesorado de matemáticas implica reconocer su complejidad dada la necesaria variedad de saberes. Desde el campo

de investigación en educación de la geometría, se reconoce el énfasis a los cuestionamientos hechos por la ciencia sobre la pertinencia de la geometría escolar respecto del tratamiento del espacio, así como el dominio de los enfoques de investigación centrados en las deficiencias y prescripciones sobre el conocimiento matemático del profesorado. Los argumentos sobre la inestabilidad de sus conocimientos euclidianos, la creencia de que al estudiar las GNE van a manifestar las mismas dificultades que tuvieron quienes construyeron esa matemática, y la visión de las generalizaciones euclidianas y la representación y nomenclatura de las GNE como un obstáculo son evidencia de la perspectiva deficitaria del conocimiento del profesorado sobre procesos y conceptos geométricos relacionados a las GNE.

En cambio, los argumentos que reconocen la importancia del papel que puede jugar el profesorado en los cambios curriculares y que aceptan que el estudio de nuevas geometrías también depende de las adversidades que enfrentan en el aula de clases e instituciones educativas, de las carencias de tiempo, de recursos y de metodologías de enseñanza son evidencia de una visión del profesor o profesora como un sujeto de conocimiento. Como señala Tardif (2014, p. 168-169), esta visión debe propiciarse desde la investigación sobre el profesorado a través de un cambio de concepción, pasar de verlos como “técnicos que aplican conocimientos producidos por otros” a reconocerlos como “sujetos que poseen, utilizan y producen saberes específicos de su oficio”, lo cual implica aceptar que en su quehacer y formación se producen, reformulan y dinamizan saberes.

De los elementos didácticos, la multimodalidad de enseñanza de las GNE reconoce el profesionalismo del profesorado al seleccionar según su experiencia y contexto las estrategias didácticas que considere apropiadas. Además, el enfoque basado en competencias y habilidades (Pivatto; Schuhmacher, 2014) muestra la necesaria variedad de saberes asociados a las GNE como conocimiento docente, sin embargo, se centra en lo que el profesorado debe conocer sobre ellas y su enseñanza.

Finalmente, esta revisión de literatura posibilita el reconocimiento de fenómenos didácticos que requieren mayor investigación, de los cuales destacamos: causas y consecuencias de la inestabilidad de los conocimientos euclidianos en el profesorado, las limitaciones de las generalizaciones euclidianas en superficies distintas al plano, el fenómeno de ampliación de incorporación de las GNE, su epistemología e historia, e influencia del conocimiento de las GNE en la enseñanza de la geometría euclidiana. Además, tanto los argumentos como los elementos didácticos pueden fundamentar propuestas de intervención didáctica con el profesorado y el estudiantado, así mismo aportar en la justificación y contextualización de la incorporación de estas geometrías en la formación docente de matemáticas.

Conclusiones

La investigación actual sobre las GNE en y para la formación del profesorado tienen una orientación en datos empíricos cualitativos con un auge en los últimos años. Además, sus resultados están escritos principalmente en portugués. La experiencia de algunos lugares donde las GNE están en los lineamientos curriculares para la formación del profesorado muestra una visión del estado actual de las GNE en la formación docente. De ahí que se reconozca que la presentación, representación y terminología sobre ellas han generado dificultades en su estudio y se fundamenten estrategias y enfoques metodológicos para su enseñanza. Por otra parte, esta revisión muestra información relevante *para* la incorporación o estudio de las GNE en la formación docente, por ejemplo, el reconocimiento de la influencia de las generalizaciones euclidianas en su estudio y los recursos didácticos como productos de estas investigaciones. Por ello, en esta revisión, se alude a las GNE *en y para* la formación docente.

En términos del contenido de las investigaciones revisadas, se evidencia un dominio de la cultura matemática al reconocer que la perspectiva deficitaria y prescriptiva del conocimiento del profesorado —de manera correspondiente, lo que no conoce y lo que debería conocer—, descrita desde el campo general de la educación de la geometría, se mantiene en el campo de las GNE como conocimiento del profesorado de matemáticas. Si bien hay estudios con una perspectiva del profesor o profesora como sujeto de conocimiento, dado que son minoritarios, se requiere mayor investigación con esta visión.

Los intereses de las investigaciones revisadas están centrados en justificar la importancia de las GNE como conocimiento de la ciudadanía actual y principalmente como conocimiento del profesorado, de ahí la construcción de las categorías emergentes de información. Los argumentos en contra y a favor aportan en las respuestas al qué, para qué y por qué de las GNE en la formación docente de matemáticas, y los elementos didácticos contribuyen a responder el cómo. Sin embargo, ninguna de esas preguntas se responde a cabalidad, por ello, la importancia de conocer los avances de la investigación con este interés.

El panorama de estos estudios exterioriza desafíos y fenómenos de interés para la investigación en el campo. Algunos asociados a la geometría escolar, por ejemplo, su pertinencia para la ciencia actual; otros relacionados a la geometría escolar que tienen influencia directa con las GNE, entre ellos las generalizaciones euclidianas; y varios vinculados a las GNE, como sus particularidades. En consecuencia, surgen algunas preguntas, entre ellas: ¿cómo construye conocimientos no euclidianos el profesorado de matemáticas?, ¿qué repercusiones tienen sus conocimientos euclidianos en esta construcción?, ¿qué influencia tiene el conocimiento de las GNE en su práctica docente?, ¿de qué

manera el estudio de las GNE favorece la significación de la geometría euclidiana?, ¿cómo pasar de lo manipulable a lo digital y de lo experimental a lo abstracto en las estrategias didácticas para la enseñanza de las GNE?

Como consecuencia, la revisión muestra la novedad de estudios sobre las GNE como conocimiento del profesorado, la envergadura de estas geometrías en la formación docente de matemáticas y el estado actual de un campo de investigación que se consolida desde la atención a problemáticas de la geometría escolar. Por ello, esta revisión representa un aporte al campo de la educación de la geometría, del desarrollo profesional docente y de la educación de las GNE; además, un aporte particular para investigadoras e investigadores interesados en el tema, autoridades educativas y, principalmente, para el profesorado de matemáticas.

Apéndices:

Apéndice A – Características particulares de los documentos seleccionados:

<https://doi.org/10.7910/DVN/IRSMYR>

Referencias

APARECIDA, J.; PINTO, J. A abordagem da geometria esférica no ensino e na aprendizagem matemática: o que apontam as pesquisas realizadas entre 2000 e 2018. **Revista Tangram**, Rio Grande do Sul, Brasil, v. 4, n. 2, p. 59-82, 2021. Disponible en: <https://doi.org/10.30612/tangram.v4i2.11952>

APARECIDA, M.; ROMUALDO, C. Interdisciplinaridade Geologia e Matemática: Estudos numa perspectiva de formação de professores ao longo da vida. **Desafios Curriculares e Pedagógicos na Formação de Professores**, Portugal, p. 1-9, 2015. Disponible en: <https://scholar.google.com/citations?user=gWfrqOEAAA&hl=pt-BR>

APARECIDA, V. O que dizem as produções paranaenses quanto ao ensino das geometrias não euclidianas a partir da publicação das Diretrizes Curriculares da Educação do Estado do Paraná. **BoEM**, Joinville, Brasil, v. 3, n. 4, p. 45-65, 2015. Disponible en: <https://revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/6235/4428>

ASSIS, E. A Geometria Hiperbólica nos currículos escolares e universitários. **Educ. Mate. Pest**, São Paulo, Brasil, v.19, n. 3, p. 393-413, 2017. Disponible en: <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i3p393-413>

BRUCE, C.; DAVIS, B.; SINCLAIR, N.; MEGARVEY, L.; HALLOWELL, D.; DREFFS, M.; FRANCIS, K.; HAWES, Z.; MOSS, J.; MULLIGAN, J.; OKAMOTO, Y.; WHITELEY, W.; WOOLCOTT, G. Understanding gaps in research networks: using “spatial reasoning” as a window into the importance of networked educational research. **Educ Stud Math**, Canadá, USA, Australia, n. 95, p. 143-161, 2017. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9743-2>

CAEROLS, H.; CARRASCO, R.; ASENJO, F. Using smartphone photographs of the Moon to acquaint students with non-Euclidean geometry. **American Journal of Physics**, Chile, p. 1079-1085, 2021. Disponible en: <https://doi.org/10.1119/10.0006156>

CALDATTO, M.; PAVANELLO, R. O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: a visão dos professores participantes. **Bolema**, Brasil, v. 28, n. 48, p. 42-63, 2014. Disponible en: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a03>

COELHO, P.; PEROVANO, A.; RIBEIRO, D. O ensino da Geometria Esférica: possibilidades para inclusão de deficientes visuais nas aulas de Matemática. **Com a Palavra o Professor**, Brasil, v. 5, n. 13, p. 1-21, 2020. Disponible en: <http://revista.geem.mat.br/index.php/PPP/article/view/466>

CONCEIÇÃO, G. Geometria Riemanniana na educação básica: interdisciplinaridade em ação. **BoEM**, Brasil, v. 6, n. 10, p. 61-81, 2018. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06102018061>

FERREIRA, L.; OLIVEIRA, E.; DANTE, Z. Professores de Matemática e suas Compreensões a Respeito das Geometrias Não Euclidianas. **Rev. Ens. Educ. Cienc. Human.**, Londrina, Brasil, v. 17, n. 3, p. 301-309, 2016. Disponible en: <https://revistaensinoeducacao.pgsskroton.com.br/article/view/3610>

GAIOWSKI, A.; BASSOI, T. A inserção das geometrias não-euclidianas no currículo da educação básica no estado do paraná. **Bolema**, v. 28, n. 48, p. 1-16, 2014. Disponible en: http://www.gestoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_antONIO_osny_gaiowski.pdf

GAMBINI, A. Five Years of Comparison Between Euclidian Plane Geometry and Spherical Geometry in Primary Schools: An Experimental Study. **European Journal of Science and Mathematics Education**, Italia, v. 9, n. 4, p. 230-243, 2021. Disponible en: <https://doi.org/10.30935/scimath/11250>

GAMBINI, A.; LÉNÁRT, I. Basic Geometric Concepts in the Thinking of In-Service and Pre-Service Mathematics Teachers. **Education Sciences**, Italia y Hungría, v. 11, n. 350, p. 1-12, 2021. Disponible en: <https://doi.org/10.3390/educsci11070350>

GRANT, M.; BOOTH, A. A typology of reviews: an analysis of 14 review types and associated methodologies. **Health Information and Libraries Journal**, Inglaterra, n. 26, p. 91-108, 2009. Disponible en: <https://doi.org/10.1111/j.1471-1842.2009.00848.x>

JONES, K.; TZEKAKI, M. Research on the teaching and learning of geometry. In GUTIÉRREZ, A.; LEDER, G.; BOERO, P. **The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues**. Ed. Rotterdam, Países Bajos: Sense, 2016, p. 109-149. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4

KOTARINOU, P.; STATHOPOULOU, C. ICT and Liminal Performative Space for Hyperbolic Geometry's Teaching. **Mathematics and Technology, Advances in Mathematics Education**, Grecia, p. 75-98, 2017. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-319-51380-5_5

LOVIS, K.; FRANCO, V. As Concepções de Geometrias não Euclidianas de um Grupo de Professores de Matemática da Educação Básica. **Bolema**, Brasil, v. 29, n. 51, p. 369-388, 2015. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a19>

LOVIS, K.; FRANCO, V.; BARROS, R. Dificuldades e obstáculos apresentados por um grupo de professores de Matemática no estudo da geometria hiperbólica. **Zetetiké – FE/Unicamp**, v. 22, n. 42, p. 11-29, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.20396/zet.v22i42.8646565>

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, Brasil, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1516-73132003000200004>

MORENO-ARMELLA, L.; BRADY, C.; ELIZONDO, R. Dynamic hyperbolic geometry: building intuition and understanding mediated by a Euclidean model. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, México, v. 49, n. 4, p. 594-612, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1418915>

MORENO-ARMELLA, L.; ELIZONDO, R. La Geometría al encuentro del aprendizaje. **Educación Matemática**, México, v. 29, n. 1, p. 9-36, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.24844/EM2901.01>

OLIVEIRA, E.; FERREIRA, L. Desenvolvimento profissional e história da matemática: um exemplo a partir das geometrias não euclidianas. **Educ. Matem. Pesq.**, Brasil, v. 22, n. 2, p. 452-482, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p452-482>

PATAKI, I. **Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil. Disponível em: <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11236>

PEREIRA, L.; MANRIQUE, A.; ANTUNES, J. Revelaciones sobre la presencia de la geometría en la formación de profesores de matemáticas en Brasil (2001-2019). **Paradigma**, Brasil, v. XLIII, n. 1, p. 117-137, 2022. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=9041256>

PINTO, J. Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 15, n. 3, p. 647-670, 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16187>

PINTO, J. Geometrias Não Euclidianas com Geometria Dinâmica e as Funções Inversão em Relação à Circunferência e Projeção Estereográfica. **Currículo sem Fronteiras**, São Paulo, Brasil, v. 18, n. 3, p. 445-463, 2018. Disponível em: <https://www.curriculosemfronteiras.org/vol18iss2articles/leivas.pdf>

PINTO, J.; CARNEIRO, M. Triângulos Diferentes: Dos Planos Aos Geodésicos. **Educ. Matem. Pesq.**, Brasil, v. 13, n. 1, p. 77-93, 2011. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/3843>

PINTO, J.; PORTELLA, H.; MACHADO, H. Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na escola básica no Brasil com utilização do Geogebra. **TEMA**, Brasil, v. 14, n. 3, p. 210-221, 2017. <https://doi.org/10.15536/thema.14.2017.210-221.460>

PIVATTO, W.; SCHUHMACHER, E. As contribuições da engenharia didática enquanto campo metodológico para o ensino de geometria esférica. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 3, n. 1, p. 83-101, 2013. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/24877/1/Pivatto2013As.pdf>

PIVATTO, W.; SCHUHMACHER, E. Uma proposta à luz do conhecimento científico e habilidade didática necessária ao professor para o ensino de geometria não euclidiana. **R. Bras. de Ensino de C&T**, v. 7, n. 3, p. 12-26, 2014. Disponible en: <https://doi.org/10.3895/S1982-873X2014000300002>

PIVATTO, W.; SCHUHMACHER, E.; SILVA, S. A utilização de documentários enquanto organizadores prévios no ensino de geometria não euclidiana em sala de aula. **Acta Scientiarum**, v. 38, n. 1, p. 43-49, 2016. Disponible en: <https://doi.org/10.4025/actascieduc.v38i1.23293>

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. Mathematics teachers' knowledge and practices. En Gutiérrez, A.; Boero, P. **Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future**. Ed. Leiden: Brill, 2006, p. 461-494. Disponible en: https://doi.org/10.1163/9789087901127_017

RIBEIRO, D.; PEROVANO, A. Atividades investigativas para exploração de conteúdos da Geometria Esférica com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, Brasil, v. 9, n. 2, p. 20-34, 2020. Disponible en: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8084821>

ROCHA, M.; BERGAMASCHI, P.; NACIMENTO, D.; MARK, D.; AZEVEDO, P. O ensino da geometria como verdade "ABSOLUTA". **Brazilian Journal of Development**, Curitiba, Brasil, v. 6, n. 12, p. 95651-95666, 2020. Disponible en: <https://doi.org/10.34117/bjdv6n12-160>

SANTOS, C. **Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de matemática: uma proposta à produção de significados no estudo de geometria**. 2020. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, Brasil. Disponible en: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/38022>

SANTOS, C.; SOUZA, L. Meanings produced by future mathematics teachers when studying different geometric models. **Zetetiké**, Campinas, Brasil, v. 29, p. 1-17, 2021a. Disponible en: <https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661597>

SANTOS, C.; SOUZA, L. O estudo de Geometrias não Euclidianas nos cursos de Licenciatura em Matemática: mapeamento das IES públicas no Brasil. **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, p. 849-860, 2021b. Disponible en: <https://doi.org/10.29327/152614.8-10>

SILVA, A.; COSTA, G. Implicações pedagógicas na investigação histórica do estudo das geometrias não euclidianas, uma discussão sobre triângulos. **Revista História da Matemática para Professores**, Brasil, v. 8, n. 1, p. 1-11, 2022. Disponible en: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/78>

SINCLAIR, N.; BUSSI, M.; VILLIERS, M.; JONES, K.; KORTENKAMP, U.; LEUNG, A.; OWENS, K. Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. **ZDM mathematics Education**, n. 48, p. 691-719, 2016. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>

SINCLAIR, N.; CIRILLO, M.; DE VILLIERS, M. The learning and teaching of Geometry. En CAI, J. **Compendium for Research in Mathematics Education**, p. 457- 489, 2017. Disponible n: <https://eric.ed.gov/?id=ED581270>

SOARES, I.; ANTUNES, J.; CRISOSTOMO, E.; MARTINS, D. O estudo de geometria esférica na formação de professores de matemática: uma experiência baseada na utilização de materiais

manipuláveis. **Research, Society and Development**, Brasil, v. 10, n. 1, p. 1-14, 2021. Disponível en: <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v10i1.11646>

SOARES, I.; ANTUNES, J.; SOARES, L.; FERREIRA, L.; Y CRISOSTOMO, E. O uso de materiais manipuláveis na consolidação de conceitos de geometria esférica. En BATISTA, J. **Ensino de ciências e educação matemática**. Ed. Atena Editora, Paraná, Brasil, 2020, p. 71-83. Disponível en: <https://doi.org/10.22533/at.ed.152201606>

SONG, Y.; SCHWENZ, R. An Inquiry-Based Approach to Teaching the Spherical Earth Model to Preservice Teachers Using the Global Positioning System. **Journal of College Science Teaching**, Estados Unidos, v. 42, n. 4, p. 50-58, 2013. Disponível en: <https://www.nsta.org/resources/inquiry-based-approach-teaching-spherical-earth-model-preservice-teachers-using-global>

SOUZA, R. **Geometrias não-euclidianas na formação de professores**. 2022. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil. Disponível en: <https://doi.org/10.11606/D.45.2021.tde-09022022-202404>

SUKESTIYARNO, Y.; ZAID, K.; SUGIMAN, S.; WALUYA, B. Learning trajectory of non-Euclidean geometry through ethnomathematics learning approaches to improve spatial ability. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, Indonesia, v. 19, n. 6, p. 1-17, 2023. Disponível en: <https://doi.org/10.29333/ejmste/13269>

TARDIF, M. Los docentes en cuanto sujetos de conocimiento. En TARDIF, M. **Los saberes del docente y su desarrollo profesional**. Ed. Narcea, Madrid, España, 2014, p. 167-179. Disponível en: https://es.slideshare.net/Ramza_60/lossaberesdeldocenteysudesarrolloprofesionalpdf

VIVEROS, W. Las teorías no euclidianas y la filosofía de la ciencia como propuesta académica para comprender el funcionamiento del universo. **Boletínredipe**, Colombia, v. 8, n. 11, p. 50-57, 2019. Disponível en: <https://doi.org/10.36260/rbr.v8i11.847>

WASSERMAN, N.; STOCKTON, J. Horizon content knowledge in the work of teaching: a focus on planning. **For the Learning of Mathematics**, Canadá, v. 33, n. 3, p. 20-22, 2013. Disponível en: <https://www.jstor.org/stable/43894856>

Recebido: 11/10/2023
Aceito: 20/03/2024

Received: 10/11/2023
Accepted: 03/20/2024

Recibido: 11/10/2023
Aceptado: 20/03/2024

