ISSN 1809-4031
eISSN 1809-4309
https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.21.24648.002

Seção: Artigos

Repertório estudantil de transformações pictóricas na resolução de problemas via Modelo de Barras de Singapura*

Students' repertoire of pictorial transformations in problem solving using the Singapore Bar Model

Repertorio estudiantil de transformaciones pictóricas en la resolución de problemas mediante el Modelo de Barras de Singapur

Luiz Augusto Richit**
https://orcid.org/0000-0003-3054-4933

Vandoir Stormowski***
https://orcid.org/0000-0001-5290-5889

Adriana Richit****
https://orcid.org/0000-0003-0778-8198

Resumo: Este artigo apresenta um levantamento das transformações pictóricas que integram o repertório de alunos que usam o Modelo de Barras de Singapura na resolução de problemas verbais. A partir de uma pesquisa bibliográfica delimitada por buscas nas plataformas Scopus e ERIC, mapearam-se os artigos sobre o tema e sistematizamos os achados. A análise dos manuscritos evidenciou que resoluções de problemas via Modelo de Barras envolvem diferentes transformações pictóricas sobre os modelos usados para representar números e suas relações em problemas verbais. Evidenciam-se três tipos gerais de transformações pictóricas, aqui denominadas "transformações por partição", "transformações por completamento" e "transformações por reposicionamento". Essas transformações revelam diferentes processos de uso do Modelo de Barras pelos estudantes e constituem parte do conhecimento requerido pelo professor que conduz resoluções de problemas empregando o Modelo de Barras em aulas de Matemática.
Palavras-chave: Modelo de Barras de Singapura. Transformações pictóricas. Resolução de problemas.

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) – Processo nº 307153/2023-1.

** Professor de Matemática da Rede Estadual de Ensino do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Licenciado em Matemática e Mestrando em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). *E-mail*: <luizaugustorichit@gmail.com>.

*** Professor da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Doutor em Informática na Educação pela UFRGS. *E-mail*: <vandoir.stormowski@ufrgs.br>.

**** Professora, nível associado, da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), Erechim, Rio Grande do Sul. Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp), Rio Claro, São Paulo. *E-mail*: <adrianarichit@gmail.com>.

Abstract: This article presents a survey of the pictorial transformations that make up the repertoire of students who use the Singapore Bar Model to solve word problems. Based on a literature review guided by searches in the Scopus and ERIC databases, we mapped the articles on the topic and systematized the findings. The analysis of the manuscripts revealed that solving problems using the Bar Model involves different pictorial transformations applied to the models used to represent numbers and their relationships in word problems. Three general types of pictorial transformations were identified, herein referred to as "partition transformations," "completion transformations," and "repositioning transformations." These transformations reveal different processes involved in students' use of the Bar Model and constitute part of the knowledge required by teachers who guide problem-solving activities using this model in Mathematics classrooms.
Keywords: Singapore Bar Model. Pictorial transformations. Problem solving.

Resumen: Este artículo presenta un estudio sobre las transformaciones pictóricas que forman parte del repertorio de los estudiantes que utilizan el Modelo de Barras de Singapur para resolver problemas verbales. A partir de una revisión bibliográfica delimitada por búsquedas en las bases de datos Scopus y ERIC, se mapearon los artículos sobre el tema y se sistematizaron los hallazgos. El análisis de los manuscritos reveló que la resolución de problemas mediante el Modelo de Barras implica diferentes transformaciones pictóricas aplicadas a los modelos utilizados para representar números y sus relaciones en problemas verbales. Se identificaron tres tipos generales de transformaciones pictóricas, denominadas en adelante "transformaciones por partición", "transformaciones por completamiento" y "transformaciones por reposicionamiento". Estas transformaciones revelan distintos procesos asociados al uso del Modelo de Barras por parte de los estudiantes y constituyen parte del conocimiento requerido por el profesorado que conduce actividades de resolución de problemas utilizando este modelo en clases de matemáticas.
Palabras-clave: Modelo de Barras de Singapur. Transformaciones pictóricas. Resolución de problemas.

Introdução

Materiais didáticos e instrucionais de Matemática em Singapura são reconhecidos por sua tradição no uso de representações pictóricas para representar números e relações numéricas (Ng, 2015). Essa abordagem para os números é realizada desde os primeiros anos escolares, no âmbito da contagem e composição de unidades (Baldin, 2018; Ng, 2022), sendo progressivamente aprimorada para ser utilizada na representação das relações numéricas de problemas verbais de matemática (Kho; Yeo; Fan, 2014; Richit; Richit, 2022).

Dentre essas representações pictóricas, aquelas na forma de barras, utilizadas na modelagem pictórica e resolução de problemas verbais, são denominadas "Modelo de Barras" em português (Baldin, 2018; Richit, 2023; Richit; Richit, 2022, 2025) ou *Model Method* em Singapura (Kaur, 2019; Ng, 2022; Ng; Lee, 2008, 2009). Assim, o Modelo de Barras de Singapura compreende um conjunto de modelos visuais na forma de barras pictóricas usados para representar números/quantidades e relações numéricas de problemas verbais (Kaur, 2019; Ng, 2022; Ng; Lee, 2009), típicos da matemática do Ensino Fundamental no Brasil. Embora a solução de um problema via Modelo de Barras não se reduza à elaboração de uma representação visual, tais representações convertem os problemas verbais em equações pictóricas (Ng; Lee, 2009), que oportunizam a obtenção da solução no domínio da aritmética (Baysal; Sevinc, 2022; Kaur, 2019).

A literatura atual sobre a temática caracteriza-se por estudos que discutem, principalmente, a efetividade do Modelo de Barras na resolução de problemas. Por um lado, esses estudos sugerem, entre outros aspectos, que o sucesso no uso do Modelo de Barras se correlaciona à elaboração acurada desses modelos (Koning *et al.*, 2022; Ng; Lee, 2009), ao mesmo tempo que a resolução de problemas via Modelo de Barras promove engajamento e persistência dos alunos na busca pela solução (Clement; Auslander, 2022). Por outro lado, o aluno que usa modelos de barras para resolver problemas verbais também realiza diferentes transformações pictóricas nesse processo.

Neste texto, apresentamos uma revisão de literatura com o objetivo de sistematizar o repertório de transformações pictóricas usadas por alunos na resolução de problemas verbais via Modelo de Barras. Para isso, conduzimos uma pesquisa bibliográfica guiada pela seguinte questão de pesquisa: Que transformações pictóricas constituem o repertório de estratégias usadas por alunos na resolução de problemas via Modelo de Barras?

Metodologia

Esta seção apresenta a metodologia da pesquisa. Detalhamos, inicialmente, a etapa de busca e formação do *corpus*, seguida da metodologia de análise dos dados levantados.

Protocolo da busca

O *corpus* da pesquisa foi constituído mediante uma busca mista em duas etapas. A primeira etapa consistiu em uma busca por manuscritos nas bases Scopus e *Education Resources Information Center* (ERIC). Os textos rastreados nessa etapa tiveram o resumo e o título analisados, a fim de compilar aqueles que abordavam o Modelo de Barras. Os textos selecionados foram então considerados para a segunda etapa da busca. Nessa segunda etapa, a lista de referências de cada manuscrito rastreado na primeira etapa foi analisada (título e resumo), e os artigos sobre o tema Modelo de Barras compuseram a lista bruta dessa fase. Cada novo manuscrito teve sua lista de referências analisada, e assim sucessivamente, até a exaustão das referências sobre o Modelo de Barras.

Relativamente à primeira etapa, buscamos, em abril de 2024, por artigos no Scopus por meio da estrutura de termos "*Bar Model*" OR "*Model Method*" AND *Singapore*, os quais foram comparados com o título do artigo, resumo e palavras-chave. A busca retornou 53 documentos, que tiveram o título e o resumo analisados. Dessa seleção, restaram 12 artigos sobre o tema Modelo de Barras de Singapura. Em seguida, utilizamos a estrutura de termos "Bar Model" OR "Model Method" AND *Problem-solving* na base ERIC, retornando 43 textos, dos quais nove foram incluídos no *corpus* da pesquisa a partir da análise dos títulos e dos resumos. Após esse processo de seleção, e retirando duplicatas (quatro estudos), restaram 17 manuscritos. O Quadro 1 apresenta os documentos da primeira etapa da busca, ordenados da publicação mais recente para a mais antiga.

Quadro 1 – Manuscritos recuperados junto às bases de dados Scopus e ERIC

Base	Autores	Título
ERIC	Sevinc e Lizano (2024)	*Bar Model Method as a problem-solving heuristic: an investigation of two preservice teachers' solution paths in problems involving ratio and percentage*
Scopus	Vicente *et al.* (2022)	*Arithmetic word problem solving. Analysis of Singaporean and Spanish textbooks*
Scopus	Richit e Richit (2022)	*O Modelo de Barras de Singapura na resolução de problemas aritméticos e algébricos*
ERIC	Koning *et al.* (2022)	*Model Method drawing acts as a double-edged sword for solving inconsistent word problems*
Scopus e ERIC	Baysal e Sevinc (2022)	*The role of the Singapore bar model in reducing students' errors on Algebra word problems*
Scopus e ERIC	Kaur (2019)	*The why, what and how of the 'Model' method: a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems*
Scopus	Madani, Tengah e Prahmana (2018)	*Using bar model to solve word problems on profit, loss and discount*
ERIC	Bao (2016)	*The effectiveness of using the Model Method to solve word problems*
Scopus	Ng (2015)	*How a Singapore teacher used videos to help improve her teaching of the part-whole concept of numbers and the Model Method*
Scopus	Ho e Lowrie (2014)	*The Model Method: Students' performance and its effectiveness*

Base	Autores	Título
Scopus	Lee e Ng (2011)	*Neuroscience and the teaching of Mathematics*
ERIC	Jiang e Chua (2009)	*Strategies for solving three fraction-related word problems on speed: A comparative study between Chinese and Singaporean students*
ERIC	Englard (2010)	*Raise the bar on problem solving*
Scopus e ERIC	Ng e Lee (2009)	*The Model Method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems*
Scopuse ERIC	Looi e Lim (2009)	*From bar diagrams to letter-symbolic algebra: a technology-enabled bridging: Original article*
Scopus	Looi, Ng e Kho (2007)	*Technology-enabled pedagogy to bridge bar diagrams to letter-symbolic Algebra*
Scopus	Fan e Zhu (2007)	*From convergence to divergence: The development of mathematical problem solving in research, curriculum, and classroom practice in Singapore*

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos dados da pesquisa.

Na segunda etapa, 39 trabalhos sobre o Modelo de Barras foram selecionados mediante análise exaustiva de referências a partir dos manuscritos da primeira etapa. Nessa etapa, todos os textos rastreados e disponíveis por acesso *online* compuseram o *corpus* bruto. Ao final do processo de busca por exaustão, os documentos da rede de referências formada foram reanalisados, e as inconsistências foram ajustadas (inclusão por falta, remoção de repetições ou artigos não adequados ao propósito da revisão). Nesse processo, foram considerados apenas trabalhos que discutiam o Modelo de Barras e apresentavam processos de resolução ou resoluções de problemas verbais pelo Modelo de Barras. O Quadro 2 apresenta os artigos selecionados que foram garimpados a partir do *corpus* inicial.

Quadro 2 – Manuscritos adicionais obtidos da busca por exaustão dos artigos rastreados no Scopus e ERIC

Rastreado a partir de artigo da base	Autores	Título
Scopus/ERIC	Kheong (1994)	*Bridging the gap between secondary and primary Mathematics*
Scopus/ERIC	Kheong (1999)	*Some generic principles for solving mathematical problems in the classroom*
Scopus/ERIC	Cheong (2002)	*The Model Method in Singapore*
Scopus/ERIC	Ng (2003)	*How secondary two express stream students used Algebra and the Model Method to solve problems*
Scopus/ERIC	Ng (2004)	*Developing algebraic thinking in early grades: Case study of the Singapore primary Mathematics curriculum*
Scopus/ERIC	Beckmann (2004)	*Solving Algebra and other story problems with simple diagrams: A method demonstrated in grade 4-6 texts used in Singapore*
Scopus/ERIC	Ng e Lee (2005)	*How primary five pupils use the Model Method to solve word problems*
Scopus/ERIC	Ng *et al.* (2006)	*Model Method: Obstacle or bridge to learning symbolic Algebra*
Scopus/ERIC	Yeap, Ferrucci e Carter (2006)	*Comparative study of arithmetic problems in Singaporean and American Mathematics textbooks*
Scopus/ERIC	Hoven e Garelick (2007)	*Singapore math: Simple or complex?*
Scopus/ERIC	Lee *et al.* (2007)	*Strategic differences in algebraic problem solving: Neuroanatomical correlates*
Scopus	Looi, Ng e Kho (2007)	*Technology-enabled pedagogy to bridge bar diagrams to letter-symbolic Algebra*
ERIC	Ng e Lee (2008)	*As long as the drawing is logical, size does not matter*
Scopus/ERIC	Murata (2008)	*Mathematics teaching and learning as a mediating process: The case of tape diagrams*
ERIC	Khng e Lee (2009)	*Inhibiting interference from prior knowledge: Arithmetic intrusions in Algebra word problem solving*
Scopus/ERIC	Lee e Ng (2009)	*Solving Algebra word problems: The roles of working memory and the Model Method*
Scopus/ERIC	Lee, Ng e Ng (2009)	*The contributions of working memory and executive functioning to problem representation and solution generation in algebraic word problems*
ERIC	Booth e Koendiger (2010)	*Facilitating low-achieving students' diagram use in algebraic story problems*
ERIC	Cai, Ng e Moyer (2011)	*Developing students' Algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore*

Rastreado a partir de artigo da base	Autores	Título
ERIC	Ho e Lowrie (2012)	*Singapore students' performance on Australian and Singapore assessment items*
ERIC	Jan e Rodrigues (2012)	*Model drawing strategy: A tool to link abstract words to real life*
ERIC	Lee *et al.* (2013)	*Longer bars for bigger numbers? Children's usage and understanding of graphical representations of Algebraic problems*
Scopus/ERIC	Jiang, Hwang e Cai (2014)	*Chinese and Singaporean sixth-grade students' strategies for solving problems about speed*
ERIC	Beckmann e Izsák (2015)	*Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in terms of quantities*
ERIC	Koleza (2015)	*The bar model as a visual aid for developing complementary/variation problems*
Scopus/ERIC	Kaur (2015)	*The model method - A tool for representing and visualising relationships*
Scopus	Willyarto, Pane e Chairiyani (2015)	*Mathematics learning method of Bar modeling for elementary school students*
ERIC	Bao (2016)	*The effectiveness of using the Model Method to solve word problems*
Scopus/ERIC	Dennis, Knight e Jerman (2016)	*Teaching high school students with learning disabilities to use model drawing strategy to solve fraction and percentage word problems*
Scopus	Ruiz Urbano, Fernández Bravo e Fernández Palop (2016)	*El modelo de barras: una estrategia para resolver problemas de enunciado en Primaria*
Scopus	Baldin (2018)	*Desenvolvimento do pensamento algébrico no currículo de escola básica: caso de modelagem pictórica da Matemática de Singapura*
ERIC	Beckmann e Kulow (2018)	*How future teachers reasoned with variable parts and strip diagrams to develop equations for proportional relationships and lines*
Scopus	Men, Ismail e Abidin (2018)	*Using Maths Model Method in solving pre-algebraic problems among year five students*
Scopus	Osman *et al.* (2018).	*Enhancing students' mathematical problem-solving skills through bar model visualisation technique*
Scopus	Widyasari e Rosiyanti (2018)	*Bar modelling and autism–sufficient or necessary in problem solving?*
Scopus	Widyasari e Rosiyanti (2018)	*Developing material for promoting problem-solving ability through Bar Modeling Technique*
Scopus	Gani, Tengah e Said (2019)	*Bar model as intervention in solving word problem involving percentage*
Scopus	Vicente, Sánchez e Verschaffel (2020)	*Word problem solving approaches in Mathematics textbooks: A comparison between Singapore and Spain*
Scopus	Said e Tengah (2021)	*Supporting solving word problems involving ratio through the bar model*

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos dados da pesquisa.

Ao final desse processo, compuseram o *corpus* final da pesquisa os 39 artigos adicionais (Quadro 2) que foram garimpados a partir do *corpus* inicial de 17 manuscritos (Quadro 1), totalizando 56 documentos no *corpus* final a serem analisados.

Metodologia da análise dos resultados

A investigação apresentada segue uma perspectiva qualitativa, conforme definem Bogdan e Biklen (1994). A análise dos documentos do *corpus* final da pesquisa segue princípios da análise de conteúdo de Bardin (2016). Nesse processo, os documentos analisados deram suporte à constituição de unidades temáticas que, após sistematização e compilação, deram origem às categorias. Inicialmente, os artigos foram lidos e amostras de transformações pictóricas foram coletadas, dando origem às unidades temáticas. Ao final do processo, todas as unidades temáticas foram analisadas de forma interpretativa-qualitativa e agrupadas segundo categorias representativas. Essas categorias e a caracterização do *corpus* final são discutidas a seguir.

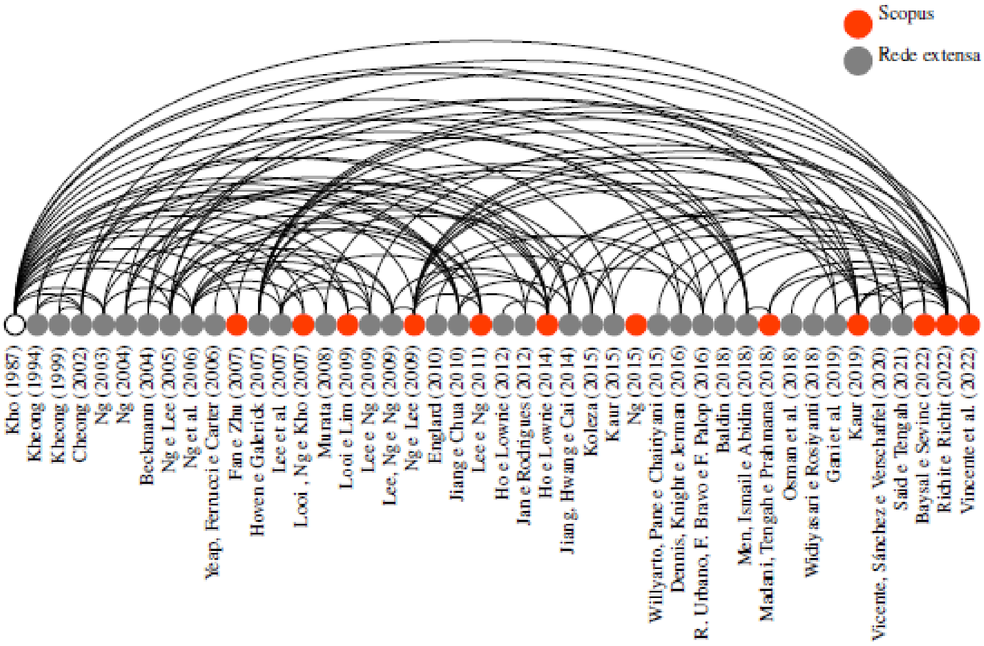
Resultados

Nesta seção, apresentamos os resultados das duas etapas da pesquisa. Inicialmente, trazemos a caracterização do *corpus* da pesquisa e suas conexões e, na sequência, a definição das categorias de transformações pictóricas identificadas nos trabalhos.

Caracterização do corpus final da pesquisa

A partir da constituição do *corpus* final da pesquisa mediante buscas nas bases Scopus e ERIC, representamos a rede de referências internas nas Figuras 1 e 2. A Figura 1 mostra as referências recuperadas na busca pelo Scopus e sua rede extensa de citações, acrescida de Kho (1987), considerado o artigo pioneiro de apresentação do Modelo de Barras.

Figura 1 – Rede de citações a partir das referências recuperadas no Scopus e sua rede extensa

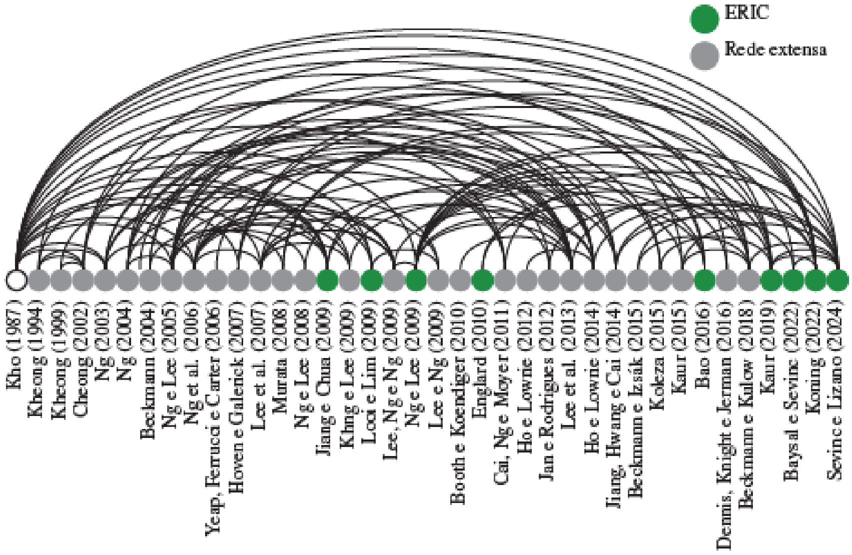


Fonte: Elaborada pelos autores no TikZ (LaTeX). Dados da pesquisa.

Na Figura 1, os autores estão ordenados por ano de publicação, e cada conexão entre dois autores envolve um citante e um citado (sempre à esquerda do citante). Com exceção de Ng (2015), todos os textos – até o primeiro artigo de apresentação do Modelo de Barras (Kho, 1987) – fazem ou recebem pelo menos uma citação de textos dentro da rede de citações (a partir da pesquisa no Scopus). Os textos de Kho (1987) e Ng e Lee (2009) são os artigos com maior número de citações, e 80% (8/10) dos manuscritos que citaram Ng e Lee (2009) também citaram Kho (1987). Observamos também que 25,58% (11/43) dos manuscritos que receberam alguma citação não citaram outros textos dentro do *corpus* de pesquisa (excetuando-se como citante Kho, 1987). Em especial, os manuscritos mais antigos foram embasados em materiais didáticos e documentos curriculares devido à escassez de artigos nas primeiras décadas seguintes à introdução do Modelo de Barras em Singapura. Atualmente, as referências com alcance internacional e com maior detalhamento sobre o Modelo de Barras, na rede extensa da pesquisa no Scopus, são os manuscritos de Kaur (2019), Ng e Lee (2009) e Cheong (2002).

A Figura 2 sumariza a rede extensa de artigos da busca na ERIC, à qual foi acrescentado o artigo pioneiro de Kho (1987).

Figura 2 – Rede de citações a partir das referências recuperadas no ERIC e sua rede extensa



Fonte: Elaborada pelos autores no TikZ (LaTeX). Dados da pesquisa.

A rede de citações da Figura 2 evidencia que os textos de Ng *et al.* (2006), Ng e Lee (2005) e Ng e Lee (2009) são os manuscritos mais influentes, a partir de Kho (1987), em relação às citações da rede extensa formada pelas referências recuperadas na ERIC. A Figura 2 evidencia que a maioria dos documentos rastreados pela busca na ERIC foi publicada nos últimos cinco anos (2019-2024) e há uma concentração de artigos entre 2009-2010. Esses dois períodos somam aproximadamente 88,89% (8/9) das publicações recuperadas inicialmente na ERIC. Além disso, a rede extensa constituída a partir da busca na ERIC (inclusive) soma 37 artigos, comparados aos 43 artigos da busca no Scopus (inclusive). Ao todo, são 56 artigos, dos quais 24 são comuns as duas bases. Isso indica que cerca de 42,86% (24/56) dos artigos do *corpus* final da pesquisa é constituído por estudos que aparecem simultaneamente nas buscas do Scopus e do ERIC e em suas redes extensas.

Categorias de análise

A partir das referências obtidas nas duas etapas de busca, constituiu-se o *corpus* da pesquisa, o qual consideramos para coletar dados sobre as transformações pictóricas presentes nas resoluções de alunos ao usar o Modelo de Barras e, assim, responder à nossa questão norteadora. Neste texto, consideramos como transformações pictóricas aquelas mudanças realizadas sobre os modelos pictóricos elaborados para representar as quantidades e relações numéricas de problemas verbais. Além disso, não fizemos distinção entre transformações pictóricas do Modelo de Barras no contexto da aritmética, da álgebra ou de sua interface. Para os propósitos do artigo, entretanto, consideramos como transformações pictóricas quaisquer modificações realizadas sobre um Modelo de Barras que representa um problema, mas que não integram a sua elaboração a partir do problema. Em uma analogia algébrica, elas fazem paralelo com a manipulação da(s) equação(ões) formulada(s) e não com o processo de formulação da(s) equação(ões) que representa(m) a situação-problema.

A análise do *corpus* da pesquisa evidenciou três grupos de transformações pictóricas, aqui denominadas "transformações por partição", "transformações por completamento" e "transformações por reposicionamento". O Quadro 3 apresenta as categorias e os autores que subsidiaram a sua elaboração.

Quadro 3 – Categorias de análise e autores

Categoria	Autores
Transformações por partição	Baldin (2018), Bao (2016), Baysal e Sevinc (2022), Beckmann (2004), Beckmann e Izsák (2015), Beckmann e Kulow (2018), Booth e Koedinger (2010), Cai, Ng e Moyer (2011), Cheong (2002), Gani, Tengah e Said (2019), Ho e Lowrie (2012, 2014), Hoven e Garelick (2007), Jiang e Chua (2009), Jiang, Hwang e Cai (2014), Kaur (2019), Kheong (1994, 1999), Khng e Lee (2009), Kho, Yeo e Fan (2014), Koning *et al.* (2022), Lee e Ng (2011), Lee *et al.* (2013), Lee, Ng e Ng (2009), Looi, Ng e Kho (2007), Looi e Lim (2009), Madani, Tengah e Prahmana (2018), Men, Ismail e Abdin (2018), Murata (2008), Ng (2003, 2004, 2015, 2022), Ng e Lee (2005, 2008, 2009), Ng *et al.* (2006), Richit e Richit (2022), Said e Tengah (2021), Sevinc e Lizano (2024), Ruiz Urbano, Fernández Bravo e Fernández Palop (2016), Vicente *et al.* (2022), Widyasari e Rosiyanti (2018), Willyarto, Pane e Chairiyani (2015) e Yeap, Ferrucci e Carter (2006).
Transformações por completamento	Bao (2016), Cheong (2002), Clement e Auslander (2022), Dennis, Knight e Jerman (2016), Englard (2010), Ho e Lowrie (2012, 2014), Jan e Rodrigues (2012), Kaur (2019), Kheong (1999), Koleza (2015), Lee *et al.* (2007), Lee e Ng (2009), Murata (2008), Ng (2003, 2015, 2022), Ng e Lee (2005, 2009) e Osman *et al.* (2018).
Transformações por reposicionamento	Cheong (2002), Fan e Zhu (2007), Ho e Lowrie (2014), Kaur (2015), Ng (2003, 2015) e Sevinc e Lizano (2024).

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos dados da pesquisa.

No Quadro 3, os documentos não foram mutuamente separados conforme as categorias de análise, pois um mesmo artigo subsidiou a constituição de mais de uma categoria. Cada uma das transformações pictóricas é discutida na sequência por meio de problemas exemplificativos, cujas resoluções foram expandidas ou adaptadas para atender ao propósito desta pesquisa.

Transformações pictóricas do Modelo de Barras de Singapura

As três categorias identificadas anteriormente passam agora a ser descritas e analisadas de forma específica em cada uma das seções que seguem.

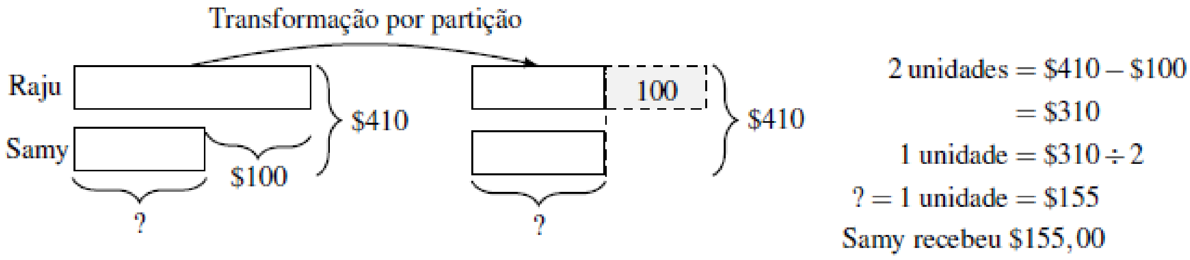
Transformações por partição

As transformações por partição envolvem mudanças nos modelos por meio de partições que podem incluir a remoção ou não de partes (representando quantidades) do modelo. Essas partições destacam quantidades conhecidas ou incógnitas, por meio das quais é possível derivar um caminho para determinar o valor de quantidades desconhecidas e, assim, resolver o problema. O primeiro exemplo a seguir, o "Problema do dinheiro"[1] (Beckmann, 2004), é representado por meio do modelo de comparação na Figura 3 (à esquerda).

- *Problema do dinheiro*: Raju e Samy dividiram US$ 410 entre eles. Raju recebeu US$ 100 a mais que Samy. Quanto dinheiro Samy recebeu? (Beckmann, 2004, p. 44, tradução nossa).

1 Atribuímos nomes aos problemas apresentados como exemplos de uso das transformações pictóricas quando não nomeados pelos autores proponentes.

Figura 3 – Resolução para o *Problema do dinheiro* via Modelo de Barras



Fonte: Elaborada pelos autores com base em Beckmann (2004, p. 44).

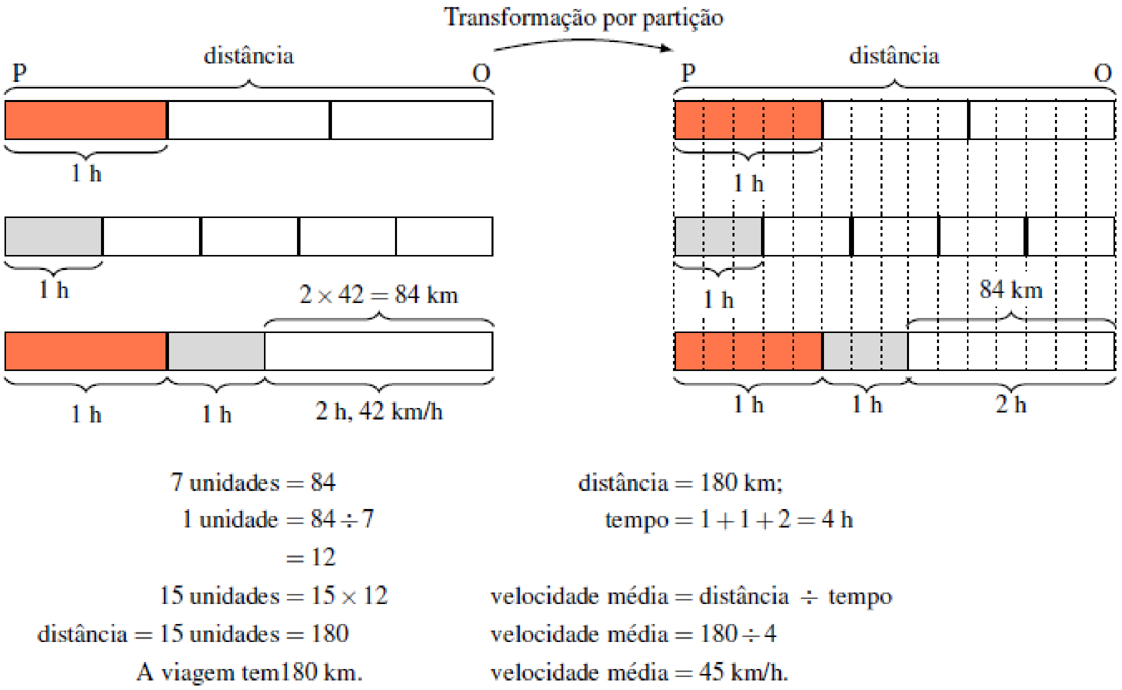
A Figura 3 mostra o processo de resolução do problema, destacando as mudanças (por partição) no modelo elaborado para a situação-problema. Inicialmente, o problema é representado por meio do modelo de comparação (para detalhes, ver Kaur, 2019), seguido da partição da barra que representa a quantidade de Raju, a fim de destacar a parte "a mais". A parte "a mais" (particionada) é mostrada tracejada, e seu valor deve ser subtraído do total ($410 - 100 = 310$). O valor resultante (310) é usado para determinar o valor do bloco unitário ($310/2 = 155$) e a quantia de Samy (? = 155).

Transformações partitivas, como as usadas em problemas representados pelo modelo de comparação (e.g., Figura 3), podem aparecer em problemas que envolvem frações, razões ou proporções (para outros exemplos, ver Ng e Lee, 2009, Jiang e Chua, 2009, Jiang, Hwang e Cai, 2014, e Cheong, 2002). Esses problemas comumente envolvem a elaboração de um Modelo de Barras que precisa ser reajustado. Essa correção, por vezes, envolve a redefinição do "bloco gerador" usado para elaborar o Modelo de Barras inicial (Ng; Lee, 2009). Um "bloco gerador", "bloco unitário" ou apenas "gerador" funciona como uma unidade pictórica que possibilita reformular as quantidades como uma composição inteira (Ng; Lee, 2009). A "descoberta" que redefine o gerador ocorre a partir das relações numéricas dadas na situação-problema e envolve mudanças no modelo que representa o problema. No *corpus* da pesquisa, observamos que esse tipo de transformação pictórica ocorre por partição, isto é, "transformação por partição para redefinição do gerador". Para ilustrar esse cenário, apresentamos os dois problemas a seguir.

- *Problema das velocidades*: Mike fez uma viagem da cidade P para a cidade O. Na primeira hora, ele fez 1/3 do trajeto. Na segunda hora, ele fez 1/5 de todo o trajeto. Por fim, demorou duas horas para terminar o restante da viagem a uma velocidade de 42 km/h. Encontre a velocidade média do trajeto (adaptado de Jiang e Chua, 2009, p. 75).

Uma solução possível por meio do Modelo de Barras é mostrada na Figura 4.

Figura 4 – Resolução do *Problema das velocidades* via Modelo de Barras



Fonte: Elaborada pelos autores com base em Jiang e Chua (2009, p. 75).

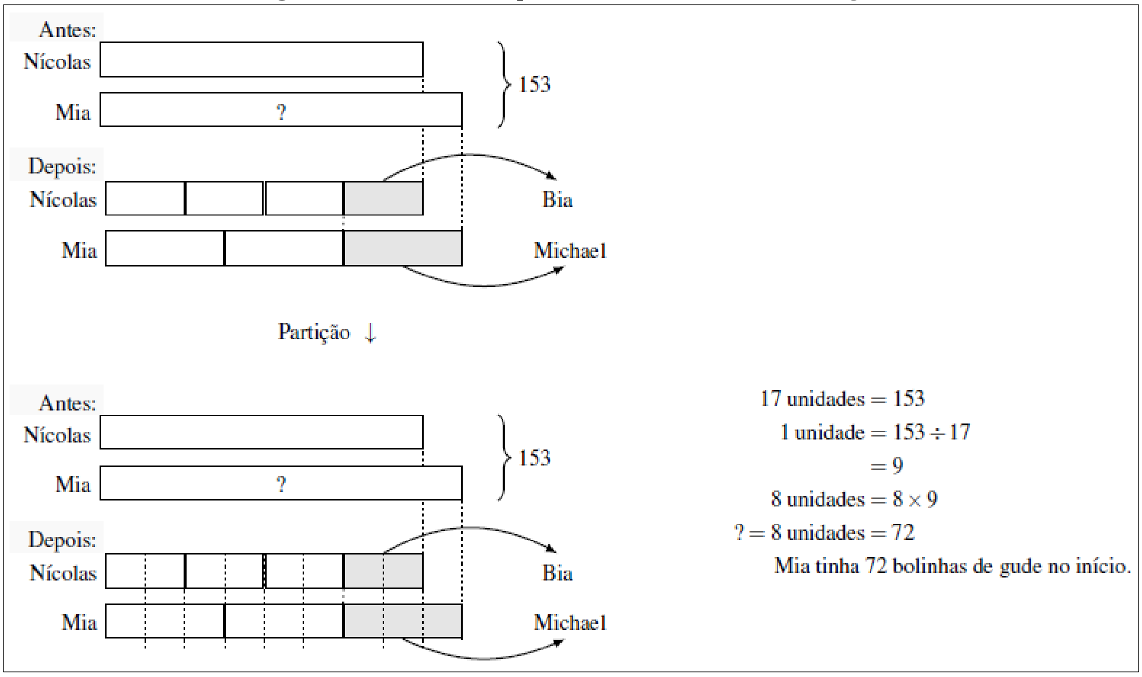
A resolução proposta na Figura 4 parte da representação da situação a partir do modelo mostrado no lado esquerdo. Duas barras foram desenhadas de forma comparada (uma abaixo da outra), destacando as frações do trajeto e demais informações explicitadas na situação-problema. A partir desse Modelo de Barras, é possível estabelecer a unidade comum entre 1/3 e 1/5 realizando-se novas partições, conforme mostra o lado direito da Figura 4. A unidade comum (1/15) pode ser determinada a partir da distância percorrida nas últimas duas horas do percurso (2 h × 42 km/h = 84 km), resultando em 12 km (84/7 = 12 km). Essa informação permite determinar o comprimento total do trajeto (12 × 15 = 180 km) e, portanto, determinar a velocidade média, como mostram os cálculos na Figura 4 (parte inferior à direita).

Na solução fornecida na Figura 4, expandimos a apresentada por Jiang e Chua (2009), a fim de destacar a descoberta da unidade comum (1/15), que permite reformular as quantidades em função de uma mesma unidade. No problema das bolinhas de gude, apresentamos outro exemplo, elaborado por nós, que envolve transformações por partição para determinar uma unidade comum que permite resolver o problema.

- *Problema das bolinhas de gude*: Nícolas e Mia tinham juntos 153 bolinhas de gude. Nícolas deu 1/4 das suas bolinhas de gude para Bia, mas Mia deu 1/3 das que tinha para Michael. Depois disso, Nícolas e Mia ficaram com o mesmo número de bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude Mia tinha no início?

Uma solução possível para esse problema, por meio do Modelo de Barras, é mostrada na Figura 5.

Figura 5 – Resolução ampliada do *Problema das bolinhas de gude*



Fonte: Elaborada pelos autores.

A Figura 5 mostra a representação do problema, pelo Modelo de Barras, segundo os dois momentos (Antes–Depois). O diagrama elaborado (parte superior da Figura 5) incorpora as informações dessas duas etapas e, a seguir, é utilizado para resolver o problema, sofrendo transformações pictóricas (parte inferior da Figura 5). A partir da relação de igualdade na etapa "Depois" (3/4 de Nícolas equivalendo a 2/3 de Mia), é possível estabelecer uma unidade comum (1/6) por meio de partições pertinentes. Dividindo-se cada parte de Nícolas em duas partes iguais e cada parte de Mia em três partes iguais, ambas passam a ter seis partes, todas iguais entre si. A partir dessa unidade comum (um novo gerador), as quantidades de Mia e Nícolas podem ser reformuladas em termos de uma mesma quantidade de referência. Essa referência, ou gerador, é usada para resolver o problema a partir da situação inicial conhecida: ambos tinham 153 bolinhas de gude, e o total é composto por 17 blocos iguais. Assim, cada bloco tem 153/17 = 9 bolinhas de gude, a partir do que se obtém que Mia tinha 72 bolinhas de gude (8 × 9).

Os exemplos apresentados acima cumprem o papel de ilustrar o uso da transformação pictórica que observamos ser predominante na literatura analisada. Essas transformações, aqui denominadas "transformações por partição", relacionam-se à mobilização de conceitos matemáticos como, por exemplo, a composição e conservação da quantidade (manutenção de igualdades) e o conceito de unidade comum (relacionando, por exemplo, MMC e MDC). Dessa forma, destacamos que o uso do Modelo de Barras em aulas de matemática permeia esses conceitos de modo visual, o que ultrapassa a apresentação usualmente algébrica e procedimental tradicionalmente usada no ensino da Matemática.

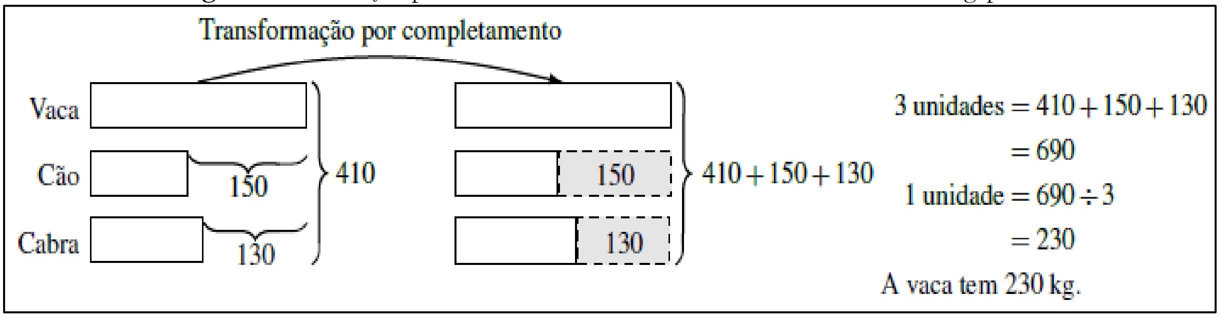
Transformações por completamento

Consideramos as transformações que envolvem completamento ou acréscimo de barras como um tipo geral de transformações pictóricas, denominadas aqui "transformações por completamento". O completamento é um conceito matemático que envolve *completar o todo*, cuja "[...] ideia subjacente é converter um valor específico em uma referência padrão" (Kheong, 1999, p. 81, tradução nossa). Nas resoluções mapeadas, essa estratégia se mostrou amplamente utilizada pelos estudantes em suas resoluções via Modelo de Barras (Ng; Lee, 2009). Para ilustrar esse cenário, apresentamos alguns exemplos. A Figura 6 mostra o "Problema dos animais" (Lee; Ng, 2009, p. 216, tradução nossa) representado por meio do modelo de comparação.

- *Problema dos animais*: Uma vaca tem 150 kg a mais que um cão. Uma cabra tem 130 kg a menos que a vaca. Ao todo, os três animais somam 410 kg. Qual é a massa da vaca?

A solução, pelo modelo de Barras, é mostrada na Figura 6.

Figura 6 – Resolução para o *Problema dos animais* via Modelo de Barra de Singapura



Fonte: Elaborada pelos autores com base em Lee e Ng (2009, p. 216).

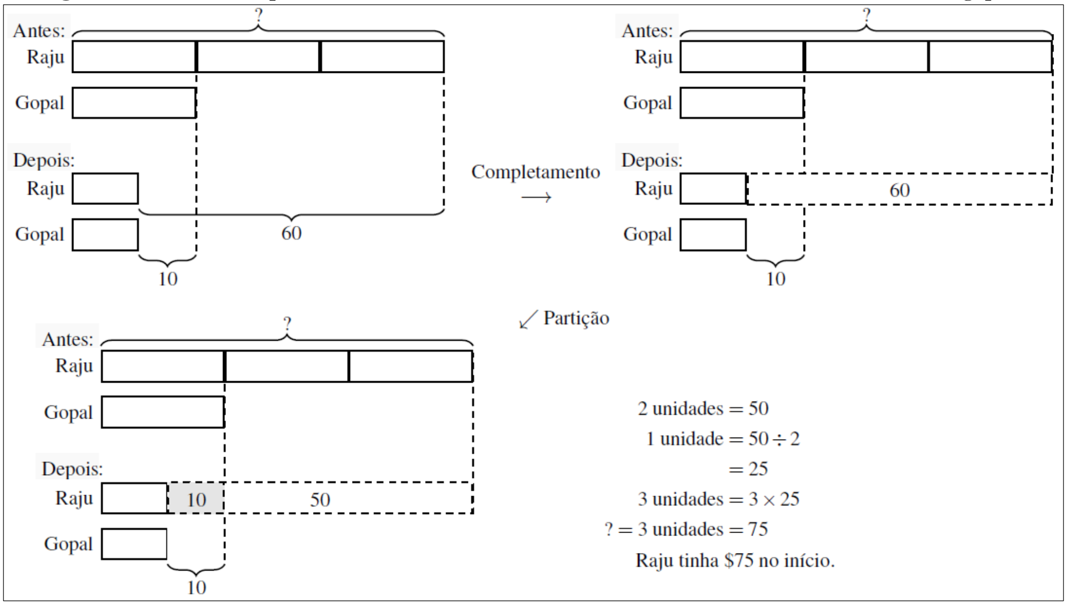
A Figura 6 mostra (à esquerda) o Modelo de Barras que representa esse problema, seguido do uso da estratégia de completamento. Nessa resolução, as diferenças ("a mais" e "a menos") mencionadas são usadas para completar as quantidades, tomando-se como referência a massa da vaca. Uma vez que essas quantidades foram acrescentadas, é necessário reajustar o total, adicionando-as (410 + 150 + 130 = 690). A partir desse "novo" total, composto de três barras iguais, é possível obter seu valor fazendo a divisão 690/3 = 230 kg e, assim, determinar a massa da vaca (representada pela barra de referência), isto é, 230 kg.

A solução apresentada na Figura 6 usa transformações por completamento; apesar disso, uma solução alternativa pode ser obtida utilizando-se transformações por partição, como na solução apresentada para o *Problema do dinheiro* (Figura 3). Essa perspectiva evidencia que um problema pode ser resolvido por meio de diferentes abordagens (Ng; Lee, 2009). A Figura 7 mostra a resolução do *Problema do dinheiro* remanescente, que articula tanto transformações por partição quanto transformações por completamento, evidenciando que um problema pode ser resolvido articulando-se múltiplas transformações pictóricas.

- *Problema do dinheiro remanescente*: Raju tinha três vezes mais dinheiro que Gopal. Depois que Raju gastou US$ 60 e Gopal gastou US$ 10, cada um deles tinha uma quantidade igual de dinheiro sobrando. Quanto dinheiro Raju tinha no início? (Beckmann, 2004, p. 44, tradução nossa)

Uma solução possível para esse problema é mostrada na Figura 7. Nessa apresentação, evidencia-se o uso de transformações por partição e por completamento.

Figura 7 – Resolução para o *Problema do dinheiro* remanescente via Modelo de Barra de Singapura



Fonte: Elaborada pelos autores com base em Beckmann (2004, p. 45).

Na Figura 7, a parte superior esquerda mostra a representação do problema via Modelo de Barras. A partir dela, transformações pictóricas são usadas para resolver o problema. A primeira envolve uma transformação por completamento (parte superior direita da Figura 7). A seguir, por meio de partições, o modelo é modificado conforme mostrado na parte inferior esquerda da Figura 7. A partir dessas transformações, é possível determinar o valor de "?", calculando-se o valor da unidade do modelo na etapa "Antes", isto é, 25 (duas unidades são iguais a 50; portanto, uma unidade é igual a 50/2 = 25). Por fim, a quantidade "?" pode ser determinada por ser composta por três unidades de 25; portanto, a quantidade procurada é igual a 75.

Esses exemplos mostram o uso de transformações por partição e transformações por completamento para a resolução de problemas envolvendo o Modelo de Barras. Essas transformações são articuladas de acordo com o raciocínio do estudante, com o objetivo de desvendar as relações entre as quantidades e, assim, estabelecer um caminho para a descoberta do valor das unidades pictóricas/gerador do modelo elaborado. Essas duas estratégias foram as mais utilizadas pelos estudantes nas resoluções presentes no *corpus* da pesquisa. Na seção seguinte, apresentamos as transformações por reposicionamento.

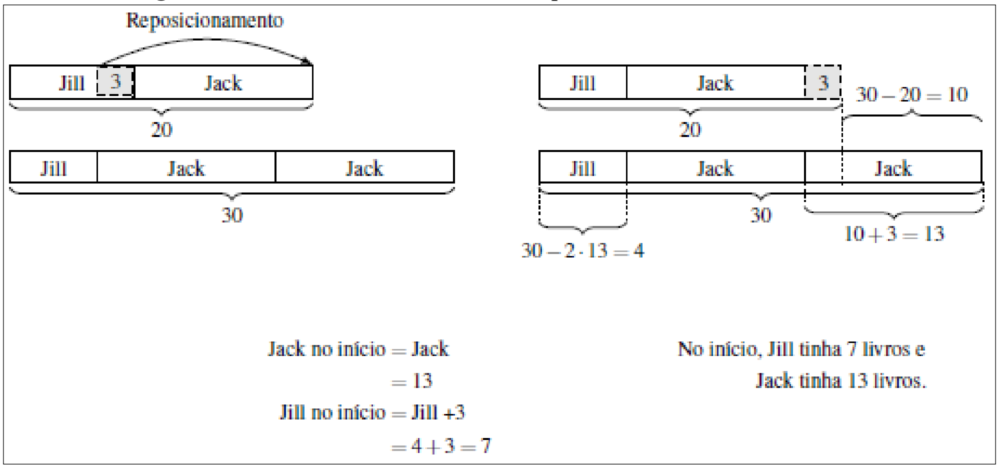
Transformações por reposicionamento

As barras desenhadas para representar o problema, por vezes, requerem modificações no arranjo dos retângulos. Isso ocorre porque as quantidades desconhecidas não são diretamente acessíveis na configuração inicial, mas, ocasionalmente, podem ser reconfiguradas convenientemente. Essas transformações pictóricas funcionam como artifícios matemáticos, e, por meio delas, rearranjando retângulos, pode-se determinar a quantidade representada por alguma barra-chave e, assim, as quantidades desconhecidas (ver, por exemplo, Cheong, 2002; Ng, 2003). Para exemplificar o uso desse tipo de transformação, apresentamos dois problemas. O primeiro é o *Problema dos livros*, a seguir.

- *Problema dos livros*: A soma do número de livros que Jack e Jill têm é de 20. Se Jill perdesse três de seus livros e Jack dobrasse o número que ele tem, eles teriam um total de 30 livros. Quantos livros cada um tem? (Ng, 2003, p. 17, tradução nossa)

Esse problema foi apresentado em Ng (2003), com a representação na forma de Modelo de Barras semelhante à mostrada na Figura 8, à esquerda.

Figura 8 – Solução do *Problema dos livros* por meio do Modelo de Barras



Fonte: Elaborada pelos autores com base em Ng (2003, p. 17).

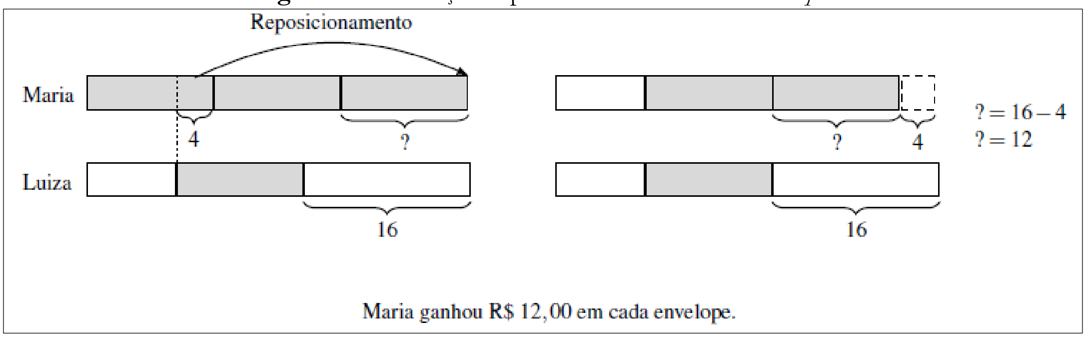
Essa solução inclui a indicação do reposicionamento pertinente (outros são possíveis), e a nova configuração é apresentada no lado direito. A partir dessa reconfiguração, é possível obter, de forma desencadeada, o número de livros de Jack e de Jill. O número de livros de Jack é obtido a partir da diferença entre as barras (30 − 20 = 10), acrescida de 3 (10 + 3 = 13). A seguir, é possível obter o número de livros de Jill (30 − 2·13 = 4 ou 20 − 3 − 13 = 4), que deve ser adicionado a 3 (3 + 4 = 7) para compensar o desconto (3) realizado pela reconfiguração das barras. Dessa forma, a solução é obtida: Jill tem sete livros e Jack, 13.

Um segundo exemplo do uso de "transformações por reposicionamento", elaborado por nós, é apresentado no *Problema dos envelopes*, a seguir.

- *Problema dos envelopes*: Maria e Luiza ganharam três envelopes cada. Maria ganhou três envelopes com a mesma quantidade de dinheiro. Luiza ganhou R$ 4,00 a menos do que Maria no primeiro envelope, ganhou R$ 16,00 a mais no segundo envelope, mas não ganhou nada no terceiro envelope. Se o total que Maria ganhou é igual ao total que Luiza ganhou, quanto dinheiro havia em cada envelope de Maria?

Uma solução possível para esse problema, por meio do Modelo de Barras, é mostrada na Figura 9.

Figura 9 – Resolução expandida do *Problema dos envelopes*



Fonte: Elaborada pelos autores.

A Figura 9 apresenta (à esquerda) o Modelo de Barras (outros modelos podem ser estruturados para representar o problema) que representa o *Problema dos envelopes* e indica um reposicionamento possível entre as barras. À direita, após o reposicionamento sugerido, o Modelo de Barras modificado é usado para determinar o valor solicitado (? = valor dos envelopes de Maria). A partir do reposicionamento proposto e da equivalência de comprimentos (? + 4 = 16), decorre que a quantidade desconhecida (?) é igual a 12.

As mudanças de posição das barras (representando quantidades) também podem ser observadas em situações-problema que envolvem mudança nas quantidades. Exemplos nessa direção podem ser observados em Kaur (2015, 2019), Ng (2015), Ho e Lowrie (2012, 2014) e Ng e Lee (2009). Nesses casos, as mudanças de posição das barras estão relacionadas a alterações de valores (acréscimos, descontos, decréscimos etc.) que são diretamente mencionadas na situação-problema. Essas mudanças, portanto, fazem parte da fase de elaboração do Modelo de Barras que captura e representa os dados numéricos e as relações do problema. Uma vez que estamos interessados nas transformações pictóricas sobre os modelos já elaborados, não as discutimos aqui.

O uso das transformações por reposicionamento está relacionado, em parte, à acurácia "métrica" do desenho. Alunos proficientes no uso do Modelo de Barras são conscientes de que o importante é a relação lógica entre os retângulos (Ng; Lee, 2008); no entanto, a visualização de reposicionamentos convenientes não é trivial. Essa visualização está relacionada à percepção visual, mas os modelos desenhados pelos alunos mostram-se majoritariamente esquemáticos (Baysal; Sevinc, 2022; Dennis; Knight; Jerman, 2016; Ho; Lowrie, 2014; Jiang; Chua, 2009; Jiang; Hwang; Cai, 2014; Looi; Lim, 2009; Madani; Tengah; Prahmana, 2018; Ng, 2003, 2004, 2015; Ng; Lee, 2005, 2008, 2009; Sevinc; Lizano, 2024). Isso pode justificar o fato de as transformações por reposicionamento serem as menos evidenciadas na literatura analisada. Uma vez que esses problemas são mais desafiadores e, em geral, envolvem uma quantidade maior de informações e relações numéricas (que inclusive sofrem modificações), Ng e Lee (2008) observaram que os alunos percebem o uso do Modelo de Barras como muito custoso. Por exemplo, os alunos reportaram que, nos problemas mais difíceis, muito tempo foi necessário para resolver um problema via Modelo de Barras, o que é inviável em momentos de avaliação (Ng; Lee, 2008). Nesses casos, o método algébrico foi considerado mais eficiente pelos alunos (Ng; Lee, 2008).

É importante observar que diferentes transformações pictóricas podem ser utilizadas pelos alunos como estratégias para a resolução de um mesmo problema. Da mesma forma, evidenciamos que modificações pictóricas podem ser utilizadas durante a própria estruturação do modelo, a partir da incorporação das informações em seu desenho. O processo de conversão do enunciado em um Modelo de Barras que o representa se diferencia dos processos de modificação da representação abordados neste texto. Estudos orientados ao processo de transformar informações verbais em representações pictóricas são necessários para complementar este estudo. Além disso, um mesmo problema pode ser representado por modelos de barras diferentes, e as transformações pictóricas utilizadas sobre um Modelo de Barras podem ser influenciadas pelo próprio modelo inicialmente elaborado para o problema.

Limitações e considerações finais

O mapeamento realizado neste trabalho baseou-se exclusivamente na apresentação das respostas e dos registros finais de alunos apresentados nos manuscritos rastreados. Não foram avaliadas resoluções em desenvolvimento, que potencialmente envolvem "iniciar, apagar e começar de novo" até formalizar uma apresentação final. Além disso, a sistematização formulada neste texto não considera o movimento de retângulos e combinações de retângulos processados mentalmente e que podem fazer parte da resolução de problemas via Modelo de Barras. Assim, uma contribuição para este trabalho envolve investigar e sistematizar o repertório estudantil de transformações pictóricas a partir do acompanhamento detalhado do processo de resolução de problemas via Modelo de Barras de estudantes.

Embora a análise tenha incidido sobre uma rede de referências estendida, os manuscritos fornecem uma amostra limitada e, às vezes, prototípica de "resoluções pelo Modelo de Barras", sejam do contexto de Singapura ou de experiências isoladas ao redor do mundo. Uma possibilidade, portanto, é a condução de uma investigação ampliada em ambientes escolares que tenham tradição no uso dessa abordagem. Outra possibilidade é investigar, nessa perspectiva, o repertório estudantil das transformações pictóricas segundo os diferentes Modelos de Barras – "Parte-Todo", "Comparação" e "Antes-Depois". Em ambos os cenários, esses estudos têm potencial para fornecer um mapeamento ampliado das transformações pictóricas do Modelo de Barras evidenciadas por esta pesquisa bibliográfica. Apesar dessa limitação, nosso texto fornece um panorama das estratégias utilizadas na manipulação do Modelo de Barras para resolução de problemas verbais, sendo o conhecimento do repertório estudantil dessas estratégias relevante para o professor que usa/usará o Modelo de Barras em aulas de matemática.

O uso de completamento ou partições em Modelos de Barras está associado a conceitos como a conservação da quantidade dos números reais, de modo que o uso do Modelo de Barras oportuniza abordar esses princípios de maneira visual e antecipada. O reposicionamento de retângulos, ou o uso de partições e completamento em diagramas, também propicia o desenvolvimento de habilidades de visualização e de manipulação conceitual desses modelos – processos que fazem parte do conhecimento matemático a ser desenvolvido com os estudantes. Do ponto de vista do ensino, o professor que ensina matemática deve estar consciente de que o uso do Modelo de Barras envolve diferentes processos, dos quais a manipulação de modelos por meio de transformações pictóricas é uma das etapas integrantes. Além disso, o professor deve estar preparado para mediar o processo de resolução de problemas dos estudantes que desenham seus modelos, quando demandam transformações pictóricas convenientes. Nesse sentido, este texto fornece uma síntese dessas transformações pictóricas no âmbito da resolução de problemas via Modelo de Barras e aponta para aspectos importantes da aprendizagem matemática que são mediados nesse processo.

Referências

BALDIN, Y. Y. Desenvolvimento do pensamento algébrico no currículo de escola básica: caso de modelagem pictórica da Matemática de Singapura. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, San José, ano 13, n. 17, p. 31-44, 2018.

BAO, L. The effectiveness of using the model method to solve word problems. **Australian Primary Mathematics Classroom**, Adelaide, v. 21, n. 3, p. 26-31, 2016.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições70, 2016.

BAYSAL, E.; SEVINC, S. The role of the Singapore bar model in reducing students' errors on algebra word problems. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 53, n. 2, p. 1-23, 2022. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1944683

BECKMANN, S. Solving Algebra and other story problems with simple diagrams: A method demonstrated in grade 4-6 texts used in Singapore. **The Mathematics Educator**, [*s. l.*], v. 14, n. 1, p. 42-46, 2004. DOI: https://doi.org/10.63301/tme.v14i1.1871

BECKMANN, S.; IZSÁK, A. Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in terms of quantities. **Journal for Research in Mathematics Education**, [*s. l.*], v. 46, n. 1, p. 17-38, 2015. DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0017

BECKMANN, S.; KULOW, T. K. How future teachers reasoned with variable parts and strip diagrams to develop equations for proportional relationships and lines. *In*: LI, Y.; LEWIS, W., MADDEN, J. (ed.) **Mathematics Matters in Education**: Essays in honor of Roger E. Howe. Advances in STEM Education. Cham: Springer, 2018. p. 117-148. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-61434-2_6

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BOOTH, J.; KOEDINGER, K. Facilitating low-achieving students' diagram use in algebraic story problems. *In*: ANNUAL MEETING OF THE COGNITIVE SCIENCE SOCIETY, 32., 2010, Portland. **Proceedings** [...]. Portland: CogSci, 2010. p. 1649-1654.

CAI, J.; NG, S. F.; MOYER, J. C. Developing students' Algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. *In*: CAI, J.; KNUTH, E. (ed.). **Early Algebraization**: A global dialogue from multiple perspectives. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2011. p. 25-41. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_3

CHEONG, Y. K. The model method in Singapore. **The Mathematics Educator**, [*s. l.*], v. 6, n. 2, p. 47-64, 2002.

CLEMENT, G.; AUSLANDER, S. S. The Singapore Modeling Method: Possibilities for improving Elementary Teacher Mathematics preparation. **PRIMUS**, [*s. l.*], v. 32, n. 10, p. 1125-1139, 2022. DOI: https://doi.org/10.1080/10511970.2021.1993396

DENNIS, M. S.; KNIGHT, J.; JERMAN, O. Teaching high school students with learning disabilities to use model drawing strategy to solve fraction and percentage word problems. **Preventing School Failure**: Alternative Education for Children and Youth, [*s. l.*], v. 60, n. 1, p. 10-21, 2016. DOI: https://doi.org/10.1080/1045988X.2014.954514

ENGLARD, L. Raise the bar on problem solving. **Teaching Children Mathematics**, [*s. l.*], v. 17, n. 3, p. 156-163, 2010. DOI: https://doi.org/10.5951/TCM.17.3.0156

FAN, L.; ZHU, Y. From convergence to divergence: the development of mathematical problem solving in research, curriculum, and classroom practice in Singapore. **ZDM**, [*s. l.*], v. 39, p. 491-501, 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-007-0044-1

GANI, M. A.; TENGAH, K. A.; SAID, H. M. Bar model as intervention in solving word problem involving percentage. **International Journal on Emerging Mathematics Education**, [*s. l.*], v. 3, n. 1, p. 69-76, mar. 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.12928/ijeme.v3i1.11093

HO, S. Y.; LOWRIE, T. Singapore students' performance on Australian and Singapore assessment items. *In*: DINDYAL, J.; CHENG, L. P.; NG, S. F. (ed.). **Mathematics education**: Expanding horizons. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Adelaide: MERGA, Inc., 2012. p. 338-345.

HO, S. Y.; LOWRIE, T. The model method: Students' performance and its effectiveness. **The Journal of Mathematical Behavior**, [*s. l.*], v. 35, p. 87-100, 2014. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.06.002

HOVEN, J.; GARELICK, B. Singapore math: Simple or complex? **Educational Leadership**, [*s. l.*], v. 65, n. 3, p. 28-31, 2007.

JAN, S.; RODRIGUES, S. Model drawing strategy: A tool to link abstract words to real life. **International Researcher**, [*s. l.*], v. 1, n. 4, p. 137-148, 2012.

JIANG, C.; CHUA, B. L. Strategies for solving three fraction-related word problems on speed: A comparative study between Chinese and Singaporean students. **International Journal of Science and Mathematics Education**, [*s. l.*], v. 8, p. 73-96, 2009. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-009-9163-1

JIANG, C.; HWANG, S.; CAI, J. Chinese and Singaporean sixth-grade students' strategies for solving problems about speed. **Educational Studies in Mathematics**, [*s. l.*], v. 87, p. 27-50, 2014. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-014-9559-x

KAUR, B. The model method – A tool for representing and visualising relationships. *In*: SUN, X.; KAUR, B.; NOVOTNA, J. (org.). **Conference Proceedings of ICMI Study 23**: Primary Mathematics Study on Whole Numbers. Macau: University of Macau, 2015. p. 448-455.

KAUR, B. The why, what and how of the 'Model' method: A tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. **ZDM**, [*s. l.*], v. 51, n. 1, p. 151-168, 2019. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-018-1000-y

KHEONG, F. H. Bridging the gap between secondary and primary mathematics. **Teaching and Learning**, Singapore, v. 14, n. 2, p. 73-84, 1994.

KHEONG, F. H. Some generic principles for solving mathematical problems in the classroom. **Teaching and Learning**, Singapore, v. 19, n. 2, p. 80-83, 1999.

KHNG, K. H.; LEE, K. Inhibiting interference from prior knowledge: Arithmetic intrusions in algebra word problem solving. **Learning and Individual Differences**, [*s. l.*], v. 19, n. 2, p. 262-268, 2009. DOI: https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.01.004

KHO, T. H. Mathematical models for solving arithmetic problems. In: SOUTHEAST ASIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL EDUCATION, 4., 1987, Singapore. **Proceedings** [...]. Singapore: Institute of Education, 1987. p. 345-351.

KHO, T. H.; YEO, S. M.; FAN, L. Model method in Singapore primary Mathematics textbooks. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS TEXTBOOK RESEARCH AND DEVELOPMENT – ICMT, 2014, Southampton. **Proceedings** […]. Southampton: ICMT, 2014. p. 275-282.

KOLEZA, E. The bar model as a visual aid for developing complementary/variation problems. *In*: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION – CERME, 9., 2015, Praga. **Proceedings** [...]. Praga: CERME, 2015. p. 1940-1946.

KONING, B. B.; BOONEN, A. J. H.; JONGERLING, J.; VAN WESEL, F.; VAN DER SCHOOT, M. Model method drawing acts as a double-edged sword for solving inconsistent word problems. **Educational Studies in Mathematics**, [*s. l.*], v. 111, n. 1, p. 29-45, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-022-10150-8

LEE, K.; KHNG, K. H.; NG, S. F.; KONG, J. N. L. Longer bars for bigger numbers? Children's usage and understanding of graphical representations of Algebraic problems. **Frontline Learning Research**, Leuven, v. 1, n. 1, p. 81-96, 2013. DOI: https://doi.org/10.14786/flr.v1i1.49

LEE, K.; LIM, Z. Y.; YEONG, S. H. M.; NG, S. F.; VENKATRAMAN, V.; CHEE, M. W. L. Strategic differences in algebraic problem solving: Neuroanatomical correlates. **Brain Research**, [*s. l.*], v. 1155, p. 163-171, 2007. DOI: https://doi.org/10.1016/j.brainres.2007.04.040

LEE, K.; NG, S. F. Solving Algebra word problems: The roles of working memory and the model method. **Mathematics education: the Singapore Journey**, Singapore, p. 204-226, 2009. DOI: https://doi.org/10.1142/9789812833761_0009

LEE, K.; NG, S. F. Neuroscience and the teaching of mathematics. **Educational Philosophy and Theory**, London, v. 43, n. 1, p. 81-86, 2011. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1469-5812.2010.00711.x

LEE, K.; NG, E. L.; NG, S. F. The contributions of working memory and executive functioning to problem representation and solution generation in algebraic word problems. **Journal of Educational Psychology**, Washington, v. 101, n. 2, p. 373-387, 2009. DOI: https://doi.org/10.1037/a0013843

LOOI, C.-K.; LIM, K.-S. From bar diagrams to letter-symbolic algebra: a technology-enabled bridging. **Journal of Computer Assisted Learning**, [*s. l.*], v. 25, n. 4, p. 358-374, 2009. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2009.00313.x

LOOI, C.-K.; NG, F.-K.; KHO, T. H. Technology-enabled pedagogy to bridge bar diagrams to letter-symbolic algebra. **Frontiers in Artificial Intelligence and Applications**, [*s. l.*], v. 162, p. 29-36, 2007.

MADANI, N. A.; TENGAH, K. A.; PRAHMANA, R. C. I. Using bar model to solve word problems on profit, loss and discount. **Journal of Physics: Conference Series**, [*s. l.*], v. 1097, p. 1-10, 2018. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012103

MEN, O. L.; ISMAIL, Z.; ABIDIN, M. Using maths model method in solving pre-algebraic problems among year five students. *In*: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING, ASSESSMENT, AND LEARNING FOR ENGINEERING – TALE, 2018, Wollongong. **Proceedings** […]. Wollongong: TALE, 2018. p. 222-227. DOI: https://doi.org/10.1109/TALE.2018.8615364

MURATA, A. Mathematics teaching and learning as a mediating process: The case of tape diagrams. **Mathematical Thinking and Learning**, [*s. l.*], v. 10, n. 4, p. 374-406, 2008. DOI: https://doi.org/10.1080/10986060802291642

NG, S. F. How secondary two express stream students used algebra and the model method to solve problems. **The Mathematics Educator**, Singapore, v. 7, n. 1, p. 1-17, 2003.

NG, S. F. Developing algebraic thinking in early grades: Case study of the Singapore primary Mathematics curriculum. **The Mathematics Educator**, Singapore, v. 8, n. 1, p. 39-59, 2004.

NG, S. F. How a Singapore teacher used videos to help improve her teaching of the part-whole concept of numbers and the model method. Cases of Mathematics Professional Development in East Asian Countries: Using Video to Support Grounded Analysis. **Mathematics Teacher Education**, Singapore, v. 10, p. 61-82, 2015. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-287-405-4_5

NG, S. F. The model method: Crown jewel in Singapore mathematics. **Asian Journal for Mathematics Education**, Shanghai, v. 1, n. 2, p. 147-161, 2022. DOI: https://doi.org/10.1177/27527263221107526

NG, S. F.; LEE, K. How primary five pupils use the model method to solve word problems. **The Mathematics Educator**, Singapore, v. 9, n. 1, p. 60-83, 2005.

NG, S. F.; LEE, K. As long as the drawing is logical, size does not matter. **The Korean Journal of Thinking and Problem Solving**, Daegu, v. 18, v. 1, p. 67-82, 2008.

NG, S. F.; LEE, K. The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. **Journal for Research in Mathematics Education**, [*s. l.*], v. 40, n. 3, p. 282-313, 2009. DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0282

NG, S. F.; LEE, K.; YIN, A. S.; KHNG, F. Model method: Obstacle or bridge to learning symbolic algebra. **Redesigning Pedagogy**, Leiden, p. 225-242, 2006. DOI: https://doi.org/10.1163/9789087900977_017

OSMAN, S.; YANG, C. N. A. C.; ABU, M. S.; ISMAIL, N.; JAMBARI, H.; KUMAR, J. A. Enhancing students' mathematical problem-solving skills through bar model visualisation technique. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, Ankara, v. 13, n. 3, p 273-279, 2018. DOI: https://doi.org/10.12973/iejme/3919

RICHIT, L. A. **Frações e o Modelo de Barras de Singapura**: uma análise semiótica das argumentações de futuros professores de matemática. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2023.

RICHIT, L. A.; RICHIT, A. O Modelo de Barras de Singapura na resolução de problemas aritméticos e algébricos. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 36, n. 73, p. 697-724, 2022. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05

RICHIT, L. A.; RICHIT, A. Sentidos atribuidos a los dibujos del Modelo de Barras de Singapur en la literatura. **Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, Granada, v. 19, n. 3, p. 223-252, 2025. DOI: https://doi.org/10.30827/pna.v19i3.29667

RUIZ URBANO, S.; FERNÁNDEZ BRAVO, J. A.; FERNÁNDEZ PALOP, P. El modelo de barras: una estrategia para resolver problemas de enunciado en Primaria. **Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología**, Madrid, v. 3, n. 1, p. 23-37, 2016.

SAID, S. N.; TENGAH, K. A. Supporting solving word problems involving ratio through the bar model. **Infinity Journal**, Cimahi, v. 10, n. 1, p. 149-160, 2021. DOI: https://doi.org/10.22460/infinity.v10i1.p149-160

SEVINC, S.; LIZANO, C. Bar model method as a problem-solving heuristic: an investigation of two preservice teachers' solution paths in problems involving ratio and percentage. **Mathematics Education Research Journal**, [*s. l.*], v. 36, n. 1, p. 71-95, 2024. DOI: https://doi.org/10.1007/s13394-022-00427-9

VICENTE, S.; SÁNCHEZ, R.; VERSCHAFFEL, L. Word problem solving approaches in mathematics textbooks: a comparison between Singapore and Spain. **European Journal of Psychology of Education**, [*s. l.*], v. 35, n. 3, p. 567-587, 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/s10212-019-00447-3

VICENTE, S.; VERSCHAFFEL, L.; SÁNCHEZ, R.; MÚÑEZ, D. Arithmetic word problem solving. Analysis of Singaporean and Spanish textbooks. **Educational Studies in Mathematics**, Leiden, v. 111, n. 3, p. 375-397, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-022-10169-x

WIDYASARI, N.; ROSIYANTI, H. Developing material for promoting problem-solving ability through Bar Modeling Technique. **Journal of Physics: Conference Series**, [*s. l.*], v. 948, n. 1, p. 1-6, 2018. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/948/1/012055

WILLYARTO, M. N.; PANE, M.; CHAIRIYANI, R. Mathematics learning method of Bar modeling for elementary school students. **Advanced Science Letters**, [*s. l.*], v. 21, n. 7, p. 2328-2331, 2015. DOI: https://doi.org/10.1166/asl.2015.6266

YEAP, B. H.; FERRUCCI, B. J.; CARTER, J. A. Comparative study of Arithmetic problems in Singaporean and American Mathematics textbooks. *In*: LEUNG, F. K. S.; GRAF, K. D.; LOPEZ-REAL, F. J. (ed.). **Mathematics Education in Different Cultural Traditions-A Comparative Study of East Asia and the West**. New ICMI Study Series. Boston: Springer, 2006. p. 213-225. DOI: https://doi.org/10.1007/0-387-29723-5_13

Recebido em 15/02/2025
Versão corrigida recebida em 19/08/2025
Aceito em 22/11/2025
Publicado online 27/11/2025