ISSN Eletrônico: 1984-0187
ISSN Impresso: 1518-5648

https://doi.org/10.5212/OlharProfr.v.28.23560.013

Um olhar sobre a perspectiva das teorias de van Hiele e Registros de Representação Semiótica em tópicos de Geometria plana e espacial em livros didáticos para os anos finais do ensino fundamental

A look at the perspective of Van Hiele's theories and Semiotic Representation Records in plane and spatial Geometry topics in textbooks for the final Years of elementar school

Una mirada a la perspectiva de las teorias de Van Hiele y Registros de Representación Semiótica en temas de Geometría plana y espacial en los libros de texto de los útimos años de la escuela primaria

Renata Camargo dos Passos Barros[1]
https://orcid.org/0000-0002-5845-8482
Rui Marcos de Oliveira Barros[2]
https://orcid.org/0000-0001-9337-4770
Leticia Toniete Izeppe Bisconcim[3]
https://orcid.org/0000-0002-6746-9503

Resumo: Esta pesquisa tem por objetivo analisar como são apresentadas as relações entre figuras geométricas planas e espaciais na coleção "A Conquista da Matemática" (FTD). De natureza qualitativa com delineamento documental, a organização dos dados foi norteada por uma adaptação da Análise de Conteúdo de Bardin. As análises foram orientadas pela Teoria de van Hiele e pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, o que traz originalidade à pesquisa realizada. Os resultados revelaram que as atividades propostas que envolviam conceitos geométricos planos e espaciais são apresentadas de maneira sucinta nos volumes seis e nove da coleção, fator que implica, segundo os níveis do modelo de van Hiele, na interrupção no desenvolvimento do

[1] Doutoranda em Educação (PPE – UEM) na Linha de Pesquisa 2: Ensino, Aprendizagem e Desenvolvimento Humano. Mestra em Educação Matemática (PRPGEM – UNESPAR). Integrante do Grupo de Pesquisa Educação Escolar, Formação e Teoria Crítica. E-mail: renatapassosbarros@gmail.com

[2] Doutor em Matemática (ICMSC – USP). Mestre em Matemática (ICMSC – USP). Professor Associado do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM). E-mail: rmobarros@uem.br

[3] Doutora em Educação (PPE – UEM). Mestra em Letras (PLE – UEM). Integrante do Grupo de Pesquisa Educação Escolar, Formação e Teoria Crítica. E-mail: E-mail: xleticiax@gmail.com

pensamento geométrico do aluno. Este estudo também identificou que os tratamentos discursivos e figurais nem sempre são apresentados de modo simultâneo e de forma interativa, o que pode interferir na compreensão e, portanto, na aprendizagem do aluno.
Palavras-chave: Geometria. Figuras planas e espaciais. Níveis de van Hiele. Registros de Representação Semiótica.

Abstract: The aim of this research is to analyze how the relations between plane and spatial geometric figures are presented in the collection "A Conquista da Matemática" (FTD). Based on a qualitative nature with a documental design, the organization of the data was guided by an adaptation of Bardin's Content Analysis. The analysis was guided by van Hiele's Theory and Duval's Theory of Semiotic Representation Registers, which brings originality to the research carried out. The results revealed that the proposed activities involving plane and spatial geometric concepts are presented succinctly in volumes six and nine of the collection, a factor which implies, according to the levels of van Hiele's model, an interruption in the development of the student's geometric thinking. This study also identified that the discursive and figurative treatments are not always presented simultaneously and interactively, which can interfere with understanding and, therefore, student learning.
Keywords: Geometry. Plane and spatial figures. van Hiele's levels. Semiotic Representation Registers.

Resumen: Esta investigación tiene como objetivo analizar cómo se presentan las relaciones entre las figuras geométricas planas y espaciales en la colección "A Conquista da Matemática" (FTD). De naturaleza cualitativa con diseño do-cumental, la organización de los datos se orientó por una adaptación del Análisis de Contenido de Bardin. Los análisis se orientaron por la Teoría de van Hiele y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval, lo que aporta originalidad a la investigación realizada. Los resultados revelaron que las actividades propuestas que involucran conceptos geométricos planos y espaciales se presentan de forma sucinta en los volúmenes seis y nueve de la colección, factor que implica, según los niveles del modelo de van Hiele, una interrupción en el desarrollo del pensamiento geométrico del alumno. Este estudio también identificó que los tratamientos discursivos y figurativos no siempre se presentan de forma simultánea e interactiva, lo que puede interferir en la comprensión y, por tanto, en el aprendizaje del alumno.
Palabras-clave: Geometría. Figuras planas y espaciales. Niveles de van Hiele. Registros de Representación Semiótica.

Introdução

É inegável que a Geometria tem utilidades práticas e está presente em nossa vida cotidiana, revelando-se importante aos profissionais das mais diversas áreas (Araujo, 1994; Machado, 2001).

Pesquisas acerca do ensino de Geometria como as realizadas por Fischbein (1993); Kaleff, (1998); Fainguelernt (1999) e Kobayashi (2001) apontam que habilidades como visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas, podem ser desenvolvidas com processos adequados de ensino e aprendizagem de Geometria.

Todavia, em geral, a Geometria ensinada nas escolas não é compreendida pelos alunos. A apresentação equivocada devido à deficiência de manuais escolares e restrições advindas de recursos didáticos do professor, impede, muitas vezes, que o aluno participe do processo de construção do conhecimento e fique limitado à aplicação e reprodução de conceitos e fórmulas (Barros; Moran; Cassoli, 2023).

Uma das maneiras de organizar situações de ensino que facilitem a compreensão de conteúdos de Geometria é utilizar o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele (1957;

1986). Seu uso como aporte teórico permite investigar também as dificuldades em ensinar e aprender geometria. O modelo de desenvolvimento geométrico e as fases de aprendizagem desenvolvidas pelo casal van Hiele (1957; 1986) propõem um meio de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos e indicam caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro.

O ensino de Geometria, em sala de aula, segundo Duval (2005), envolve uma complexidade cognitiva devido à utilização da linguagem, por meio dos gestos, do olhar, e por uma associação de raciocínios que podem dificultar os processos de ensino e da aprendizagem.

No cenário de ensino e de aprendizagem, o Livro Didático (LD) é uma das ferramentas mais utilizadas pelos professores em sala de aula, segundo pesquisas como as de Lajolo (1996), Macedo, Brandão e Nunes (2019), Barros (2021) e Barros, Oliveira e Ferreira (2022). Assim, é necessário que o LD atenda às seguintes habilidades da Base Nacional Comum Curricular: (EF06MA17) - Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial; (EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros; (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos; (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles; (EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

O estudo da geometria envolve conceitos e procedimentos essenciais para resolver problemas do mundo físico e diversas áreas do conhecimento (Brasil, 2018) e, nesse sentido, o modelo de van Hiele (1986) é uma ferramenta para que isso seja averiguado.

Desse modo, esta pesquisa, de abordagem qualitativa e de natureza documental, segue uma adaptação da análise de conteúdo proposta por Bardin (2016) para a identificação de padrões relacionados aos níveis de van Hiele (1957; 1986) em enunciados de atividades, o que possibilitou a análise de como são apresentadas as relações entre figuras geométricas planas e espaciais na coleção “A Conquista da Matemática” (FTD) e refletir sobre as seguintes questões:

(1) A maneira como os tópicos de Geometria plana e espacial são apresentados e explorados ao longo dos quatro volumes da coleção é capaz de propiciar aos alunos possibilidades de compreensão, tanto na apresentação teórica quanto nas atividades propostas?

(2) O modo como os tópicos de Geometria plana e espacial são apresentados na coleção permite a transição entre o plano e o espaço e vice-versa, bem como a construção do pensamento geométrico?

Para refletir sobre essas questões, este artigo explora inicialmente, os principais aspectos da Teoria de van Hiele (1986) norteado pelos estudos de Usiskin (1982) e Crowley (1987). Na sequência, trata a Teoria dos Registros de Representação Semiótica – TRRS, de Duval (2003; 2004; 2005; 2011; 2012a; 2012b) aplicada à Geometria, evidenciando o conceito de figura (registro figural). Em seguida, apresenta a metodologia adotada, as análises realizadas e, por fim, as conclusões.

Os níveis de van Hiele

Os níveis de van Hiele (1957; 1986) constituem uma teoria do ensino e da aprendizagem do desenvolvimento do raciocínio em Geometria plana, sugerem cinco níveis hierárquicos de atividades adequadas com o estudo das figuras planas, no que se refere à sua identificação e construção. Podem ser usados tanto para orientar a formação como para avaliar as habilidades do aluno. A origem de tais considerações foram as teses de doutorado de Dina van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda em 1957.

O modelo percebe a aprendizagem em Geometria como um processo progressivo segundo uma sequência de cinco níveis de compreensão de conceitos, no qual cada nível é caracterizado por relações entre objetos de estudo e linguagem. A progressão de um nível para o seguinte se dá por meio da vivência de atividades adequadas e depende mais de aprendizagem do que de idade ou maturação. Nessa teoria, o aluno só atinge determinado nível de raciocínio após passar por todos os níveis inferiores.

Apresentamos a seguir resumidamente os níveis de van Hiele (1986).

NÍVEL 0 – VISUALIZAÇÃO ou RECONHECIMENTO: Estágio no qual o aluno opera seu raciocínio lógico (e geométrico) basicamente por meio da visualização. As figuras geométricas são reconhecidas pela aparência global da representação figural, o aprendiz consegue identificar triângulos, quadrados e outros objetos geométricos. No entanto, ainda não consegue explicitar as propriedades que as identificam, embora seja possível aprender o vocabulário geométrico, reconhecer formas específicas, reproduzir uma figura e realizar outras tarefas semelhantes.

NÍVEL 1 – ANÁLISE: Nível em que os alunos conseguem raciocinar acerca de conceitos geométricos, embora ainda o façam por meio da análise informal de partes e atributos dos registros figurais. Neste estágio, discernem características das figuras geométricas e percebem propriedades que auxiliam a construção conceitual de classes de objetos geométricos e suas formas. Entretanto, não explicitam inter-relações entre registros figurais ou propriedades.

NÍVEL 2 – DEDUÇÃO INFORMAL ou ORDENAÇÃO: Neste nível, o aprendiz já forma e compreende definições abstratas, podendo estabelecer inter-relações de propriedades de figuras (por exemplo, um quadrilátero com lados opostos paralelos, necessariamente, possui ângulos opostos iguais) e entre figuras (um quadrado é um retângulo porque ele possui todas as propriedades do retângulo). Desse modo, classes de figuras são reconhecidas, inclusão e intersecção de classes são compreendidas. Entretanto, neste estágio, ainda não é possível que o aluno compreenda o significado de uma dedução lógica como um todo. Os aprendizes não percebem como construir uma prova (argumentação consistente), partindo-se de premissas diferentes.

NÍVEL 3 – DEDUÇÃO FORMAL: Neste nível, os alunos são capazes de perceber o significado da dedução lógica como forma de estabelecimento da teoria geométrica. Estão aptos a compreender formas lógicas-dedutivas de discurso e entender sua validade universal. Crowley (1987) afirma que um aluno, nesse nível, compreende o papel de termos indefinidos, axiomas, definição, teoremas e demonstrações. O aprendiz é capaz de realizar tarefas mais complexas de demonstração com menor dependência do particular registro figural em que se apoia.

NÍVEL 4 – RIGOR: Neste estágio, os alunos avaliam vários sistemas dedutivos com alto grau de rigor. Conseguem trabalhar em uma variedade de sistemas axiomáticos, ou seja, geometrias não euclidianas podem ser estudadas, e diferentes sistemas podem ser comparados. Os alunos já conseguem manipular os objetos geométricos, independente do conteúdo que o registro figural carregue. O aprendiz consegue acompanhar deduções lógicas em uma teoria formalizada devido apenas à compreensão das relações lógico sintáticas, não tendo mais a necessidade de pensar em possíveis propriedades euclidianas dos registros figurais.

A partir de suas investigações iniciais, os van Hiele (1986) conseguiram desenvolver uma organização/estrutura para as experiências com os níveis de pensamento, com o propósito de auxiliar a criança a desenvolver *insight* em Geometria. Para os pesquisadores, uma pessoa manifesta *insight* quando: (a) possui habilidades de se sobressair em uma situação não convencional; (b) é assertiva em ações requeridas pela situação; (c) desenvolve intencionalmente e conscientemente uma técnica para solucionar determinada situação. Para terem insights, as crianças compreendem tudo o que estão fazendo. Elas têm a capacidade de aplicar seu conhecimento de maneira organizada para resolver os problemas.

Todavia, os problemas geométricos são apresentados aos aprendizes pelos professores, os quais nem sempre têm consciência das dificuldades advindas da interpretação de enunciados e de registros figurais. Kaleff (1998; 2008) evidencia que as tarefas apresentadas às crianças comumente requerem vocabulário, conceitos ou apropriação de propriedades que estão além do seu nível de pensamento. Segundo Freudenthal (2002), quando o ensino ocorre em um nível superior ao da criança, o conteúdo não é bem assimilado e não fica retido por muito tempo em sua memória, assim como concepções erradas, quando aprendidas, parecem persistir.

As pesquisas de van Hiele (1957; 1986) apontam para a falta de harmonia entre o ensino e o aprendizado em matemática. Em uma sala de aula, comumente se encontram crianças que estão em diferentes níveis de pensamento, diferem-se umas das outras e do modo de pensar de seu professor, usam termos, palavras e objetos de maneiras diferentes das utilizadas pelos seus professores e pelo livro didático adotado. Para van Hiele (1957; 1986), é evidente que o crescimento cronológico das idades não gera espontaneamente um crescimento nos níveis de pensamento e que, definitivamente, pouquíssimas crianças atingirão o último nível.

Para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem em Geometria, van Hiele (1957; 1986) descreveu cinco fases com o intuito de auxiliar os professores durante a elaboração das atividades. Barros (2021) explicita resumidamente as cinco fases que norteiam a confecção de tarefas por parte dos professores.

FASE 1 – QUESTIONAMENTO OU INFORMAÇÃO: Fase na qual professor e aluno discutem sobre atividades e objetos a serem estudados. Observações são feitas, questões levantadas e o vocabulário específico para o nível em que se encontram é apresentado ao aluno. Nesta etapa, o professor pode avaliar o conhecimento prévio de seus alunos acerca dos conteúdos a serem estudados.

FASE 2 – INDAGAÇÃO INFORMADA: O professor deve ser bem criterioso nas escolhas dos materiais para que seus alunos possam, por meio deles, explorá-los. As tarefas devem ser curtas e destinadas a obter respostas específicas revelando gradualmente aos alunos as estruturas características do nível em que estão.

FASE 3 – ORIENTAÇÃO DIRIGIDA: Deve haver a estimulação de situações nas quais os alunos tenham de se expressar e transmitir ideias uns aos outros. Esse tipo de atividade, feita sob a orientação do professor, deve prezar pelo uso de linguagem própria e adequada ao nível. Os alunos, por meio de suas experiências anteriores, expressam verbalmente e com simbologia adequada, suas visões sobre as estruturas ou conceitos que foram observados.

FASE 4 – EXPLICAÇÃO: As tarefas devem ser apresentadas ao aluno com maior grau de dificuldade e com maior número de etapas a serem realizadas. De preferência, devem ser fornecidas tarefas que possuam vários caminhos de resolução, ou mesmo, tarefas que possuam várias respostas, ou ainda, tarefas abertas. Os alunos adquirem experiência ao buscarem, por eles mesmos, soluções das tarefas. Quando as tarefas proporcionam uma investigação, a maioria das relações entre os objetos de estudo acabam se tornando mais evidentes aos alunos.

FASE 5 – ORIENTAÇÃO LIVRE E A ORIENTAÇÃO: É nesta fase que os alunos revisam, comparam e sintetizam o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações. O professor pode contribuir apenas auxiliando-os na elaboração da síntese, porém sem agregar conceitos até aqui não estudados por eles.

De acordo com a Teoria de van Hiele (1957; 1986), com exceção da fase cinco, as demais podem ocorrer em qualquer ordem ou até mesmo simultaneamente.

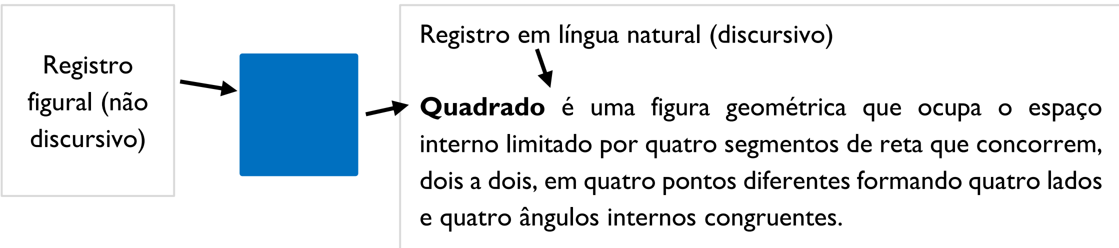
A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a aprendizagem em Geometria

A aprendizagem em Geometria, segundo Duval (2004), requer uma atividade cognitiva específica, que não está ligada a uma situação de interação social, nem subordinada a um jogo de pressões internas de um objeto. Isso ocorre porque, segundo ele, as figuras podem impor resistências à aprendizagem derivadas de fatores intrínsecos à sua representação figural.

Duval (2005) considera a Geometria uma área exigente da Matemática, pois desperta o olhar, a linguagem e o gesto. Segundo o pesquisador, ela precisa da organização simultânea de pelo menos dois tipos de Registros de Representação Semiótica: o registro discursivo em língua materna e o registro figural.

Na Figura 1, podemos identificar os dois tipos de registros para o objeto geométrico “quadrado”.

FIGURA 1 – Exemplo de registro figural e discursivo



Fonte: Os autores.

Os registros figurais podem (ou não) ser acompanhados pelos registros discursivos. Estes podem aparecer grafados no texto, em língua natural com respaldo escrito, ou podem ser pronunciados verbalmente por alunos e professores em língua materna com suporte verbal. Neste contexto, para que exista atividade cognitiva - no nosso caso particular, para que haja pensamento geométrico - é essencial a interiorização de representações semióticas.

A utilização de registros figurais e discursivos são indispensáveis no diálogo pretendido pelo professor em seu trabalho na sala de aula. Flores e Moretti (2005) explicam que é impossível haver comunicação entre dois ou mais indivíduos sem um suporte midiático comum a todos os envolvidos. Os autores apontam para o fato de que a função da comunicação é a de transmitir uma mensagem ou informar indivíduos, o que requer o uso de um código comum entre eles.

Sendo assim, o uso de registros é intrínseco tanto ao funcionamento cognitivo do pensamento humano quanto à sua comunicação. Duval (2012b) esclarece que, em se tratando da Geometria, não se pode ter produção ou compreensão acerca de um objeto ou propriedade geométrica sem o manejo de registros: "Se é chamada 'semiose' a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e 'noesis' a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a noesis é inseparável da semiose" (Duval, 2012b, p. 270).

Duval (2012b) aponta duas operações que podem ser realizadas na manipulação de registros semióticos, o tratamento e a conversão. O tratamento é uma operação realizada em registros, mas que fornece um registro final da mesma classe ou do mesmo sistema do registro inicial. Por exemplo, quando um aluno realiza o preenchimento da região interna de um triângulo, ele está realizando um tratamento no registro figural. Por sua vez, a conversão realizada em uma representação é uma transformação que fornece um registro final contido em uma classe, ou em um sistema, diferente do registro inicial. Por exemplo, quando um aluno recebe uma tarefa em registro escrito e tem de esboçar uma figura geométrica, ele terá de realizar uma conversão de registros.

Os tratamentos figurais "são operações que podem ser efetuadas materialmente ou mentalmente sobre [...] uma figura geométrica, para obter uma modificação figural desta figura" (Duval, 2012b, p. 287). Em relação à figura, esses tratamentos podem caracterizar uma atividade cognitiva que permite "a possibilidade de modificação que surge da relação das partes com o todo, por exemplo, relações ópticas (visuais) ou posicionais de uma figura" (Duval, 2004, p. 162, tradução nossa).

No entanto, é importante destacar que tratamentos figurais podem até dificultar a aprendizagem de Geometria. Tal dificuldade estaria na "proximidade entre tratamentos relevantes e irrelevantes dentro de um mesmo registro, e a falta de coordenação entre tratamentos que provêm de diferentes registros" (Kluppel; Brandt, 2012, p. 120).

Para Duval (2012a), as tarefas mais importantes para a aprendizagem são as que exigem conversões entre o registro figural e o registro discursivo, pois é dessa maneira que se realiza a produção de conhecimento matemático, tendo em vista que essas conversões exigem o uso do pensamento geométrico.

O pensamento geométrico, segundo Duval (2012a), envolve três processos cognitivos com funções epistemológicas específicas: o processo de visualização (representação visual); o processo de construção (construção da figura) e o processo de raciocínio (que conduz para a prova e à explicitação). O que se deseja, ao considerar o modelo de van Hiele (1986), é que as atividades propostas ao aprendiz o auxiliem a desenvolver esse pensamento geométrico, principalmente quando são abordados temas de Geometria plana e de Geometria espacial concomitantemente.

Apesar de formas planas e espaciais estarem presentes em coleções de livros didáticos desde os anos iniciais do ensino fundamental, como apontam Bardini; Amaral-Schio; Mazzi (2019), o que observamos é que muitos alunos chegam aos anos finais sem reconhecer as diferenças entre a representação geométrica de um triângulo e a de uma pirâmide, conforme já evidenciava Araújo (1994):

> É fácil encontrar-se, entre alunos das diferentes séries, ou até mesmo entre professores, aqueles que confundem o cubo com o quadrado; não identificam propriedades comuns ao quadrado e ao losango, ou ao quadrado e ao retângulo; mudam o conceito que têm de determinadas figuras geométricas quando as mesmas (*sic*) são graficamente representadas em posição diferente daquela em que geralmente aparecem nos livros didáticos; não aceitam que figuras geométricas, limitadas por fronteiras, são formadas por infinitos pontos, pois consideram que, sendo a quantidade de pontos infinita, não deveria ser limitada; não concebem o plano como espaço, o que nos leva a concluir que para eles, figuras de três dimensões são as únicas espaciais (Araújo, 1994, p. 13).

Após considerar o protagonismo dos registros figurais e discursivos (e conversões) para a aprendizagem de Geometria, bem como pesquisas de Araújo, (1994); Kluppel e Brandt, (2012); Imafuko, (2019); Settimy e Bairral (2020), temos reveladas as dificuldades para tal aprendizagem, principalmente no que diz respeito à dificuldade na transição de objetos geométricos planos para espaciais.

Figuras Geométricas

No contexto desta pesquisa, é importante esclarecer o significado da palavra "figura", pois tal expressão tem sido utilizada na literatura com diversos significados. A palavra "figura", dependendo do contexto, pode assumir um significado diferente daquele empregado nos estudos em Geometria (Barros, 2021). É comum observar o uso do termo "figura" quando se quer indicar a representação de algum objeto ou imagem, seja em livros, revistas, jornais ou até mesmo em um quadro. Pesquisadores como Duval (2012a) definem uma figura como sendo:

> Uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo. Segundo a sua dimensão, estes elementos podem ser pontos, traços ou zonas. Os pontos e os traços caracterizam-se, respectivamente, pelo aspecto discreto e contínuo. As zonas caracterizam-se pela sua forma, quer dizer, pelo seu contorno: um traço ou uma sequência de pontos suficientes para destacar uma zona de um campo homogêneo (Duval, 2012a, p. 121).

Outra pesquisadora que contribuiu significativamente para uma conceitualização do termo em questão é Kaleff (2008). Para a autora,

> o termo figura designa qualquer organização de elementos gráficos que emerge de um fundo uniforme por meio da presença de pontos, traços ou elementos de uma superfície (sombreados ou coloridos), representando uma unidade (ou congregação de elementos) de informação. Uma figura pode ser apresentada em um meio gráfico

> convencional (papel) ou especial (tela de vídeo, tecelagem, pintura, murais e outros). Por sua vez, uma figura é considerada uma figura matemática quando preenche exigências específicas relativas a duas maneiras de ser representada: por um lado, em uma forma de proposições expressas em linguagem natural ou simbólica formal, representando suas propriedades matemáticas características (Kaleff, 2008, p.16).

Nesse sentido, o significado da palavra "figura" e da expressão "figura matemática" deve ser bem explorado em situações matemáticas. Colaborando com esse pensamento, Duval (2012a) esclarece que uma figura geométrica é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva, pois é necessário ver a figura geométrica a partir do que é falado, e não apenas por meio das formas que se destacam ou das propriedades que ela possa evidenciar. Este é o sentido empregado para o termo figura nesta pesquisa.

Para esclarecer a busca, no material analisado, de respostas para os questionamentos apontados anteriormente, explanaremos sobre os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa.

Procedimentos metodológicos

A organização dos dados da pesquisa, de cunho documental (Gil, 2002), foi norteada por uma adaptação da análise de conteúdo proposta por Bardin (2016). Essa escolha se deu devido à sua capacidade de estruturar e interpretar informações textuais de forma sistemática. O uso da Análise de Conteúdo como metodologia possibilitou a identificação de padrões nos enunciados das atividades e também nas ilustrações da referida coleção, o que possibilitou a identificação de categorias relacionadas com os níveis de van Hiele de maneira significativa e válida. Desse modo, a organização da análise consistiu-se em três fases: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados.

Primeiramente, constituímos a fase de pré-análise, na qual foi definida a temática central da investigação e o objetivo do estudo, selecionados os volumes a serem analisados e formulados os critérios para fundamentar a interpretação final dos dados. Ainda nessa etapa, foi realizado um levantamento de pesquisas relacionadas ao tema deste estudo.

A partir da exploração do material, foram definidos quais volumes e unidades da coleção abordam conteúdos relacionados às relações entre figuras planas e espaciais em conformidade com o atual documento norteador da educação básica: (I) Volume 6 – Unidade 3: Figuras Geométricas – Capítulo 3: Figuras geométricas e Capítulo 4: Sólidos geométricos; (II) Volume 7 – Não contempla; (III) Volume 8 – Não contempla; (IV) Volume 9 – Unidade 8: Figuras Espaciais – Capítulo 3: Projeção ortogonal e Vistas ortogonais.

Também na fase de exploração do material, foram estipulados os critérios que subsidiaram as análises. Os critérios relacionados aos níveis de van Hiele (1957; 1986) considerados foram os seguintes: NÍVEL 0: (i) Identificar se as formas apresentadas no material permitem que o aluno realize comparações e consiga nomeá-las por sua aparência global; (ii) Verificar se as tarefas oportunizam o manuseio das figuras geométricas em diferentes posições; (iii) Identificar se o material apresenta situações relacionadas ao cotidiano do aluno, para que este possa estabelecer relações entre esses objetos, averiguando se são pertinentes ao nível de ensino. NÍVEL 1: (i) Verificar se as situações apresentadas permitem a identificação das propriedades básicas de cada figura geométrica pelo aluno; (ii) Identificar se as tarefas possibilitam ao aluno determinar, entre as figuras fornecidas, propriedades que as diferenciam umas das outras. NÍVEL 2: (i) Verificar a presença de exemplos, tarefas e atividades que promovam a argumentação lógica informal; (ii) Identificar situações que favoreçam a ordenação ou inclusão de figuras geométricas em classes. NÍVEL 3: Verificar se as atividades favorecem o processo dedutivo e se auxiliam nas demonstrações. NÍVEL 4: Não foi abordado na pesquisa. Não se aplica a alunos do ensino fundamental.

Em relação a TRRS, o critério adotado foi o de identificar atividades que indicassem mobilização de apreensões perceptivas, discursivas sequenciais e operatórias para a compreensão das relações entre figuras planas e espaciais.

A terceira e última fase da pesquisa consistiu no tratamento dos resultados e interpretação dos dados. Nessa fase, foram observadas as sequências de atividades apresentadas em cada volume, bem como as representações figurais utilizadas. Em especial, foram observados atentamente os seguintes itens: a) As interações entre os dois tipos de registros: o registro na língua natural (registro discursivo) e o registro figural (registro não discursivo) Duval (2003; 2004); b) Atividades que indiquem preocupação em construir conhecimento novo a partir de conhecimentos anteriores já dominados ou em vias disso (van Hiele, 1986).

Análise e discussão dos resultados

Para organizar melhor os resultados, iniciaremos as discussões pelo volume 6 e, em seguida, abordaremos o volume 9, destacando todas as situações que ilustram a transição entre figuras planas e espaciais. Observamos, novamente, que os volumes 7 e 8 não apresentam situações relacionadas com nossa pesquisa, o que está de acordo com a BNCC.

No que diz respeito às formas geométricas planas e espaciais, de acordo com a BNCC, o ensino de Geometria deve ser realizado de maneira a revisitar conceitos estudados nos anos anteriores, de modo a estabelecer a consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas anteriormente (Brasil, 2018).

O volume 6 da coleção analisada contém nove unidades. Dessas, apenas a unidade 3 (Capítulos 3 e 4) trata das figuras geométricas, sendo as relações entre figuras planas e espaciais realizadas de maneira superficial. Assim, este estudo dedicou-se, inicialmente, às tarefas que sugerem às possíveis relações entre as figuras planas e espaciais apresentadas em dois capítulos do volume 6 (6º ano).

O objetivo desses capítulos, de acordo com as orientações ao professor (Livro do professor), é explorar as figuras espaciais – prisma, pirâmide, cone, cilindro e esfera.

Na figura 2, é possível identificar a maneira como as figuras espaciais são introduzidas e exploradas pelos autores no livro.

FIGURA 2 – Apresentação de conceitos sobre figuras geométricas

Fonte: Giovanni; Giovanni Jr; Castrucci (2018a, p. 89).

Nessa apresentação do Capítulo 3, percebemos uma breve relação entre objetos planos e espaciais. A situação ilustra um garotinho realizando o contorno de um "dado/prisma", tarefa que poderia ser conduzida de modo a explorar a figura plana denominada "quadrado" e as características que a compõem. No entanto, a situação apresentada aponta apenas para o elemento "face", e, desse modo, o estabelecimento de tais relações fica a cargo do professor, o que pode não ocorrer caso o professor não possua vivências e experiências (Almouloud *et al.* 2004; Barros; Moran; Cassoli, 2023). Além disso, segundo Santos e Amâncio (2021), tarefas que possibilitam ao aluno manipular objetos espaciais podem permitir uma análise de suas características globais, o que, de acordo com Crowley (1987), são características que assinalam o Nível 0 do modelo de van Hiele (1957; 1986).

Em relação à TRRS, observamos a associação dos registros figural e discursivo quando introduzem exemplos do mundo físico (laranja, embalagens de creme dental e de chocolate) para uma possível associação com a esfera e alguns prismas, o que, de acordo com Duval (2012a), é essencial para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Após essa breve introdução, atividades já são propostas (Figura 3). Analisando o contexto, é possível inferir que atividades que demandam a visualização e o reconhecimento (Nível 0) da teoria de van Hiele (1986), se fazem presentes, porém, demandarão muito da condução do professor em sala de aula.

FIGURA 3 – Tarefas que abordam figuras geométricas


ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Pense no mundo à sua volta e liste objetos da natureza ou construídos pelo ser humano que lembram figuras geométricas.
2. Classifique as figuras geométricas da atividade anterior em planas ou não planas.
3. Entre os elementos descritos nas fichas a seguir, escreva quais nos dão a ideia de:
   a) uma figura geométrica plana;
   b) uma figura geométrica não plana.

folha de papel

garrafa de água

tela de um quadro

lata de extrato de tomate

dado

superfície do tampo de uma mesa

tubo de cola bastão

4. O professor de Geografia pediu aos estudantes que desenhassem em uma folha de papel o mapa do estado onde nasceram. O desenho que eles fizeram representa uma figura geométrica plana ou não plana?

IMAGENS FORA DE PROPORÇÃO.

5. São figuras planas ou não planas?
   a) A planta de uma casa desenhada em papel vegetal.
   b) A maquete dessa mesma casa.

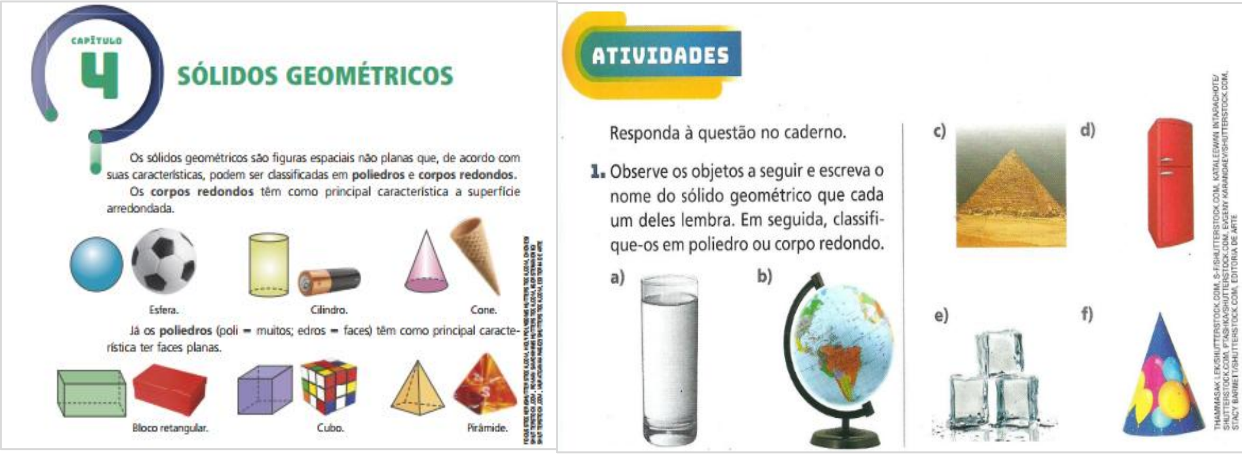
Fonte: Giovanni; Giovanni Jr; Castrucci (2018a, p. 90).

A questão 1, de acordo com o modelo de van Hiele (1986), encontra-se no nível 0, no qual o aluno precisa apenas identificar objetos geométricos utilizando a percepção visual. Já as questões de 2 a 5, requerem mais do que um simples reconhecimento. Para classificar figuras planas e não planas, se faz necessária uma análise em termos dos componentes envolvidos e das respectivas propriedades, considerando o que é essencial. Isso caracteriza o Nível 1 no modelo de van Hiele (1986).

Na apresentação dessas tarefas não se identifica a sincronia entre registros figural (registro não discursivo) e registro na língua natural (registro discursivo).

O tratamento entre figuras planas e não planas é realizado apenas nas páginas (89 e 90), evidenciando novamente que, considerando apontamentos da BNCC (Brasil, 2018), ficará a cargo do professor realizar ou não as relações que deveriam se fazer presentes na própria atividade. Em seguida, no capítulo quatro, é explorado o conceito dos sólidos geométricos e sua classificação em poliedros e corpos redondos, como podemos observar na Figura 4.

FIGURA 4 – Conteúdo e tarefas que abordam figuras geométricas



Fonte: Giovanni; Giovanni Jr; Castrucci 2018a, p. 91).

Conforme apontam Santos e Amâncio (2021), as tarefas devem ser apresentadas aos alunos de maneira que estes possam manipular, explorar e construir uma linguagem geométrica própria, a partir da qual possam perceber diferenças e semelhanças entre as formas, como sugere Van de Walle (2009), de maneira a se apropriarem da linguagem geométrica formal (poliedros e corpos redondos).

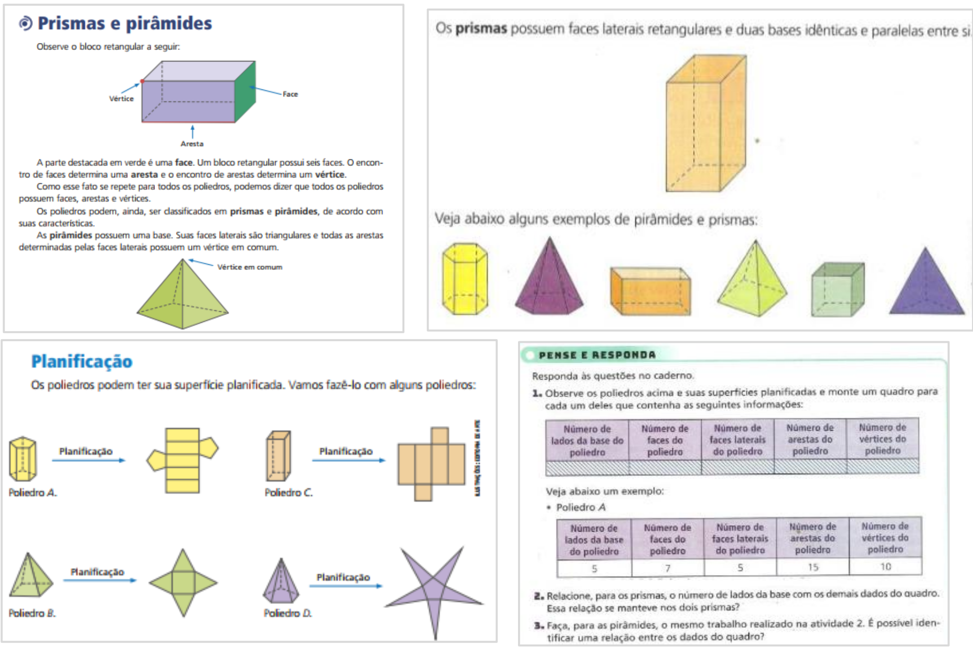
No entanto, o livro apresenta situações nas quais a nomenclatura já é apresentada, e os conceitos aparecem prontamente sem possibilitar a manipulação entre as formas, como tarefas que envolvem moldes de planificações de sólidos geométricos que permitem a construção ou a desconstrução de figuras espaciais, ou seja, as quais permitem ao aluno a exploração de conceitos que surgem durante o manuseio dessas formas. Ao manusearem formas espaciais, os alunos podem identificar que algumas formas apresentam quinas e outras não (formas arredondadas), surgindo então a necessidade de um nome especial para diferenciá-las e uma classificação entre elas (poliedro ou um corpo redondo), como aponta Van de Walle (2009). Assim, o aluno, em uma mesma seção de tarefas, tem a oportunidade de desenhar, construir, fazer, compor e decompor formas bi e tridimensionais, de maneira a transitar do nível 0 para o nível 1, o que, conforme o modelo de van Hiele (1986), pode ser de grande relevância para o desenvolvimento do pensamento geométrico entre os níveis.

A atividade 1 (Figura 4), consiste em nomear as figuras apresentadas. É uma atividade que requer do aluno muito mais do que um simples reconhecimento, ou seja, os alunos devem analisá-las e ordená-las quanto a suas classes (classificá-las), o que já seria uma característica do Nível 2, o da abstração no modelo de van Hiele (1986).

Nessa atividade 1, o registro discursivo deveria acompanhar o registro figural como apresentado no início. Poderia ser uma atividade de associação, capaz de permitir ao aluno dialogar com seu registro discursivo (nomenclatura e classificação). Segundo Duval (2004), a figura constitui uma situação geométrica somente na medida em que os conceitos de certas unidades figurais e algumas de suas associações estejam claramente definidas. Podemos inferir que por se tratar de uma primeira atividade, essa percepção pode ainda não estar consolidada.

A seguir, na Figura 5, é possível observar situações que podem mobilizar no aluno as apreensões: perceptiva, discursiva e operatória. Nelas, são exploradas as planificações de figuras espaciais (prisma e pirâmide), o que permite ao aluno manipular formas em ambos os espaços (bi e tridimensionais).

FIGURA 5 – Apresentação de conceitos sobre figuras geométricas



Prismas e pirâmides

Observe o bloco retangular a seguir:

A parte destacada em verde é uma **face**. Um bloco retangular possui seis faces. O encontro de faces determina uma **aresta** e o encontro de arestas determina um **vértice**.

Como esse fato se repete para todos os poliedros, podemos dizer que todos os poliedros possuem faces, arestas e vértices.

Os poliedros podem, ainda, ser classificados em **prismas** e **pirâmides**, de acordo com suas características.

As **pirâmides** possuem uma base. Suas faces laterais são triangulares e todas as arestas determinadas pelas faces laterais possuem um vértice em comum.

Os **prismas** possuem faces laterais retangulares e duas bases idênticas e paralelas entre si.

Veja abaixo alguns exemplos de pirâmides e prismas:

Planificação

Os poliedros podem ter sua superfície planificada. Vamos fazê-lo com alguns poliedros:

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Observe os poliedros acima e suas superfícies planificadas e monte um quadro para cada um deles que contenha as seguintes informações:

Número de lados da base do poliedro	Número de faces do poliedro	Número de faces laterais do poliedro	Número de arestas do poliedro	Número de vértices do poliedro

Veja abaixo um exemplo:

- Poliedro *A*

Número de lados da base do poliedro	Número de faces do poliedro	Número de faces laterais do poliedro	Número de arestas do poliedro	Número de vértices do poliedro
5	7	5	15	10

2. Relacione, para os prismas, o número de lados da base com os demais dados do quadro. Essa relação se manteve nos dois prismas?

3. Faça, para as pirâmides, o mesmo trabalho realizado na atividade 2. É possível identificar uma relação entre os dados do quadro?

Fonte: Giovanni; Giovanni Jr; Castrucci (2018a, p. 92 e 93).

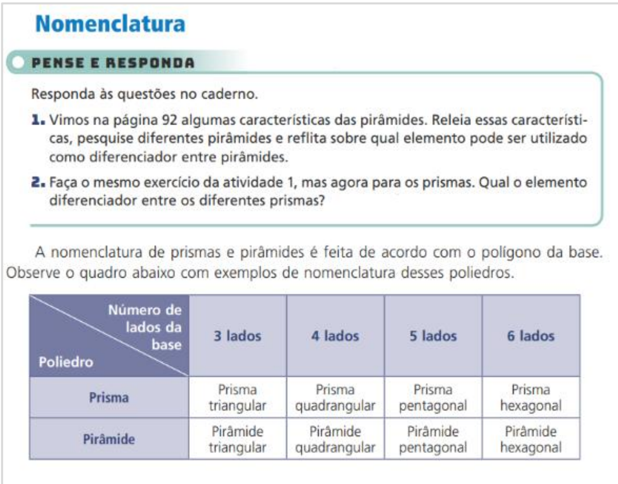
Essas situações poderiam ser apresentadas com a indicação de serem exploradas com o aluno de maneira que ele pudesse confeccionar planificações e fazer identificações nas próprias planificações e não apenas nas imagens apresentadas no livro. Quando os alunos podem recortar e montar a própria figura, eles não apenas pensam nas figuras pela aparência, mas já seriam capazes de as classificarem quanto aos aspectos de uma classe. Dessa maneira, eles poderiam pensar, por exemplo, nas características comuns entre figuras planas e as não-planas. Portanto, seriam capazes de identificar propriedades das formas por meio da investigação e experimentação (Nível 3).

Todavia, o registro discursivo não se faz presente. A nomenclatura (registro discursivo) de cada figura não é explorada simultaneamente com o registro figural. A aprendizagem em Geometria, requer a valorização de um trabalho pautado na articulação entre o registro figural e a linguagem natural e os possíveis tratamentos oferecidos para cada registro, pois como apontam Kluppel e Brandt (2014, p. 120),

> A necessidade de coordenação entre os tratamentos em dois registros (figurais e discursivos) contraria o que se pratica espontaneamente e, ainda, exige uma aprendizagem separada das operações demandadas em cada um destes registros, construindo, dessa forma, as condições necessárias para a aprendizagem em Geometria.

Os tratamentos acerca de figuras são finalizados nas atividades das Figuras 6 e 7.

FIGURA 6 – Atividades



Nomenclatura

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Vimos na página 92 algumas características das pirâmides. Releia essas características, pesquise diferentes pirâmides e reflita sobre qual elemento pode ser utilizado como diferenciador entre pirâmides.
2. Faça o mesmo exercício da atividade 1, mas agora para os prismas. Qual o elemento diferenciador entre os diferentes prismas?

A nomenclatura de prismas e pirâmides é feita de acordo com o polígono da base. Observe o quadro abaixo com exemplos de nomenclatura desses poliedros.

Poliedro / Número de lados da base	3 lados	4 lados	5 lados	6 lados
Prisma	Prisma triangular	Prisma quadrangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal
Pirâmide	Pirâmide triangular	Pirâmide quadrangular	Pirâmide pentagonal	Pirâmide hexagonal

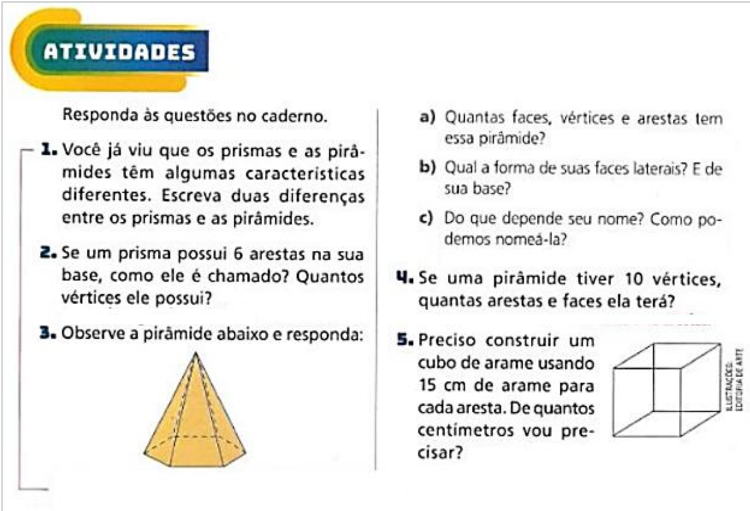
Fonte: Giovanni; Giovanni Jr; Castrucci (2018a, p. 94).

É possível identificar que o modo como os autores apresentam e conceituam prismas e pirâmides pode desfavorecer a construção do raciocínio geométrico pelo aluno. Ao compararmos a sequência da abordagem dos conceitos como apontados pelas Figuras 6 e 7, identificamos a ausência da sincronia entre os tipos de registros. Quando apresentam o registro figural (Figura 6) para abordarem prismas e pirâmides, o registro em língua natural não os acompanha e, quando apresentam o registro discursivo (Figura 6), o registro figural não se faz presente.

Essas tarefas deveriam mobilizar nos alunos a transição entre os níveis 1 e 2 do modelo de van Hiele (1986), embora, para que isso realmente acontecesse, deveriam obedecer aos critérios elencados nessa pesquisa referentes a cada um dos níveis. As atividades e situações aqui escolhidas e exploradas no livro pelos autores negligenciam essa transição entre os níveis e não permitem a articulação entre os registros.

Para finalizar, trazemos as atividades presentificadas na Figura 7, as quais demandam dos alunos o domínio de conceitos e habilidades de classificação, ordenação e argumentação lógica informal (Nível 2).

FIGURA 7 – Atividades



ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Você já viu que os prismas e as pirâmides têm algumas características diferentes. Escreva duas diferenças entre os prismas e as pirâmides.

2. Se um prisma possui 6 arestas na sua base, como ele é chamado? Quantos vértices ele possui?

3. Observe a pirâmide abaixo e responda:

a) Quantas faces, vértices e arestas tem essa pirâmide?

b) Qual a forma de suas faces laterais? E de sua base?

c) Do que depende seu nome? Como podemos nomeá-la?

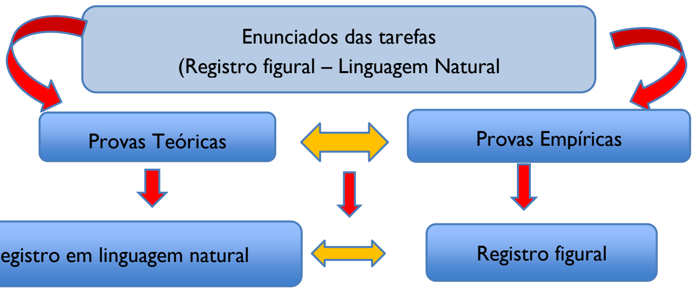
4. Se uma pirâmide tiver 10 vértices, quantas arestas e faces ela terá?

5. Preciso construir um cubo de arame usando 15 cm de arame para cada aresta. De quantos centímetros vou precisar?

Fonte: Giovanni; Giovanni Jr; Castrucci (2018a, p. 94).

Essas atividades evidenciam mais uma vez a ausência de sincronia entre os registros. Outro relevante é que muitos alunos podem não conseguir abstrair apenas por meio da linguagem natural (questões 1 – 2 – 4) suas respostas, pois ainda não conseguem associar mentalmente a sincronia entre o desenho (registro figural) e o registro discursivo (linguagem natural). A Figura 8 representa como um aluno pode realizar a mobilização entre os tipos de registros durante uma tarefa em Geometria.

FIGURA 8 – Diagrama da mobilização dos registros de acordo com a TRRS

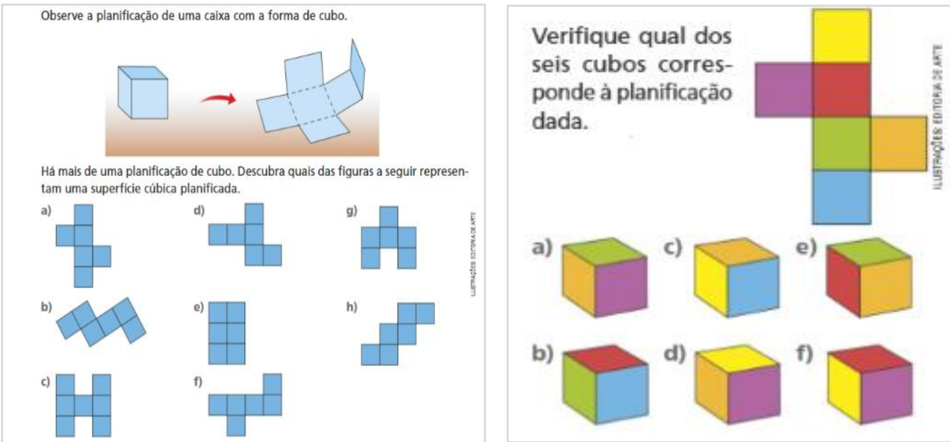


Fonte: Os autores (2025).

As setas duplas simbolizam a articulação necessária entre as categorias de provas capaz de potencializar essa conexão entre os registros. Como sugere o diagrama apresentado na Figura 8, é o trabalho em sincronia com essas duas categorias que permite partir de um registro em linguagem natural, trabalhar com o registro figural e retornar ao registro em linguagem natural, ou seja, permitir a saída de um registro e retornar a este, trabalhando com conversões em sentidos contrários, envolvendo uma prática equivocada e evidenciada por Duval (2003, p. 20) "no ensino, um sentido de conversão é privilegiado" quando segundo o autor, "nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida de chegada" (*Ibidem*, p. 20).

As últimas atividades envolvem a planificação do cubo (Figura 9). Novamente, as relações entre as figuras bi e tridimensionais são deixadas para segundo plano. As atividades apenas sugerem a identificação das possíveis planificações para o cubo e não ampliam para o tratamento da figura plana que compõe a face do prisma.

FIGURA 9 – Atividades



Fonte: Giovanni; Giovanni Jr; Castrucci (2018a, p. 95).

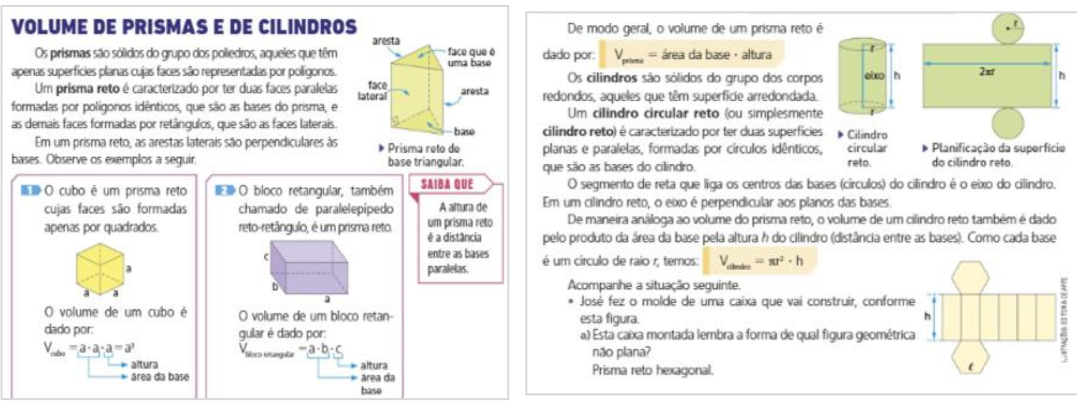
Embora o livro apresente algumas sugestões e atividades que poderiam promover a investigação pelos alunos, em sua maioria elas não promovem a construção do pensamento geométrico, visto que, ao abordarem na Unidade 3 – Capítulo 4 (Os Sólidos Geométricos), os autores não exploram conceitos de figuras planas a partir das figuras espaciais. Assim, considerando as teorias que norteiam nossa pesquisa e com os critérios que elencamos, o volume 6 deixa de proporcionar situações que permitiriam o manuseio e reprodução de figuras espaciais; os estabelecimentos de relações com objetos comuns presentes no cotidiano e inerentes ao nível de ensino no qual o aluno se encontra; apresentação de figuras que pertençam a um mesmo grupo com características comuns, o que permitiria ao aluno realizar a comparação entre os objetos planos e espaciais. Além disso, não encontramos tarefas que favoreçam a identificação e desenhos de figuras por meio de sua descrição. Faltam exemplos e atividades que promovam a argumentação lógico-formal e situações que favoreçam a ordenação ou inclusão das figuras geométricas.

Não identificamos o estudo com as figuras planas e espaciais nos volumes 7 e 8 dessa coleção, o que está de acordo com as habilidades descritas na BNCC. Porém, de acordo com a Teoria de van Hiele, para que o aluno consiga realizar a transição entre figuras planas e espaciais e, consequentemente, para que haja avanço entre os níveis, seriam necessárias atividades que envolvessem figuras planas e espaciais no decorrer de todos os volumes da coleção.

Os tópicos que apresentam figuras são tratados de maneira isolada e sem qualquer associação entre eles. Não analisamos outras coleções, mas buscamos informações nos sumários de algumas delas, aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD): Araribá Conecta Matemática (2022) da editora Moderna e Teláres Essencial Matemática (2022) editora Ática. Essa observação, apesar de ser superficial, revelou que a relação entre as figuras também não ocorre nas coleções consideradas. Acreditamos que essa ausência se justifica devido à indicação dos objetos do conhecimento elencados pela BNCC (Brasil, 2018), a qual não apresenta tópicos que exijam esse tratamento.

A Figura 10 retrata a única situação que poderia ser associada a transição das figuras planas e espaciais do volume 9, porém isso não ocorre. Nela é possível observar apenas a intenção de se explorar o volume dos prismas e cilindros.

FIGURA 10 – Volume de prismas e de cilindros (volume 9)



VOLUME DE PRISMAS E DE CILINDROS

Os **prismas** são sólidos do grupo dos poliedros, aqueles que têm apenas superfícies planas cujas faces são representadas por polígonos.

Um **prisma reto** é caracterizado por ter duas faces paralelas formadas por polígonos idênticos, que são as bases do prisma, e as demais faces formadas por retângulos, que são as faces laterais.

Em um prisma reto, as arestas laterais são perpendiculares às bases. Observe os exemplos a seguir.

1 O cubo é um prisma reto cujas faces são formadas apenas por quadrados.

O volume de um cubo é dado por:

$V_{cubo} = a \cdot a \cdot a = a^3$ (altura; área da base)

2 O bloco retangular, também chamado de paralelepípedo reto-retângulo, é um prisma reto.

O volume de um bloco retangular é dado por:

$V_{bloco\ retangular} = a \cdot b \cdot c$ (altura; área da base)

SAIBA QUE

A altura de um prisma reto é a distância entre as bases paralelas.

De modo geral, o volume de um prisma reto é dado por: V_{prisma} = área da base · altura

Os **cilindros** são sólidos do grupo dos corpos redondos, aqueles que têm superfície arredondada.

Um **cilindro circular reto** (ou simplesmente **cilindro reto**) é caracterizado por ter duas superfícies planas e paralelas, formadas por círculos idênticos, que são as bases do cilindro.

O segmento de reta que liga os centros das bases (círculos) do cilindro é o eixo do cilindro. Em um cilindro reto, o eixo é perpendicular aos planos das bases.

De maneira análoga ao volume do prisma reto, o volume de um cilindro reto também é dado pelo produto da área da base pela altura *h* do cilindro (distância entre as bases). Como cada base é um círculo de raio *r*, temos: $V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h$

Acompanhe a situação seguinte.

- José fez o molde de uma caixa que vai construir, conforme esta figura.

  a) Esta caixa montada lembra a forma de qual figura geométrica não plana?

  Prisma reto hexagonal.

Fonte: Giovanni; Giovanni Jr; Castrucci (2018b, p. 242).

Apesar de o capítulo ser referente a figuras, os autores exploram, primeiramente, projeções ortogonais e, em seguida, apresentam brevemente o volume dos prismas e cilindros conforme Figura 10. Nesse capítulo, não observamos nenhum tratamento em relação às figuras planas que compõem as figuras espaciais exploradas. Identificamos também a ausência da sincronia entre os registros figural e discursivo na abordagem realizada pelos autores.

Ao realizarmos nossas análises foi possível inferir que o modo como estão dispostos os tópicos que tratam de figuras não favorece o desenvolvimento do pensamento geométrico conforme indica a teoria de van Hiele (1986), pois a ausência desses tópicos nos volumes 7 e 8 compromete a construção desse pensamento e o desenvolvimento de outras habilidades que promovem tal construção. Isso se justifica por pesquisas como a de Settimy e Bairral (2020), na qual foi investigada a possibilidade do aprendizado de Geometria Espacial por alunos na faixa etária entre 11 e 14 anos. Esses autores identificaram a necessidade de implementação de mais atividades dedicadas à visualização e à representação dos objetos geométricos trabalhados.

Um exemplo de atividade que poderia ser incluída na coleção pode ser encontrado em pesquisas como as de Marques, Fonseca e Mendes (2018) e Gonoring (2019), nas quais os autores propõem a construção de sólidos geométricos (pirâmides e prismas) utilizando balas de goma (jujubas) e palitos de bambu para representar, respectivamente, os vértices e as arestas. Essa atividade permite a exploração de diversos conceitos relacionados às figuras espaciais e planas, pois, ao construírem os sólidos, os alunos perceberão que não é possível formar sólidos como a esfera, o cone e o cilindro. Estes são considerados corpos redondos, ou seja, figuras espaciais com alguma(s) face(s) que não é(são) plana(s). Essa distinção reforça a importância desse tipo de tarefa, pois permite que os alunos construam suas próprias redes de conexão dos conceitos de geometria, sistematizando-os por meio da prática e do raciocínio geométrico.

Conclusão

A pesquisa procurou identificar como a coleção "A Conquista da Matemática" trata as relações entre figuras planas e espaciais, tendo por base a Teoria de van Hiele (1957; 1986) e TRRS. Embora o documento norteador para os currículos, a BNCC, recomende a exploração dos sólidos geométricos desde os primeiros anos do Ensino Fundamental aliando-se à identificação de características das formas geométricas bidimensionais e tridimensionais e à associação de figuras espaciais a suas planificações, observamos que ele não é claro, pois apresenta uma "fragilidade" quanto à sua organização e estruturação dos conteúdos, agora chamados "Objetos do conhecimento". De acordo com os tópicos/conteúdos elencados pelo documento, que são norteadores para a composição dos cinco eixos temáticos para Matemática, constata-se uma quebra na construção de conceitos referentes às figuras planas e espaciais para os anos finais do ensino fundamental.

Essa quebra não é observada ao se analisar o mesmo documento quando ele estabelece e orienta a respeito das figuras planas e espaciais para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (Barros; Oliveira; Ferreira, 2022). De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), as definições e conceitos que remetem a essas figuras geométricas, se fazem presentes nos objetos do conhecimento do 1° ao 5° ano dos anos iniciais. Isso permite e favorece a construção do pensamento geométrico aos alunos dessa etapa, pois, de acordo com as orientações apresentadas pelo documento, há uma continuidade no tratamento das figuras bi e tridimensionais, o que possibilita aos autores de livros didáticos uma continuidade no tratamento das figuras planas e espaciais e suas relações. É possível, assim, a retomada de tais conceitos antigos, favorecendo a exploração de novos, também garantindo uma continuidade entre os temas geométricos que devem ser explorados nessa etapa do conhecimento.

Lembramos que, como evidenciado por Vasconcellos (2008); Costa, Bermejo e Moraes (2009); Oliveira, Lopez e Cardoso (2016), a construção do pensamento geométrico é uma questão importante, que externa a dificuldade de professores em relação à Geometria plana e espacial. Isso porque, conforme apontaram tais pesquisas, os professores deixam de abordar a transição do espaço para o plano e não exploram as relações entre figuras bi e tridimensionais, por não terem vivenciado situações que promovessem esse tipo de abordagem durante todo o período escolar e acadêmico. Dessa forma, pela insegurança que possuem com os tópicos relacionados à Geometria, optam por não a ensinarem.

Os temas apresentados na coleção sob análise, que tratam de figuras planas e espaciais no ensino fundamental anos finais, nosso alvo de investigação, não promovem a construção, muito menos um avanço no pensamento geométrico dos alunos para essa etapa. Observamos que apenas em um capítulo no volume do sexto ano são explorados de forma suscinta os sólidos geométricos, depois, apenas em um tópico do capítulo no volume do nono ano, é que os autores da coleção voltam a tratar dos sólidos geométricos, a partir das vistas de figuras tridimensionais. Assim, fica evidente que se o professor não complementar os objetos do conhecimento durante os anos finais do ensino fundamental com outros instrumentos que conduzam seu trabalho em sala de aula, apenas com o LD em mãos, essa transição de objetos bidimensionais para tridimensionais, e vice-versa, não será realizada/construída com alunos deste ciclo.

De acordo com Moreira (2013), no tocante à Geometria, a presença desse tema sempre ao final de cada volume, fazia com que muitos professores deixassem de ensiná-la. Assim, apontamos ser necessária a reorganização dos capítulos e a apresentação do conteúdo de Geometria no decorrer da obra, o que poderá contribuir para seu ensino em sala de aula. Não obstante, isso ainda não é uma garantia de que o tratamento das relações entre as figuras geométricas planas e espaciais será realizado, pois, tendo em vista que a organização atual dos conteúdos nos livros didáticos se pauta pela orientação da BNCC, a qual não menciona tais relações, isso fica comprometido.

Conforme cita Crowley (1987), as tarefas geométricas precisam ser apresentadas em uma sequência que vai das mais simples às mais complexas, sendo capazes de permitir o reconhecimento, a análise, a abstração, a dedução e, por último, o rigor. Tais pontos não foram identificados na coleção, já que a transição de objetos planos para espaciais e vice-versa foi proposta apenas nos volumes 6 e 9, e de maneira superficial no que se refere à construção do pensamento geométrico pelos alunos ao longo dessa etapa.

Por fim, destacamos a importância de pesquisas que abordem a problemática da transição entre figuras planas e espaciais no ensino de geometria, pois por meio dessas investigações será possível avançar na compreensão e no desenvolvimento de abordagens pedagógicas mais eficazes. Essas pesquisas são essenciais para promover inovações no ensino da geometria, facilitando a construção de uma base sólida de conhecimentos e habilidades espaciais entre os alunos.

Referências

ALMOULOUD, S. A. *et al.* A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação,** Rio de Janeiro, n. 27, p. 94-108, set./dez. 2004. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/xzRGKxDRJ6XS4ZXxLnBTkFL/?format=pdf&lang=pt.> Acesso em: 25 mar. 2024.

ARAÚJO, M. A. S. **Porque ensinar Geometria nas séries iniciais de 1o grau.** Blumenau: SBEM, 1994.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.

BARDINI, L. C.; AMARAL-SCHIO; MAZZI, L. C. Aspectos do cotidiano e a geometria nos livros didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Sem Fronteiras**, Chapecó, v.1, n.1, p.61-76, jan./jun, 2019. Disponível em: <https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/EMSF/article/view/10642/7125.> Acesso: 25 abr. 2024.

BARROS, R. C. P. **Entre o plano e o espaço:** as relações entre figuras planas e espaciais em uma coleção de livros didáticos de matemática para os anos finais do ensino fundamental. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2021. Disponível em: <http://biblioteca.unespar.edu.br:8080/pergamumweb/vinculos/00008c/00008c95.pdf.> Acesso em: 05 em mar. 2024.

BARROS, R. C. P.; OLIVEIRA, C. S.; FERREIRA, A. L. A. Tópicos de Geometria no Ensino fundamental: um olhar para coleções de livros didáticos norteados pela Base Nacional Comum Curricular. **Olhar de Professor**, Ponta Grossa, v. 25, p. 1-27, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.5212/OlharProfr.v.25.20423.067>. Acesso em: 15 fev. 2024.

BARROS, R. C. P.; MORAN, B. M.; CASSOLI, C. B. A. Figuras e figuras geométricas: uma investigação a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Horizontes**, Itatiba, v. 41, n. 31, dez. 2023. Disponível em: <https://revistahorizontes.usf.edu.br/horizontes/article/view/1676/760.> Acesso em: 12 mar. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEB, 2018.

COSTA, A. C.; BERMEJO, A. P. B.; MORAES, M. S. F. Análise do ensino de geometria espacial. *In:* X ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009, Ijuí. **Anais** [...] Ijuí: EGEM, 2009. Disponível em:

<https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_49.pdf.> Acesso em: 10. abr. 2024.

CROWLEY, M. L. The van Hiele Model of the Development of Geomemc Thought. In: **Learning and Teaching Geometry**, K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Mary Montgomery Lindquist, pp.1-16. Reston, Va.: National Council af Teachers af Mathematics, 1987. Disponível em: <https://www.cns-eoc.colostate.edu/docs/math/mathactivities/june2007/The%20van%20Hiele%20Model%20of%20the%20Development%20of%20Geometric%20Thought.pdf.> Acesso em: 21 maio 2024.

DUVAL, R. Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas, SP: Papirus, 2003. p.11-33.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução Myriam Veja Restrepo. Santiago de Cali: Ed. Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 10, p. 5-53, 2005. Disponível em: https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST05010/IST05010.pdf. Acesso em: 20 maio 2024.

DUVAL, R. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 603-607, jul./dez. 2012. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/894/89424874015.pdf.> Acesso em: 06 maio 2024.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 07, n. 1, p.118-138, 2012a. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118/22382>. Acesso em: 02 maio 2024.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. MORETTI, M. T. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012b. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/54097>. Acesso em: 18 maio 2024.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Matemática:** Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FISCHBEIN, E. **The Theory of Figural Concepts**. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v.24, p.139-162, 1993.

FLORES, C.; MORETTI, M. O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: Ponto de análise para aprendizagem Matemática. *In*: Reunião Anual da ANPED, GT19: Educação Matemática, 28, Caxambu. **Anais** [...] Caxambu: ANPED, 2005, p. 1-13. Disponível em: <https://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/funcionamento.pdf>. Acesso: 10 maio 2024.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.

GIL, A.C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa.** São Paulo: EDITORA ATLAS S.A, 2002.

GIOVANNI, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática 6**. 4 ed. São Paulo: FTD, 2018a.

GIOVANNI, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática 9**. 4 ed. São Paulo: FTD, 2018b.

GONORING, C. L. B. Ensino e aprendizagem de poliedros com materiais manipulativos. **Revista Eletrônica de Sala de Aula em Foco**, *[S.l.]*, v. 8, n. 1, p. 80-91, 2020. Disponível em: <https://ojs.ifes.edu.br/index.php/saladeaula/article/view/521>. Acesso em: 02 abr. 2025.

IMAFUKO, D. B. S. O Ensino de área de figuras planas nos livros didáticos na transição dos anos iniciais para os anos finais do ensino fundamental. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2019.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e entendendo do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos.** Niterói: Eduff, 1998.

KALEFF, A. M. M. R. **Tópicos em Ensino de Geometria:** A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria. Rio de Janeiro: UFF/ UAB/CEDERJ, 2008.

KLUPPEL, G. T.; BRANDT, C. F. Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval. *In*: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL - ANPED SUL, 9., 2012, Caxias do Sul. **Anais**[...] Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul, 2012.

KLUPPEL, G.T.; BRANDT, C. F. Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Orgs.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática.** Ijuí: Unijuí, 2014. p. 113-134.

KOBAYASHI, M. C. M. **A construção da geometria pela criança.** Bauru: Edusc, 2001.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual do usuário. In: Em aberto, ano 16, n. 69, Brasília, 1996. Disponível em: https://emaberto.inep.gov.br/ojs3/index.php/emaberto/article/view/2368/2107. Acesso em: 10 maio 2024.

MACEDO, J. A.; BRANDÃO, D. P.; NUNES, D. M. Limites e possibilidades do uso do livro didático de matemática nos processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Debate,** Montes Claros**,** v. 3, n. 7, p. 68-86, 2019. Disponível em: <https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/79.> Acesso em: 09 maio 2024.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna:** Análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 2001.

MARQUES, T. M.; FONSECA, M. A. M.; MENDES, A. F. Sólidos geométricos por meio de material manipulável: um recurso para o ensino de Geometria. Educação, Escola & Sociedade, Montes Claros, v.11, n. 13, p. 109-119, 2018. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/rees/article/view/1095. Acesso em: 02 de abr. 2025.

MOREIRA, N. J. **Continuidade(s) e ruptura(s) nos livros didáticos "a conquista da matemática":** como ensinar a partir de orientações metodológicas da educação matemática (1982-2009). Dissertação (Mestrado em Ensino) – Núcleo de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2013.

OLIVEIRA, R. B.; LOPEZ, L. Q.; CARDOSO, V. C. A interface da geometria plana à espacial: um estudo a partir dos triângulos e dos sólidos de Platão. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, São Paulo. **Anais** [...] São Paulo: SBEM/SP, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/4613_3825_ID.pdf. Acesso: 15 jun. 2024.

SANTOS, S. H.; AMÂNCIO, R. A. O ensino de figuras tridimensionais no 6º ano do ensino fundamental: contribuições do modelo de van Hiele. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 8, n. 1, p.161-181, 2021. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/51750.> Acesso em: 20 maio 2024.

SETTIMY, T. F. O; BAIRRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em geometria espacial. **VIDYA**, v. 40, n. 1, p. 177-195, 2020. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/3219. Acesso em: 15 maio 2024.

USISKIN, Z. **Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.** CDASSG PROJECT. University of Chicago, 1982.

VAN de WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN HIELE, P. M. **El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría).** 1957. 151 f. Tese (Doctoral in Matemáticas y Ciencias Naturales) - Universidad de Utrecht, Utrecht. Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991. No publicada. Disponível em: https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf. Acesso em: 05 em mar. 2024.

VAN HIELE, P. M. **Structure and Insigth:** A Theory of Mathematics Education. Orlando, Flórida: Academic Press, INC, 1986.

VASCONCELLOS, M. A diferenciação entre figuras geométricas não planas e planas: o conhecimento dos alunos das séries iniciais do ensino fundamental e o ponto de vista dos professores. **Zetetiké,** Campinas, v. 16, n. 30, p. 77-106, jul./dez. 2008. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646892/13794. Acesso em: 20 maio 2024.

Recebido: 20/06/2024
Aceito: 31/03/2025

Received: 06/20/2024
Accepted: 03/31/2025

Recibido: 20/06/2024
Aceptado: 31/03/2025