DOI:10.5212/PraxEduc.v.7i2.0001

Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches surl'enseignement des mathématiques?

What are the theories and methods guiding research on the teaching of mathematics?

Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática?

Raymond Duval*

Resumé: Les mathématiques soulèvent des difficultés de compréhension qu'on ne retrouve pas dans les autres les autres disciplines. Les choix d'une théorie et d'une méthode pour recueillir et analyser les productions des élèves dépendent du point de vue auquel on se place pour les étudier. Dans cet article nous examinerons et comparerons l'apport spécifique des points de vue mathématique, cognitif et pédagogique pour analyser les processus de compréhension et d'acquisition de connaissances en mathématiques. Dans ce but nous aborderons quatre questions: a) les critères de compréhension sont-ils les mêmes selon ces trois points de vue? b) la réussite mathématique à un problème implique-t-elle la compréhensiond'unpoint de vue cognitif? c) comment distinguer des types d'erreurs pour analyser les causes d'incompréhension? d) les progressions construites à partir d'analyses en termes de «prérequis» favorisent-elles ou ignorent-elles le développement cognitif spécifique qui permet de comprendre en mathématiques? Nous montrerons que l'importance particulière du point de vue cognitif vient du fait que l'activité mathématique a toujours deux faces.
Mots clés: Critères de compréhension. Décomposition d'une connaissance. Reconnaissance.

Abstract: Mathematics presents some difficulties of comprehension which are not found in other subjects. The choice of theories and methods to collect and analyze students' work depends on the perspective taken to study them. This paper examines and compares the mathematical, cognitive and pedagogical perspectives to analyze the process of comprehension and acquisition of mathematical knowledge. With this aim, four issues are approached: a) are the comprehension criteria the same under the three perspectives?; b) does mathematical success with a problem mean comprehension of a cognitive viewpoint?; c) how can types of error be distinguished in order to analyze the causes of lack of comprehension?; d) do progressions built on "pre-requisite" analyses favor or ignore the specific cognitive development which leads to the comprehension

* Université du Littoral Côte d'Opale/França. E-mail: <duval.ray@wanadoo.fr>

of mathematics? The paper shows that the particular importance of the cognitive perspective stems from the fact that the mathematical activity has always two sides.
Keywords: Criterion for comprehension. Decomposition of knowledge. Recognition.

Resumo: A matemática provoca dificuldades de compreensão que não são encontradas em outras disciplinas. A escolha de uma teoria e de um método para recolher e analisar os trabalhos dos alunos depende do ponto de vista do qual nós nos baseamos para estudá-los. Neste artigo, nós examinaremos e faremos uma comparação dos aportes específicos dos pontos de vista matemático, cognitivo e pedagógico para analisar os processos de compreensão e de aquisição de conhecimentos em matemática. Com este objetivo nós abordaremos quatro questões: a) os critérios de compreensão são os mesmos segundo estes três pontos de vista?; b) o sucesso matemático em um problema implica na compreensão de um ponto de vista cognitivo?; c) como distinguir tipos de erros para analisar as causas de incompreensão?; d) as progressões construídas à partir de análises em termos de "pré-requisitos" favorecem ou ignoram o desenvolvimento cognitivo específico que permite compreender em matemática? Nós mostraremos que a importância particular do ponto de vista cognitivo vem do fato que a atividade matemática tem sempre duas faces.
Palavras-chave: Critério de compreensão. Decomposição de um conhecimento. Reconhecimento.

Introduction

Cette question peut paraître naïve ou déplacée, parce que les recherches sur l'enseignement des mathématiques sont maintenant une spécialité universitairement bien identifiée et directement liée à la formation des enseignants. Elle s'impose, cependant, tant le champ de ces recherches est vaste et divers. Il y a tout d'abord l'hétérogénéité des populations d'élèves auquel l'enseignement des mathématiques s'adresse : tous les élèves du primaire au lycée, puis les sous-populations d'étudiants qui suivent des filières scientifiques ou techniques. Il y a la diversité des domaines dont il faut transmettre des acquis : les nombres, la géométrie, l'analyse, l'algèbre, les statistiques, etc. Il y a aussi le renouvellement des méthodes ou des outils didactiques, par exemple avec l'utilisation de l'informatique. Et il y a l'évolution des attentes sociales en matière de formation des individus, auxquelles les réformes successives des programmes tentent de répondre.

Le champ des recherches sur l'enseignement des mathématiques est donc très éclaté. Que peut-il y avoir de commun entre des recherches sur les activités numériques ou sur la géométrie à l'école primaire, sur l'introduction de l'algèbre ou sur la demande de «preuves» au collège, sur l'analyse ou sur l'algèbre linéaire à l'université? Ce ne sont pas les mêmes profils d'élèves du point de vue du stade de développement intellectuel et des orientations d'avenir, proches ou lointaines.

En outre, les contenus enseignés ne relèvent pas des mêmes domaines, bien que les frontières les séparant puissent être fluentes. Bien sûr, on peut toujours répondre: «des mathématiques!». Il s'agirait, dans tous les cas, de faire «faire des mathématiques» en faisant résoudre des problèmes qui montreraient l'utilité pratique ou l'intérêt esthétique des mathématiques. Mais cela n'établit aucun consensus entre ceux dont les travaux portent sur des contenus mathématiques qui sont différents, enseignés à des populations différentes et avec des objectifs de formation différents. Quel peut être alors le domaine de validité des «théories» auxquelles on se réfère? Reste-t-il restreint au champ particulier de recherche pour lequel telle ou telle théorie a d'abord été élaborée ou peut-il s'étendre à tous les niveaux de l'enseignement des mathématiques? Une théorie peut-elle même englober tous les points de vue que l'on peut avoir sur l'organisation de l'enseignement et sur le choix de ses contenus?

Pour saisir la raison profonde et l'objet des recherches en didactique, il faut rappeler les deux changements qui ont créé la situation radicalement nouvelle dans laquelle l'enseignement des mathématiques se trouve maintenant. Tout d'abord il y a eu ce qu'on a alors appelé la «massification de l'enseignement secondaire» avec l'ouverture d'un même parcours d'études pour tous les élèves jusqu'à seize ans. Et il y a eu le besoin d'une autre approche mathématique des contenus enseignés à la fois pour une pédagogie plus active et pour l'adaptation à un environnement technologique qui exigeait plus de connaissances mathématiques. Cela a fait apparaître l'urgence d'une question qui, auparavant, ne s'était jamais posée à cette échelle démographique et sous la pression culturelle d'une «alphabétisation mathématique»: pourquoi les mathématiques soulèvent-elles des difficultés profondes d'apprentissage qu 'on ne retrouve pas dans les autres disciplines et pourquoi ces difficultés se révelènt-elles être insurmontables pour beaucoup d'élèves?

Cette question des difficultés spécifiques à l'apprentissage des mathématiques constitue évidemment le défi majeur de l'enseignement. On la retrouve à tous les niveaux du curriculum. Y répondre est l'enjeu majeur des recherches sur l'enseignement, puisqu'il concerne la compréhension et la capacité d'utilisation des mathématiques par les élèves. Mais comment? Et c'est là que l'on retrouve notre question initiale sur les théories et les méthodes requises pour mener ces recherches.

Pour décrire les processus de compréhension *faut-il importer des théories cognitives plus générales* comme on l'a fait avec le modèle constructiviste de Piaget, comme on le fait plus récemment avec la sémiotique de Peirce, et comme on commence à le faire en regardant du côté des neuro-sciences? Ou, au contraire, *faut-il privilégier l'étude épistémologique de la construction des objets ou des notions mathématiques* et la recherche des types de problèmes qui ont conduit à leur développement? Autrement dit, quel que soit la théorie que l'on choisit, il faut s'interroger d'une part sur sa pertinence par rapport aux problèmes spécifiques de compréhension que l'apprentissage des mathématique soulève et, d'autre part, sur son domaine de validité. Et, au cas où la théorie est pertinente, est-elle valide seulement pour quelques contenus mathématiques, pour un niveau d'enseignement, ou s'applique-t-elle à différents domaines des mathématiques et aux différents niveaux d'enseignement?

Pour analyser les phénomènes de compréhension et d'acquisition de connaissances par les élèves, faut-il priviligier des méthodes relatives aux données qualitatives recueillies «sur le terrain» pendant le travail en classe? Ou, au contraire, faut-il privilégier des méthodes relatives à des données quantitatives, fondées sur les performances et les réponses mathématiques des élèves au terme d'une séquence d'apprentissage? Autrement dit, quels que soient la méthode et le type de données choisis, il faut s'interroger sur les *critères retenus dans l'analyse des productions des élèves* pour déterminer un indicateur de compréhension ou une réelle acquisition ultérieurement mobilisable dans d'autres contextes. La validité des résultats et la fiabilité de leur interprétation dépendent du choix des critères de compréhension ainsi que du niveau de regroupement des éléments que l'analyse des productions conduit à distinguer. Car ce qu'il s'agit d'évaluer ici, n'est pas seulement l'acceptabilité d'un résultat, mais son apport et la possibilité de sa reprise dans d'autres travaux. C'est là la condition d'un réel progrès des connaissances dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques.

Ce sont toutes ces questions que nous allons reprendre et développer dans cet article. Elles montrent la complexité particulière, trop souvent sous-estimée, des recherches sur l'enseignement des mathématiques. Cette complexité tient à ce que le champ des recherches relève de plusieurs points de vue totalement différents et qui ne doivent jamais être confondus: point de vue mathématique, point de vue épistémologique, point de vue cognitif, point de vue des élèves, point de vue des enseignants, point de vue institutionnel, etc. Car les phénomènes observés et les problèmes à explorer sont loin d'être les mêmes selon le point de vue où l'on se place! Nous touchons là au point aveugle de la plupart des recherches: la relation entre ces différents points de vue. Y-a-t-il un point de vue qui soit central et auquel on puisse surbordonner les autres, ou qui les englobe? Ou, au contraire, certains points de vue sont-ils également centraux et irréductibles l'un à l'autre, voire même localement incompatibles?

Nous allons reprendre toutes questions selon l'ordre inverse de celui qui est classiquement demandé pour la soumission d'une communication à un Congrès, d'un article à une revue, et pour la rédaction d'un mémoire ou d'une thèse. Nous commencerons par la question des critères de compréhension en mathématiques. Nous montrerons qu'il y a deux points de vue essentiels et irréductibles l'un à l'autre: le point de vue mathématique et le point de vue cognitif. Nous soulignerons que le point de vue cognitif est irréductible au point de vue psychologique ou pédagogique, car il doit prendre en compte la situation épistémologique du mode d'accès aux objets mathématiques. Puis, nous aborderons la question méthologique de l'analyse et de l'interprétation des productions des élèves. Leur analyse exige un double codage. Nous verrons les problèmes sépcifiques que cela soulève. Le premier concerne la possibilité ou non d'interpréter les réussites en termes de compréhension ou d'acquisition d'une connaissance par les élèves. Le second concerne la nécessité de ne jamais confondre deux types d'erreurs qui, tant au plan de l'observation qu'à celui des raisons de l'incompréhension qu'elles manifestent, sont radicalement différentes. Enfin, nous aborderons la question du choix d'une théorie, qu'hélas on met trop souvent en avant, dans les recherches ou dans la formation à la recherche! Nous verrons *qu'une théorie est toujours liée à un point de vue et un seul*, même si ce point de vue doit toujours s'articuler avec le point de vue mathématique.

Qu'est-ce que comprendre en mathématiques? Points de vue cognitif et mathématique

En mathématiques, plus que dans toutes les autres disciplines, il faut comprendre pour pouvoir apprendre. On ne peut apprendre des mathématiques et mener à bien les activités proposées qu'à la condition de comprendre non seulement les consignes ou les énoncés de problème, mais aussi ce que l'on peut faire pour chercher et pourquoi ce que l'on trouve est juste ou erroné. La répétition, les automatismes ne permettent aucune acquisition réelle et utile. Car l'application d' une procédure, ainsi apprise ou expliquée par un autre, conduit souvent à des erreurs déroutantes qui montrent qu'*«on a pas compris»*, ou que la connaissance sous-jacente n'a pas été acquise. Cette exigence constante de compréhension place l'enseignement des mathématiques dans une situation très particulière par rapport à tous les autres enseignements et pose une première question sur ce qu'on entend par «comprendre». Et, ici, des divergences profondes apparaissent entre le point de vue mathématique et le point de cognitif.

Comprendre: pouvoir justifier, ou d'abord reconnaître?

D'un point de vue mathématique, la compréhension doit répondre à *l'exigence épistémologique de preuve* qui est commune à toute connaissance scientifique. Certes, il ne s'agit pas ici de démontrer au sens strict du terme, mais il faut au moins pouvoir expliciter les *propriétés utilisées qui «expliquent»* comment on parvient à la solution d'un problème et pourquoi «ça marche», ou pourquoi d'autres réponses «ne peuvent pas marcher» même lorsqu'elles apparaissent perceptivement apparemment évidentes (DUVAL, 2011a). D'un point de vue mathématique, la compréhension commence avec une explication qui se fonde sur l'utilisation de propriétés mathématiques. Le but de l'enseignement est alors de faire acquérir la connaissance de ces propriétés, celles des nombres, des fonctions, des relations spatiales topologiques, affines, métriques etc. Dans cette perspective le développement de la compréhension dans *l'apprentissage se trouve réduit à un processus de conceptualisation*, c'est à dire de «construction» d'une connaissance relative à chaque propriété et à son utilisation mathématique ou pratique, en respectant les contraintes mathématiques sur leur ordre d'acquisition.

D'un point de vue cognitif, la compréhension est commandée par *le mode d'accès aux objets étudiés*. Or de ce point de vue les mathématiques se trouvent dans une situation épistémologique totalement à part par rapport aux autres disciplines scientifiques, même s'ils en partagent la même exigence de preuve. L'accès aux objets mathématiques n'est ni sensoriel ni instrumental comme en physique ou en chimie, mais il passe par la *production de représentations sémiotiques* qui ne doivent jamais être confondues avec les objets qu'elles représentent (DUVAL, 2008). D'un point de vue cognitif, comprendre en mathématiques c'est d'abord *reconnaître les objets mathématiques représentés*.

Cette reconnaissance se heurte très vite à un double obstacle. Il y a tout d'abord le fait que beaucoup de ces représentations donnent lieu à une reconnaissance immédiate qui fait va à l'encontre de la reconnaissance de ce qui est mathématiquement représenté. C'est le cas par exemple de toutes les représentations dont le contenu est purement visuel, comme les figures en géométrie, les graphes, les graphiques, etc., Elles imposent une reconnaissance perceptive et iconique des formes qui empêche de voir ce qui est mathématiquement représenté. De même l'usage de la langue naturelle en mathématiques est souvent équivoque. Cela apparaît déjà avec les termes antonymiques utilisés dans les énoncés de problème pour qualifier des nombres donnés ou à trouver, et qui désignent à la fois des quantités, ou des grandeurs, et des opérations sur les nombres relatifs («gagner/perdre», «augmenter/diminuer» , etc.). Et il y a surtout le paradoxe cognitif qui tient à l'impossibilité cognitive d'un double accès aux objets mathématiques: pas d'accès perceptif ou instrumental, mais seulement un accès sémiotique. Le problème crucial de la compréhension dans l'apprentissage des mathématiques tient à ce paradoxe que l'on peut formuler par les deux questions suivantes. Comment reconnaître que deux représentations sémiotiques différentes sont des représentations du même objet, si l'on a pas un accès non sémiotique à ce qui est représenté? Inversement comment reconnaître que deux représentations sémiotiques dont les contenus sont presque pareils représentent ou ne représentent pas deux objets différents, si on ne dispose que de ces représentations?

La divergence entre ces deux approches des critères de compréhension semble si forte que se placer à un point de vue semble faire perdre l'autre de vue. Du point de vue mathématique, l'approche cognitive conduit à ignorer les contenus mathématiques et à oublier qu'on ne peut pas apprendre en mathématiques sans «faire» un peu de mathématiques. Et c'est évidemment ainsi que les enseignants réagissent lorsque, face aux productions d'élèves, ils estiment que ceux-ci «n'ont pas compris». Du point de vue cognitif, «faire» des mathématiques exige des gestes intellectuels qui ne sont pas liés à un contenu mathématique particulier et qui, en outre, ne sont jamais sollicités dans les autres disciplines. Car les manières de raisonner, de définir, de voir, et de poser des problèmes ne sont pas les mêmes en mathématiques et en dehors des mathématiques. Le plus souvent c'est de cette différence insaisissable, mais jamais expliquée, que les élèves parlent lorsqu'ils disent «ne pas comprendre» ou «ne rien comprendre».

Les processus cognitifs de la reconnaissance des objets mathématiques

Pouvoir reconnaître le même objet dans deux représentations sémiotiques différentes implique que si une seule est donnée on puisse spontanément la convertir en l'autre et même en une troisième. C'est la condition première pour pouvoir commencer à chercher à résoudre des problèmes. En mathématiques, reconnaître un objet représenté et en convertir la représentation donnée en d'autres représentations relèvent des mêmes processus cognitif. Et cela n'est pas une affaire de mémoire ou d'association, car le fait d'avoir déjà vu les représentations données et celles à mobiliser n'aide en rien.

Deux points sont essentiels pour analyser le fonctionnement cognitif des représentations sémiotiques. Tout d'abord le contenu d'une représentation, c'est à dire ce qu'elle présente explicitement, n'est jamais l'objet lui-même, même s'il paraît avoir une ressemblance comme dans le cas des images (les représentations iconiques de Peirce). Ensuite, et surtout, le contenu d'une représentation, sémiotique ou non sémiotique, dépend du système, sémiotique, physique ou neurologique, qui est spécifiquement mobilisé pour produire la représentation, et non pas seulement de l'objet représenté. C'est pourquoi les contenus des représentations d'un même objet changent complètement selon le système qui a été mobilisé pour en produire une représentation. Il y a autant de contenus potentiels différents pour la représentation d'un objet que de systèmes différents permettant d'en produire une représentation! Or, comme nous l'avons dit plus haut, les objets mathématiques ont ceci de particulier que leur accès se trouve restreint à la seule production de représentations sémiotiques.

Les processus cognitifs de reconnaissance d'un même objet mathématique reposent sur la mise en correspondance des unités de sens que l'on peut distinguer dans les contenus respectifs de deux représentations différentes. La reconnaissance ne résulte pas de la connaissance préalable de l'objet ou de l'une des propriétés. Prenons un exemple classique: une «situation problème» de partage donnée à des élèves de 7-8 ans pour introduire la notion de division. Une enseignante propose l'énoncé suivant, accompagné d'un matériel pour aider la compréhension de l'énoncé et faire des manipulations. Puis lorsque les élèves ont effectué des manipulations elle demande de dessiner ce qu'ils ont représenté avec le matériel (VANHEULE-HAEK, 2001).

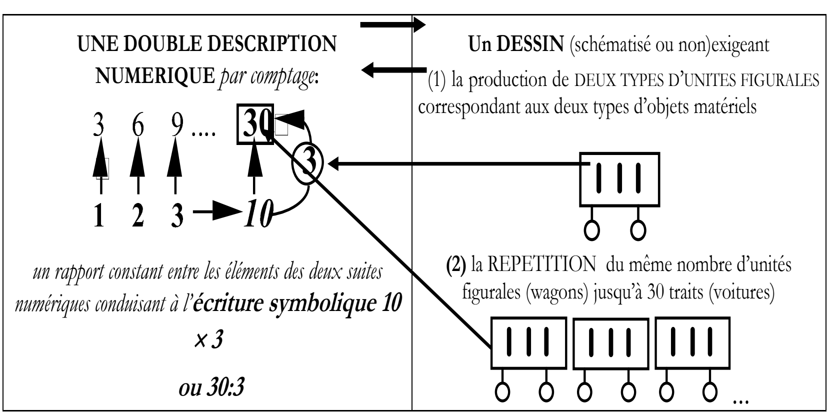
Figure 1 - Une situation problème de partage

ENONCE DECRIVANT	MATERIEL (manipulation)
Une situation de partage: On transporte *30* **voitures** dans *des* **wagons.** *Chaque* **wagon** peut transporter *3* **voitures.** Combien faut-il de wagons pour transporter toutes les voitures ?	Des **rectangles** pour les wagons Des **jetons** pour les voitures

Source: Le auteur.

La présentation de ce problème mobilise donc trois registres, *mais l'activité cognitive permettant de prendre une prise de conscience de la division* exige la mise en correspondances des unités de sens des contenus de deux types de représentation: d'une part la double suite des unités figurales des rectangles et des jetons et, d'autre part, la double suite de nombres correspondant respectivement au comptage des rectangles et à celui des traits. Nous avons représenté par des flèches les différentes mises en correspondance dont les élèves doivent prendre conscience.

Figure 2 - Les mises différentes mises en correspondance entre les unités de sens des contenus des représentations



Source: Duval (2008, p. 48).

Les dessins des élèves et l'écriture du comptage fait sur le dessin ont fait apparaître deux types de difficultés. Tout d'abord, pour certains, des difficultés au niveau de production d'un dessin qui respecte les données de l'énoncé. Ensuite, et c'est le plus important ici, *l'absence de toute prise de conscience de la double description numérique du dessin qu'ils avaient effectué pour dessiner le nombre de wagons en fonction du nombre de voitures*. Et cela s'est traduit par la seule écriture d'une suite d'opérations additives à laquelle pour obtenir le nombre 30: soit 3, 3… soit 3+3+… Autrement dit, il n'y a eu aucune prise de conscience de la correspondance entre les deux comptages et les deux types d'unités figurales produites.

D'un point de vue cognitif, la demande *d'une représentation des deux comptages en deux suites parallèles de nombres* était aussi essentielle que la demande d'un dessin à partir du matériel donné et manipulé. Car elle est la condition pour pouvoir faire la double mise en correspondance d'unités de sens qui est requise pour commencer à prendre conscience des opérations multiplicatives et de la division.

– celle qui permet de convertir le dessin en une écriture des nombres congruente au contenu du dessin, lequel est composé de deux types d'unités figurales à compter séparément.
– celle entre les termes successifs des deux suites de nombres. Elle permetd'observer la constance d'un rapport quand on passe d'un terme d'une suite au terme correspondant de l'autre.

On peut alors voir les deux impasses de l'organisation de la séquence d'activité, que l'enseignante avait pourtant admirablement organisée selon les critères didactiques enseignés en formation des enseignants. Tout d'abord, le dessin ne sert à rien par lui-même s'il n'est pas coordonné à un autre type de représentation. Et ici c'est une description numérique par comptage. Ensuite l'écrasement d'emblée de la double description numérique, qui est implicitement mobilisée pour produire les dessins des deux types d'unités figurales, en l'écriture d'une seule suite de nombres. Tout s'est passé comme si le contenu de l'écriture des opérations multiplicatives (10×3 et 30:3) avait été identifié à l'opération mathématique elle-même.

On peut aussi voir que les objectifs d'une séquence d'enseignement pour introduire l'opération de division auraient du être les mises en correspondance multiples et hétérogènes que la situation problème de partage exigeait pour que le but d'apprentissage soit atteint. Rien d'étonnant alors à ce que l'enseignante ait conclu que le dessin était un source supplémentaire de difficultés, au lieu d'être une aide ou un moyen de construire une «image mentale» comme elle l'avait cru, et qu'elle ait renoncé ensuite à y recourir pour ce type d'apprentissage.

Cet exemple n'a rien d'exceptionnel. On retrouve les mêmes courts-circuits cognitifs dans presque toutes les analyses de résolution de problèmes qui ont été choisis pour introduire de nouveaux concepts et dans les variables didactiques qui sont retenues pour organiser les séquences d'activités en classe.

Comprendre du point de vue psychologique et pédagogique

Il y a évidemment d'autres points de vue pour déterminer des critères de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques. Bien qu'ils soient périphériques par rapport aux critères mathématiques et cognitifs, parce qu'ils ne prennent pas en compte l'exigence épistémologique commune à toute connaissance scientifique et celle de la situation épistémologique spécifique aux mathématiques, ils sont néanmoins importants pour pouvoir évaluer les réelles acquisitions au terme d'un cycle d'enseignement.

D'un point de vue psychologique, les critères de compréhension sont relatifs non pas tant aux performances – réussite ou échec – qu'à leurs modalités. Deux critères sont alors importants. Le premier est le temps de réaction ou de réponse. Ainsi ce n'est pas du tout la même chose de réussir à des tâches qui ne demandent que peu d'opérations ou de transformations de représentation, en deux minutes, dix minutes ou plus d'une demi-heure! La compréhension implique une relative spontanéité de réponse, parce que sans cette rapidité, il n'y a plus aucune disponibilité d'attention possible lorsque d'autres informations ou d'autres tâches doivent être prises en compte en même temps. C'est ce que des psychologues ont appelé la «surcharge cognitive». Le deuxième critère est la possibilité de transfert. Celle-ci est souvent entendue dans le sens d'une application à d'autres contextes que celui dans lequel s'est fait l'apprentissage. Mais, en fait, il concerne la possibilité d'une facilitation d'autres apprentissages qui se feront plus rapidement. En ce sens la compréhension implique le développement de la capacité «à apprendre à apprendre». Plus concrètement, cela signifie que la compréhension développe une capacité d'initiative et de contrôle dans des situations qui sont entièrement nouvelles pour le sujet, ce qui est le cas par exemple pour la résolution de problème.

Le point de vue pédagogique porte sur le vécu des élèves, c'est-à-dire sur ce qu'ils ressentent lorsqu'ils sont mis en situation d'apprentissage. Chaque élève a une personnalité et une histoire propres. Ici d'autres facteurs interviennent: l'intérêt pour les tâches ou les types d'activité proposés (la «motivation»), l'interaction avec les autres élèves en fonction du statut dans la classe (pair ou expert !), et la «confiance en soi» et en ses propres capacités. Ce sont généralement les deux premiers critères pédagogiques qui retiennent l'attention et qui sont pris en compte pour l'organisation du travail en classe. Mais c'est le troisième qui détermine un critère de compréhension. Car il en est un effet immédiat, la compréhension étant vécue comme une expérience d'autonomie intellectuelle. Ce critère rejoint le critère psychologique du développement de la capacité à apprendre.

Questions méthodologiques concernant l'étude des problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques

Ce sont les productions des élèves, obtenues dans le cadre des activités qu'on leur demande, qui permettent d'étudier les problèmes de compréhension en mathématiques. Elles constituent les seules données permettant de dégager les conditions et les variables cognitives à prendre en compte dans l'apprentissage des mathématiques Mais alors que leur interprétation mathématique, dans un but d'évaluation, ne soulève aucune difficulté majeure, leur utilisation dans un travail de recherche pose deux questions méthodologiques. Quelles situations de production permettent d'observer les phénomènes d'incompréhension et de compréhension? Comment analyser les productions enregistrées, de manière à ce que leur interprétation apporte des connaissances utiles sur les facteurs de développement de la compréhension en mathématiques *pour tous les élèves*, sur une période d'une dizaine d'années, de six à seize ans?

Quelles données pour étudier les phénomènes de compréhension et d'incompréhension?

Les publications et les thèses se réfèrent essentiellement à l'une des ces trois situations de production: la passation de questionnaires, la résolution de problèmes, et l'observation d'une séquence d'activité en classe.

Les données ainsi obtenues semblent avoir une valeur différente. Les réponses à des questionnaires sont facilement quantifiables et se prêtent donc à des traitements statistiques, mais elles ne donnent pas, ou peu, d'indications sur les démarches qui ont conduit chaque élève produire ses réponses. C'est un peu la situation inverse pour la résolution de problèmes et pour l'observation du travail en classe. Ce qui les différencie ces deux situations est que l'une correspond au travail mathématique tandis que l'autre est celle des conditions réelles d'apprentissage dans le cadre d'un enseignement. Cependant ces différences sont très relatives. Car la fiabilité et la valeur informative des données recueillies ne tiennent pas au caractère «*live*», ou non, des observations faites, mais *à l'échelle de temps* à *laquelle elles sont faites* et à l'objet d'observation qu'on appelle très génériquement «l'élève», c'est à dire tous et aucun.

Les observations peuvent être faites à trois échelles de temps différentes. Cela peut être la durée d'une heure de classe, d'une séquence d'activité. Cela peut être l'année scolaire avec son programme. Dans ce cas les observations sont faites non pas à la fin d'une séquence d'apprentissage, mais quelques mois plus tard. Enfin ce peut être le curriculum. Dans ce dernier cas on regarde ce que les élèves ont compris ou acquis relativement à des contenus enseignés plusieurs années avant. C'est évidemment à cette échelle de temps que les enseignants d'un cycle se placent lorsqu'ils réagissent sur le «niveau» de leurs élèves, c'est à dire sur ce qu'ils ont acquis ou non dans les cycles antérieurs de l'enseignement. Un exemple très simple concerne les réponses à un problème additif donné à de futurs enseignants de primaire et qui en étaient à leur quatrième année d'université: un échec massif et persistant, Les seuls futurs enseignants pour qui ce problème était trivial venaient de filières scientifiques (DUVAL, 2011b, p. 126).

Il y a trois manières totalement différentes de choisir «l'élève» dont on va observer et enregistrer les productions. On peut observer ce que font des élèves *pris individuellement*. Car, personne ne peut réellement comprendre à votre place. Les connaissances mathématiques ne sont jamais directement communicables parce que les solutions ne prennent leur sens et ne deviennent utilisables qu'à partir de la démarche qui permet de les trouver. On ne comprend que ce qu'on peut faire et trouver par soi-même. On peut également ne plus regarder les élèves mais la classe, c'est à dire *un ou plusieurs groupes d'élèves travaillant en* «*interaction*» selon les consignes et le *tempo* donné par l'enseignant. Très souvent alors, on ne prend plus la peine de distinguer ce que chacun des élèves fait ou ne fait pas, on se contente de voir si globalement la séquence «a marché», c'est à dire si l'enseignant a réussi à faire participer les élèves aux différentes phases de l'engineering prévu. Enfin on peut se placer à l'échelle d'un système éducatif. On s'intéresse alors à ce que *la population entière d'un pays* aurait, ou n'aurait pas acquis, par rapport à des objectifs d'enseignement considérés comme étant mathématiquement et culturellement indispensables. Les enquêtes nationales et internationales d'évaluation visent ce type d'information.

Quelle que soit la situation de production retenue, la fiabilité et la valeur informative des données recueillies, et donc la portée des conclusions que l'on pourra avancer, dépendent d'abord de ce que l'on pourrait appeler les paramètres des données recueillies.

Il y a enfin l'exigence scientifique commune concernant l'interprétation des données recueillies. Pour interpréter des données recueillies dans des conditions déterminées, il faut pouvoir les comparer à d'autres obtenues dans des conditions qui en diffèrent par une variation contrôlable. Autrement dit, *les données ne s'interprètent pas directement*, mais indirectement. On interprète les différences entre toutes les données obtenues *en les rapportant à la variation de l'une des conditions dans lesquelles elles ont été obtenues*. On retrouve ici l'exigence scientifique première dans l'organisation de tout dispositif d'observation ou d'expérimentation. Pour les recherches en didactique, cela signifie que la véritable question méthodologique n'est pas celle du choix de la situation de production, questionnaire, résolution de problème, activité en classe, mais celle de l'organisation d'un dispositif qui va répondre à cette exigence de comparaison.

Comment analyser les productions des élèves dans l'apprentissage des mathématiques?

L'analyse des productions des élèves doit se faire à deux niveaux avec, évidemment, des critères totalement différents pour chacun des deux niveaux parce que la question qui commande l'analyse n'y est pas la même.

Le premier niveau est celui de l'évaluation mathématique des résultats, des procédures, ou des propriétés ou des arguments utilisés. Ils sont mathématiquement «justes» ou «faux». Et, comme pour tout ce qui se rapporte à l'accomplissement d'une tâche, cette évaluation est traduite en «réussites» et «erreurs». Dans les travaux de recherche, cette bipartition constitue la base de tout codage de données.

Le deuxième niveau est celui de l'analyse de la compréhension que les réussites manifestent et celui des sources d'incompréhension. C'est à ce niveau qu'on retrouve la question du choix des critères de compréhension, c'est à dire du point de vue adopté pour analyser les réussites: la réussite mathématique à une tâche implique-t-elle compréhension de la part des élèves? L'analyse de l'incompréhension que les erreurs manifestent est une analyse plus complexe.

Quel critère de compréhension pour analyser les «réussites» dans une perspective d'apprentissage?

Comme nous l'avons vu plus haut, on peut s'en tenir au critère mathématique. Dans ce cas, on regarde si les réponses ou les solutions «justes» sont expliquées par le recours aux propriétés pertinentes ou si elles permettent *d'en induire* la connaissance. Ce critère est d'ailleurs celui que les schémas didactiques d'organisation de séquences d'enseignement privilégient. Ils visent «la construction des concepts» par les élèves, et mettent l'accent sur la justification de toute réponse avancée.

Mais on peut aussi prendre le critère cognitif. Dans ce cas, on regarde si les élèves reconnaissent un même objet mathématique à travers les représentations différentes qui peuvent en être données, et s'ils peuvent reconnaître ce qui est mathématiquement différent quand on modifie quelque chose dans le contenu d'une représentation. L'article *Graphiques et équations*, publié en 1988 est la première analyse qui a été faite en fonction de ce critère cognitif de compréhension. Il portait sur la reconnaissance des fonctions affines par des élèves de 15-16 ans, après un enseignement de plusieurs mois sur les fonctions.

Le type de tâche permettant d'étudier la reconnaissance des objets représentés est une tâche de conversion de représentation. Evidemment ce type de tâche apparaît peu mathématique, mais *la conversion des représentations est implicitement et nécessairement requise dans toute activité de résolution de problème* et toute explication mathématique en classe y fait sans cesse appel. La situation de production choisie a été celle d'un questionnaire. Mais à la différence des questionnaires d'évaluation, il a été organisé selon l'exigence scientifique générale pour l'interprétabilité des données (supra 2.1). Les variations d'un item à l'autre portaient sur la modification de l'une des valeurs visuelles mathématiquement pertinentes dans le placement d'une droite sur un plan cartésien. Des variations analogues étaient faites pour les différentes zones du plan cartésien délimitées par les axes et par les bissectrices des angles des axes. Toute activité de calcul devant être exclue pour étudier la reconnaissance des objets représentés, la production demandée était le choix entre différentes écritures algébriques. Ce type de production présente aussi l'avantage de contrôler le temps nécessaire pour qu'un élève «réussisse». Car les réussites n'ont pas la même signification si elles sont obtenues quasi spontanément (le temps de lire les différentes écritures algébriques proposées) ou si au contraire il a fallu plusieurs minutes par items. Ainsi des enseignants ont pu fixer des temps différents de passation, ce qui entraînait des baisses importantes dans les pourcentages de réussite.

On peut alors voir la méthode nécessaire pour analyser les résultats en termes de compréhension ou d'acquisition dans une perspective d'apprentissage. Elle doit répondre à trois questions

– 1) Faut-il considérer les items pris isolément avec leur pourcentage, élevé moyen ou faible de réussites ou seulement des séquences d'items, la réussite étant alors la réussite à tous les items de la séquence?

– 2) Par rapport à quoi regrouper les items en une séquence qui seule sera considérée comme réussite?

– 3) Est-ce les réussites ou les différences de réussite à des questions portant sur le même objet qui sont significatives?

Pour la première question, on s'en tient presque toujours à la première alternative qui consiste à considérer implicitement que la réussite mathématique à une question est un indicateur de compréhension ou implique déjà une compréhension pour l'élève. D'un point de vue cognitif, les items isolés ne sont pas vraiment interprétables, il faut prendre une séquence d'items. Signalons d'ailleurs que les résultats quantitatifs ne sont pas les mêmes selon que l'on s'en tient aux items pris séparément ou que les réussites sont considérées à partir de leur regroupement en séquences. Car dans le second cas, avant d'effectuer les traitements statistiques, il faut effectuer un deuxième codage pour les regroupements d'items déjà codés en réussite, erreurs ou non réponse. Et cela conduit souvent à des conclusions totalement différentes.

La seconde question est cruciale. Les regroupements des items en une seule séquence des variations qui ont déterminé la construction du questionnaire en items. Dans le questionnaire de 1988 sur les fonctions affines, trois variables figurales ont été prises en compte pour le placement d'une droite sur un plan cartésien: le sens d'inclinaison, l'angle formé avec les axes et l'intersection avec l'axe des ordonnées. Et pour chacune des variables figurales, deux valeurs ont été retenues. On peut alors considérer comme une séquence les deux valeurs opposées pour chacune de trois variations figurales, par exemple la reconnaissance de y = x ET de y = -x ou celle de y = 2x ET de y = 1/2 x. Car reconnaître ce qu'un graphe représente c'est *être capable de le distinguer d'un autre graphe présentant au moins une valeur figurale opposée*.

Portant sur les représentations affines, le questionnaire de 1988 présente une limitation. La tâche de conversion y est proposée seulement dans un sens: des graphiques vers les équations. La conversion inverse n'a pas été sollicitée pour une raison simple. C'est celle qui est privilégiée pour introduire les représentations graphiques comme codage de points par des couples de nombres: il suffit de prendre deux couples de nombres pour placer une droite sur le graphique. Elle favorise une lecture locale des graphes et des graphiques, sans développer cette appréhension globale, qualitative et non iconique, qui apporte un contenu intuitif aux multiples écritures algébriques de relations et qui fournit un outil cognitif de contrôle. Pour les représentations de surfaces quadratiques, pour celles des autres fonctions, ou pour celles d'inégalités, il devient essentiel *que les tâches de reconnaissance comportent les deux sens de conversion*. Or, méthodologiquement, cela exige que les items portant sur la conversion directe et ceux portant sur la conversion inverse soient regroupés ou comptabilisés comme une seule «réussite» et non pas comme des réponses à des questions différentes et donc des réussites différentes. D'un point de vue cognitif la reconnaissance implique la spontanéité des conversions, *quelque soit le sens dans lesquels elles doivent être effectuées*. On peut alors voir que, très souvent, la réussite mathématique à des items n'implique pas la compréhension du point de vue cognitif.

La troisième question porte sur la possibilité d'une interprétation directe de la réussite ou d'un taux de réussite à une question. Il est important de rappeler que toute interprétation directe de réussites se fait par rapport à un objectif d'acquisition. On se trouve alors dans une perspective d'évaluation avec l'incertitude, par exemple, de savoir à partir de quel taux de réussite on parlera d'acquisition. Dans une perspective de recherche, l'interprétation des réussites ne se fait pas par rapport à un objectif d'acquisition, mais par rapport aux variations introduites dans l'organisation des tâches données. Elle ne peut porter que sur les différences de réussites. Ainsi on a pu observer régulièrement, pour les fonctions affines, des chutes spectaculaires de réussite entre les questions portant sur le signe du coefficient et celles portant sur la valeur du coefficient. Cette observation a constitué un résultat important concernant les conditions requises pour comprendre et voir les représentations graphiques dans leur lien avec le registre algébrique. Elle a permis *d'identifier les différentes variables figurales mathématiquement importantes que les élèves doivent être capables de distinguer* dans le placement d'une droite sur le plan cartésien, pour pouvoir reconnaître le graphe de n'importe quelle fonction affine particulière.

L'analyse des erreurs: source d'informations ou impasse?

Les erreurs constituent souvent une part importante des données recueillies. Leur analyse soulève deux problèmes. Le premier est celui de la recherche de l'origine des erreurs. La difficulté vient de ce qu'on ne peut plus utiliser ici les critères de compréhension comme dans l'analyse des réussites. On a cherché à expliquer les erreurs par des «*misconceptions*», c'est à dire par une «logique propre à la pensée de l'enfant» qui ne retiendrait que certains aspects d'un concept ou d'une procédure mathématique. Mais on cherche aussi à les expliquer par la complexité épistémologique des notions mathématiques enseignées, lesquelles condensent parfois un long développement historique. Le deuxième problème est celui de leur utilisation pour décrire les processus ou les cheminements par lesquels les élèves découvriraient les notions mathématiques. On peut ainsi classer les différents types d'erreurs en fonction de leur distance à une réussite mathématique attendue comme si cela permettait de modéliser le développement de la compréhension dans l'acquisition des connaissances. Mais cela ne peut valoir que pour la sous population qui, au terme d'une ou de plusieurs années d'enseignement, réussissent à comprendre et utiliser les concepts et les procédures mathématiques.

Il y a, en effet, deux types d'erreurs radicalement différentes: les erreurs transitoires et les erreurs récurrentes jamais dépassées. Les premières sont directement liées à une notion ou une procédure mathématiques particulières, par exemple la division, la symétrie axiale, la résolution d'équation, le théorème de Thalès etc. Elles apparaissent seulement lorsque ce contenu mathématique est directement mobilisé. Et ce sont celles qui retiennent l'attention des enseignants durant la période de temps consacrée à l'acquisition de sa connaissance. Les secondes sont indépendantes de tout contenu particulier, ou plus exactement transversales à tous les contenus, car elles concernent la manière de voir, de définir, de raisonner, de travailler en mathématiques. Elles réapparaissent chaque fois que les élèves ont un problème à résoudre par eux-mêmes et qu'ils doivent utiliser des connaissances mathématiques ou justifier mathématiquement un résultat. Elles manifestent des difficultés de compréhension qui se retrouvent à tous les niveaux du curriculum et que beaucoup ne surmontent pas.

Ces deux types d'erreurs sont rarement distingués. Car, dans un souci de formation des enseignants ou dans l'espoir de voir en *live* la manière dont les élèves pensent, la plupart des recherches didactiques se limitent aux observations faites à l'échelle de temps d'une heure ou d'une séquence d'activité sur deux ou trois semaines. Dans ce cas, toutes les erreurs sont assimilées à des erreurs transitoires c'est à dire à des difficultés liées à la compréhension du contenu mathématique particulier à acquérir. Et on fait comme si les manières de voir, de penser, de raisonner et même d'accéder aux objets étudiés étaient les mêmes en mathématiques que dans tous les autres domaines de la connaissance. Mais l'irréductibilité des erreurs récurrentes aux difficultés propres à la complexité épistémologique de chaque concept apparaît lorsqu'on fait des observations sur des durées plus longues et à une échelle de temps couvrant un ou même deux cycles d'enseignement.

A la différence des erreurs transitoires, les erreurs récurrentes doivent d'abord être analysées par rapport au fonctionnement cognitif particulier de la pensée que toute activité mathématique requiert et mobilise.

Points de vue et théories dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques

L'enseignement des mathématiques implique que l'on prenne en compte d'autres points de vue que le seul point de vue mathématique sur les contenus à enseigner. Et cela s'impose d'autant plus que l'enseignement s'adresse à une majorité écrasante d'élèves qui ne se destinent pas à faire des études supérieures en mathématiques ou en physique. Ces autres points de vue portent tous sur ce qui constitue l'objet des recherches didactiques: *l'acquisition de connaissances mathématiques, en tant qu'objectifs de formation générale ou de formation spécialisée*. Cette dernière précision est importante, car elle marque la séparation entre les différents points de vue sur les processus d'acquisition de connaissances mathématiques.

Ainsi le point de vue de la compréhension et des apprentissages par *les élèves* est indépendant de tout objectif de formation, comme le montrent les blocages et les difficultés récurrentes que l'on retrouve à tous les niveaux d'enseignement et dans tous le systèmes éducatifs. Le point de vue des objectifs de l'enseignement des mathématiques, soit dans le cadre de la formation générale ou dans ceux de formations spécialisées, est celui du choix de connaissances à enseigner et de leur organisation en un programme, en un curriculum en un parcours de formation. Ce point de vue est celui des *responsables institutionnels, des experts, etc*. Le point de vue de l'organisation et de la gestion des activités en classe *par les enseignants* est en revanche déterminé par les contenus mathématiques ainsi fixés qu'ils doivent faire acquérir par les élèves sur une année scolaire.

Cette diversité de points de vue sur l'acquisition de connaissances mathématiques soulève plusieurs questions sur le choix et la pertinence des «théories» utilisées dans les recherches didactiques. Ces questions sont importantes car les réponses qu'on donne, implicitement ou explicitement, engagent la manière de conduire une recherche en didactique et l'apport qu'on peut en attendre.

Y-a-t-il un point de vue qui soit plus central que les autres pour les recherches sur l'acquisition de connaissances mathématiques?

Les demandes institutionnelles concernant la formation des enseignants ont très vite conduit à *privilégier le point de vue de l'enseignant* et à développer des schémas globalisants d'organisation des activités qui soient applicables en classe. Ces schémas globalisants doivent

– 1) répondre à l'exigence institutionnelle de l'acquisition des contenus mathématiques qui sont définis dans le cadre du programme,

– 2) donner les critères pour choisir les activités en fonction des processus cognitifs d'acquisition de connaissances et

– 3) mettre les élèves dans une situation qui les pousse à s'investir dans les activités proposées.

La question que cette approche soulèvent réside d'abord dans le point (2): quels sont les processus cognitifs qui permettent de comprendre et d'acquérir des connaissances *en mathématiques*? Cette précision est cruciale. Car elle conduit à reformuler la question des processus d'acquisition des connaissances: sont-ils les mêmes en mathématiques que ceux qui sont spontanément mobilisés dans les autres domaines de la connaissance ou, au contraire, la pensée et le travail en mathématiques exigent-il un mode de fonctionnement cognitif différent et parfois contraire au fonctionnement cognitif spontané?

Presque toutes les recherches didactiques font l'impasse sur cette question. Car elles recourent à des théories du fonctionnement cognitif de la pensée *supposées valides pour tous les domaines de connaissance*. Un consensus s'est vite établi pour reprendre, dès les années 1970-1980, l'explication piagétienne de la formation des concepts chez l'enfant, bien que cette explication concerne autant les notions physiques que des notions mathématiques très générales, et qu'elle ait été élaborée à partir d'observations et d'épreuves que ne comportaient aucune tâche mathématique. La théorie de Piaget présentait l'avantage de paraître répondre à l'exigence institutionnelle (1), et elle permettait de reprendre, dans ce qui a été appelé le «construction de connaissances» par l'élève, les deux idées clés de cette théorie *en ne gardant comme critère de compréhension que le seul critère mathématique* (supra 1.1). D'une part, l'adaptation au milieu comme moteur de la formation des concepts, ce qui justifierait l'importance de la résolution de problème pour apprendre des mathématiques. D'autre part, la distinction de niveaux de développement dans des acquisitions, le premier étant celui des actions et des manipulations concrètes bien avant le recours au langage et à toute représentation sémiotique, ce qui a été transposé en schéma d'apprentissage pour l'introduction des concepts. Mais, pour le point (3), il a fallu faire appel à d'autres théories pour expliquer le rôle important des interactions verbales dans les activités données en classe.

L'étude des problèmes de compréhension et d'apprentissage des mathématiques *exige, au contraire, que l'on se place du point de vue des élèves* et que l'on parte de leurs productions individuelle, et que les observations soient faites à une échelle de temps qui ne soit pas seulement celle d'une séquence d'activité centrée sur l'introduction d'une notion ou d'une procédure (supra 2.1). Il n'est plus alors possible de faire l'impasse sur la situation épistémologique à part des mathématiques par rapport aux autres sciences. La plupart des erreurs et des blocages récurrents viennent de ce que les élèves en restent au fonctionnement cognitif spontanément mobilisé dans les autres domaines de connaissance, mais qui est souvent contraire à celui exigé quand le seul accès aux objets étudiés passe par des représentations sémiotiques (supra 1.2). Ainsi, sans une prise de conscience des variables figurales mathématiquement pertinentes, les élèves ne peuvent qu'en rester à une interprétation iconique et syncrétique des graphes et des graphiques, sans lien avec le registre algébrique.

Les registres de représentation sémiotique sont une description du mode de fonctionnement cognitif sous-jacent à toute activité mathématique, quel qu'en soit le domaine, activités numériques, géométrie, algèbre, analyse, etc. Leur intérêt est de déterminer les variables didactiques qui touchent directement les phénomènes de compréhension et d'incompréhension dans l'apprentissage des mathématiques (DUVAL, 2011b).

Quel rapport entre le point de vue mathématique et le point de vue sémio cognitif pour l'organisation de situations d'apprentissage?

A la différence des modèles psychologiques ou constructiviste, il y a une incompatibilité d'approche des processus d'acquisition de connaissances mathématiques entre le point de vue mathématique et le point de vue sémio-cognitif. Du point de vue mathématique, la priorité doit être donnée aux contenus, c'est à dire aux propriétés des objets mathématiques étudiés ainsi qu'à leur utilisation selon les critères mathématiques de compréhension. Du point de vue sémio-cognitif, l'activité mathématique consiste en deux types de transformation de représentations sémiotiques. La prise de conscience des différentes représentations possibles pour un même objet et la mise en correspondance de leurs contenus respectifs sont la première condition pour entrer dans la manière de penser propre aux mathématiques et pour la développer.

Il ne s'agit pas, bien sûr, de contester le fait que c'est seulement à partir de contenus mathématiques que les élèves peuvent comprendre et apprendre en mathématiques. La faiblesse ou la non pertinence des théories psychologiques et cognitives «importées», viennent de ce qu'elles sont élaborées à partir d'observations ou d'expériences faites avec des tâches non mathématiques. Mais il ne s'agit pas, non plus, de subordonner le point de vue cognitif au point de vue mathématique. Comment alors prendre également en compte ces deux points de vue dans l'organisation de situations d'apprentissage?

Il faut revenir sur ce que sont les «contenus mathématiques» que les enseignants ont pour charge de faire acquérir par les élèves. Ils ne relèvent pas directement du seul point de vue mathématique, mais du point de vue institutionnel sur l'organisation de l'enseignement des mathématiques. *En effet, la détermination des contenus à enseigner résulte de deux types de réflexion et de décision radicalement différents*. Le premier porte sur la détermination des objectifs que l'on assigne à l'enseignement des mathématiques dans la formation des élèves. Ils ne peuvent pas être les mêmes dans l'enseignement général commun et dans les différentes filières spécialisées. Mais ils impliquent le choix d'un complexe de connaissances relatif à un objet mathématique: par exemple, les fonctions affines, ou les équations (du premier ou deuxième degré) étant donné que l'acquisition de ce complexe de connaissances implique leur utilisation pour résoudre des problèmes. Le deuxième type, le plus important pour la recherche, porte sur *la décomposition de ce complexe de connaissances en éléments de base* qui feront l'objet d'apprentissages successifs, sur une période d'une année ou d'un cycle, et qui détermineront donc autant de sous-objectifs d'enseignement. Or il n'y a pas une mais deux manières d'effectuer cette décomposition d'un complexe de connaissance en éléments de base.

La première est évidemment mathématique. On explicite *les connaissances mathématiquement prérequises* pour comprendre le complexe de connaissance relatif à un objet et se l'approprier. Puis, on réitère cette analyse sur ces premiers prérequis, jusqu'à ce que l'on obtienne une suite d'éléments de base qui vont constituer les contenus mathématiques que les élèves devront acquérir sur une ou plusieurs années. Chaque prérequis ainsi isolé peut devenir un (sous) objectif d'enseignement. Cette décomposition *top down* détermine la progression de l'enseignement fixée dans les programmes. Ceux-ci suivent l'ordre inverse de la décomposition : on remonte des éléments de base au complexe de connaissance, dont l'acquisition est visée au terme d'un cycle. Aussi quand on parle de «construction de connaissances» par l'élève, c'est en réalité la *RE-construction bottom up de ce qui a été mathématiquement décomposé en termes de prérequis* qu'on demande aux élèves de faire. L'enseignement de l'algèbre au collège (élèves de 11-15 ans) en est une parfaite illustration (DUVAL, 2011a).

La seconde est cognitive. On explicite *les gestes intellectuels requis pour la compréhension et l'acquisition* du complexe de connaissance visé comme objectif de formation. Les gestes intellectuels sont *les opérations sémio-cognitives dont les élèves doivent avoir pris conscience* pour pouvoir travailler, de manière autonome, dans un champ d'activités et de problèmes. Pour l'algèbre, par exemple, ils concernent la redésignation indirecte des objets, les jeux de substitution et de mise en équivalence de deux désignations différentes d'un même objet, la focalisation sur les occurrences de signes dans une expression et non plus sur les signes eux-mêmes pour pouvoir effectuer les calculs, etc. Pour la géométrie, ils concernent, par exemple, la déconstruction dimensionnelle des formes qui change complètement la reconnaissance des unités figurales en fonction des propriétés énoncées ou à mobiliser pour résoudre un problème, etc. Or tout cela, répétons le, relève d'un fonctionnement cognitif qui est en rupture complète avec celui mobilisé en dehors des mathématiques. Les registres de représentation sémiotique sont le cadre d'analyse pour dégager ces opérations sémio-cognitives qui doivent devenir des gestes intellectuels familiers pour les élèves.

On voit alors ce qui restreint la portée et les progrès des recherches sur l'enseignement des mathématiques, en dehors bien sûr de l'innovation dans ces outils didactiques que sont des logiciels pour la géoémétrie ou pour l'algèbre. On attend des modèles cognitifs, psychologiques, ou autres qu'ils expliquent les difficultés de compréhension rencontrées localement dans le cadre de la décomposition mathématique préalable d'une connaissance en suite de contenus. D'ailleurs, la très grande majorité des recherches se focalisent sur un contenu particulier, considéré comme objectif d'acquisition à l'échelle d'une séquence didactique et de quelques semaines. En réalité, l'analyse cognitive de l'activité mathématique en gestes intellectuels ne peut pas être subordonnée à une décomposition des connaissances mathématiques en termes de prérequis. Car ils sont transversaux à tous les contenus mathématiques. Ainsi il n'y aura pas de progrès décisif dans l'introduction de l'algèbre tant que les recherches prendront, comme cadre organisateur des apprentissages, la seule progression *bottom up* fondée sur une décomposition des contenus mathématiques en termes de prérequis. Et c'est aussi la même chose pour l'enseignement de la géométrie au Primaire ou même au Collège.

L'activité mathématique comporte deux faces. Il y a celle proprement mathématique centrée sur les objets, leurs propriétés, les algorithmes, les preuves, et qui donne lieu à une décomposition en contenus mathématiques à enseigner. Et il y a celle cognitive des manières de voir, de raisonner, de définir, de sauter d'une représentation à l'autre avec ces objets mathématiques qui sont uniquement accessibles par les représentations sémiotiques que l'on produit. Cette face est la face cachée de l'activité mathématique. Elle est l'envers de la précédente. Elle ne se décompose pas en contenus mais en gestes intellectuels. C'est *l'acquisition de ces gestes intellectuels, et elle seule, qui donne aux élèves la capacité de comprendre, et de savoir comment utiliser des connaissances mathématiques pour résoudre des problèmes dans la réalité*.

Malheureusement, l'activité cognitive spécifique à la compréhension en mathématiques n'est jamais prise en compte dans les objectifs institutionnels de formation et dans les activités en classe. *L'organisation de l'enseignement et des situations d'apprentissage s'en tient toujours à un seul axe de décomposition des connaissances à acquérir, celui en termes de prérequis mathématiques*. L'utilisation de la notion générale de «compétence» pour évaluer ce qui est acquis par les élèves et pour décrire les acquisitions visées au terme d'un apprentissage en est le symptôme le plus manifeste. L'intérêt de cette notion est qu'elle est utilisée non seulement dans tous les domaines de la formation mais également pour déterminer des qualifications dans la vie professionnelle. Elle désigne un «savoir faire» pour des tâches bien précises. Sa faiblesse vient de ce que les critères pour déterminer une compétence vont dépendre du type d'activité propre au domaine où va l'utiliser. Et, en mathématiques, le critère pour définir des compétences reste la décomposition des contenus en termes de contenus mathématiquement prérequis. *Et cela conduit à produire et multiplier les listes de compétences à acquérir*. Car, même ce qu'on considère comme un élément de base dans la définition d'un programme peut toujours être décomposé en sous contenus mathématiquement prérequis.

Quelles conséquences cette diversité de points de vue entraîne-t--elle pour la formation des enseignants?

Depuis plus d'une trentaine d'années, la formation des enseignants s'est imposée comme la préoccupation majeure de toutes les politiques d'éducation, et particulièrement en mathématiques. Parallèlement, il y a la demande des futurs enseignants, ou des enseignants, sur «quoi faire» en classe pour que leurs élèves comprennent les différents contenus qu'ils doivent enseigner.

C'est dans ce contexte que l'organisation d'activités et leur gestion par l'enseignant sont devenues l'objet principal des recherches en didactique des mathématiques. L'objectif des recherches est alors l'élaboration de séquences d'activités, d'«ingénieries didactiques» qu'on puisse faire en classe. Il s'agit d'organiser, dans le cadre d'une résolution de problème, *une micro-progression dans le type d'activité* que l'on propose aux élèves. Et on suppose que cette micro-progression dans le type d'activité doit conduire les élèves à construire un nouveau concept, à découvrir une nouvelle procédure opératoire. Tout le travail d'observation va se concentrer sur le déroulement de cette micro-progression dans une ou dans plusieurs classes. Comment les élèves participent-ils aux différentes tâches proposées? Comment l'enseignant prend il en compte ce que font ou ce que disent les élèves? Les données recueillies vont alors être les interactions orales avec l'enseignant et avec les autres élèves. C'est ce type de donnée qu'on utilise pour valider, à l'échelle très locale de quelques séances et sur un contenu mathématique particulier, une séquence d'activité. Mais cela évidemment soulève le problème de savoir comment analyser et interpréter de ce type de données qualitatives (DUVAL, 2010).

En subordonnant la formation des enseignants à ce type de recherche, on est donc conduit non seulement à privilégier UN point de vue comme étant le point de vue principal, mais également à n'envisager que le seul axe de décomposition mathématique des connaissances à acquérir. Tout ce qui concerne ce que nous avons appelé la «face cachée» de l'activité mathématique et l'apprentissage des gestes intellectuels se trouvent *ipso facto* évacués, même lorsqu'on présente la théorie sémio-cognitive parmi toutes les théories didactiques entre lesquelles les enseignants peuvent choisir pour leur travail de recherche. Et cela soulève une vraie question pour la formation des enseignants. Car dans la réalité des classes, les enseignants se trouvent face à une situation complexe, résultant d'un triple décalage:

– *l'inadéquation fréquente* entre la séquence planifiée et ce que les élèves font réellement,

– *la grande diversité entre les élèves* d 'une même classe,

– *la distance cognitive et épistémologique* entre les mathématiques et les autres domaines de connaissance.

Les enseignants doivent alors être capables, comme des médecins en consultation,de faire à *deux types de diagnostic* à partir de ce que les élèves proposent, de ce qu'ils font ou ne font pas

– saisir la bonne suggestion (du point de vue mathématique) d'un élève et la faire partager à la classe, mais aussi

– 1) identifier *les raisons profondes des incompréhensions récurrentes et des blocages, et pas seulement des erreurs locales* dans le travail demandé,

– 2) trouver les tâches ou les exercices qui vont permettre d 'entrer dans les gestes intellectuels nécessaires pour faire pour pouvoir résoudre des problèmes et faire n 'importe quelle démarche mathématique.

Le deuxième type de diagnostic est aussi fondamental que le premier et, surtout, il est fréquemment sollicité durant les premières années d'enseignement, au primaire et au collège. Comment les enseignants peuvent-ils s'y préparer si toute leur formation comme futurs enseignants s'en tient à une seule face de l'activité mathématique? Comment peuvent-ils réagir de manière adaptée s'ils n'ont pas eux-mêmes pris conscience de ces gestes intellectuels qui sont la pensée mathématique en acte?

Conclusion

Quatre points essentiels caractérisent l'enseignement des mathématiques

1) Enseigner exige que l'on se place à un autre point de vue que celui des exigences mathématiques qui déterminent la communication scientifique d'un résultat ou les discussions entre mathématiciens face à un problème à résoudre.

2) Les contenus mathématiques enseignés résultent toujours de la décomposition d'un complexe de connaissance qui a été retenu comme objectif global d'acquisition pour une population d'élèves au terme d'un cycle d'études. Cette décomposition se fait toujours en termes de connaissances mathématiques prérequises. Sa réitération peut conduit à isoler des contenus qui deviennent des sous-objectifs distincts et sucessifs d'acquisition, à l'échelle de temps d'une année, ou de quelques semaines.

3) L'enseignement des mathématiques se heurte à des problèmes spécifiques de compréhension qui ne se posent pas dans les autres disciplines enseignées. Ces problèmes tiennnet à ce que le mode d'accès aux objets mathématiques est radicalement différent du mode d'accés aux autres objets de connaissance. Cela correspond à ce que nous avons appelé «la situation épistémologique à part des mathématiques». Elle donne lieu au paradoxe cognitif de la connaissance mathématique.

4) Ces problèmes spécifiques de compréhension sont devenus d'autant plus importants que l'enseignement des mathématiques se trouve depuis les années 1960-1970 dans une situation historique sans précédent. Non seulement tous les élèves doivent faire des mathématiques jusqu'à seize ans, et même au delà, mais les attentes de formation en matière d'acquisitions de base sont devenues plus exigeantes et plus variées,

> en raison des besoins du développement des «hautes technologies» dans tous les domaines de l'activité professionnelle. C'est pourquoi toute comparaison avec des situations antérieures, pour l'acquisition de connaissances mathématiques apparaît fictive.

Les recherches sur l'enseignement des mathématiques portent sur les problèmes qui se posent quand on se place à un autre point de vue que le point de vue mathématique (1). Le choix de théories et de méthodes ne va pas être le même selon le point de vue auquel on se place. Dans cet article, nous avons essentiellement considéré le point de vue cognitif, celui sur les processus d'acquisition et le fonctionnement de la pensée. Il concerne directement les problèmes de compréhension (4). C'est là peut-être que le choix d'une théorie s'avère le plus délicat et le plus décisif, car même en s'en tenant au point de vue de l'enseignant, l'organisation de séquences d'activités en classese fait, implicitement ou explicitement, appel à une théorie cognitive, de type pragmatique, empiriste, constructiviste, ou autre. Ce choix engage la réponse aux trois questions suivantes

5) Peut-on importer des théories cognitives générales, estimées valables pour toutes les formes d'acquisition de connaissances, mais qui ne prennent pas du tout en compte la situation épistémologique à part des mathématiques (3), ou faut-il élaborer un modèle du fonctionnement cognitif de la pensée à partir du mode exclusivement sémiotique d'accés aux objets mathématiques et d'une activité exclusivement fondée sur les seules transformations de représentations sémiotiques?

6) La prise en compte du point de vue cognitif est-elle compatible avec la décomposition des connaissances fixées comme objectif global d'acquisition en contenus distincts et successifs d'apprentissage (2), ou exige-t-elle une tout autre décomposition en termes de gestes intellectuels mathématiques?

7) Dans l'analyse des productions des élèves, les critères cognitifs de compréhension sont-ils réductibles aux critères mathématiques de réussite ou, au contraire, faut-il admettre que la réussite mathématique puisse ne pas impliquer une réelle acquisition de connaissance?

Presque toutes les recherches sur l'enseignement des mathématiques ont jusqu'à présent choisi la première alternative à ces trois questions: utilisation explicite ou implicite de théories cognitives générales, analyse de la compréhension entièrement focalisée sur chacun des contenus résultant de la décomposition d'un complexe de connaissance, et réduction des critères cognitifs de compréhension aux réusssites mathématiques locales! La seconde alternative à ces trois questions revient à prendre en compte les deux faces de l'activité mathématique: non pas la face exposée, celle que l'on décompose en contenus, mais la face cachée de la manière de regarder, de raisonner, d'explorer par changement de représentations, qui est propre aux mathématiques et dont dépendent en définitive la compréhension mathématique et la capacité à utiliser des connaissances mathématiques. Mais tout cela nous renvoie au point de vue institutionnel. Quel rôle donne-t-on à l'apprentissage des mathématiques dans la formation et le développement intellectuel des individus?

Références

DUVAL, R. Graphiques et equations: l'articulation de deux registres. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, n. 1, p. 235-255, 1988.

______. Eight problems for a Semiotic Approach in Mathematics Education. In: RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F. (Eds.). **Semiotics in Mathematics Education:** epistemology, history, classroom and culture. Rotterdam: Sense Publishers, 2008. p. 39-61.

______. **Comment analyser les activités données en classe et les productions des élèves?** Cursillo, PUC Valparaiso, 2010.

______. Dois olhares opostos sobre os pontos críticos do ensino de álgebra no ensino fundamental (11-15 anos). In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - SIEMAT, 3., 2011, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN, 2011a.

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011b. v. 1.

VANHEULE-HAECKE, N. **Traiter du partage au cycle 2:** mémoire professionnel. IUFM Nord Pas-de-Calais: Villeneuve d'Asq, 2001.