

## SIMULAÇÃO NUMÉRICA E MÉTODO *CONSTRUCTAL DESIGN* NO ESTUDO DE PLACAS FINAS PERFURADAS DE AÇO SUBMETIDAS À FLAMBAGEM ELASTO-PLÁSTICA

Daniel Helbig (UFRGS) E-mail: daniel.helbig@gmail.com  
Luiz Alberto Oliveira Rocha (UFRGS) E-mail: luizrocha@mecanica.ufrgs.br  
Caio Cesar Cardoso da Silva (FURG) E-mail: caiocesarcivil@hotmail.com  
Liércio André Isoldi (FURG) E-mail: liercioisoldi@furg.br  
Elizaldo Domingues dos Santos (FURG) E-mail: elizaldosantos@furg.br  
Mauro de Vasconcellos Real (FURG) E-mail: mauroreal@furg.br

**Resumo:** Placas finas de aço são elementos estruturais de grande utilização nas mais diversas áreas da engenharia. Em algumas situações de projeto, as placas podem estar submetidas a esforços de compressão, e como consequência, podem estar sob o efeito da flambagem elástica e/ou elasto-plástica. Existem diferenças significativas na análise do fenômeno da flambagem entre elementos unidimensionais, como as vigas e as colunas, e em elementos bidimensionais, como as placas. O fenômeno da flambagem é dependente de aspectos dimensionais, construtivos e/ou operacionais. A inclusão de perfurações em placas provoca uma redistribuição de suas tensões, afetando não apenas sua resistência, mas também, suas características de flambagem. Este artigo utilizou modelos computacionais desenvolvidos no ANSYS®, cuja base está fundamentada no Método dos Elementos Finitos (MEF), para resolver o problema da flambagem elasto-plástica em placas finas perfuradas de aço. Foram consideradas para a análise placas com  $H/L = 1,0$  e  $H/L = 0,5$ , sendo H a largura e L o comprimento da placa. A espessura (h) das placas é constante, assim como, a fração do volume ( $\Phi$ ) definido para a perfuração. Além disso, foi considerado que as placas possuem perfuração centralizada, sendo adotadas as seguintes formas geométricas para a perfuração: oblonga longitudinal, oblonga transversal, elíptica, retangular, losangular, hexagonal longitudinal e hexagonal transversal. Para comparar de forma adequada a distribuição das tensões de von Mises, foi utilizado o método Constructal Design. Os resultados mostram que a variação da forma geométrica, para todos os tipos de perfuração analisados, conduz à geometria ótima.

**Palavras-chave:** Flambagem elasto-plástica, placas finas de aço, tensões, Método dos Elementos Finitos (MEF), Método Constructal Design.

## NUMERICAL SIMULATION AND *CONSTRUCTAL DESIGN* METHOD IN THE STUDY OF PERFORATED THIN STEEL PLATES SUBMITTED TO ELASTO-PLASTIC BUCKLING

**Abstract:** Thin steel plates are structural elements that have great use in the most diverse areas of engineering. In some design situations, the plates may be subjected to compression stresses, and consequently, may be under the effect of elastic and / or elasto-plastic buckling. There are significant differences in the analysis of the phenomenon of buckling between one-dimensional elements, such as beams and columns, and in two-dimensional elements, such as plates. The phenomenon of buckling depends of the dimensional, constructive and / or operational aspects. The inclusion of perforations in plates causes a redistribution of its internal stress, affecting not only their resistance but also their buckling characteristics. This paper uses computational models developed in ANSYS®, whose basis is based on the Finite Element Method, to solve the problem of elasto-plastic buckling in thin steel perforated plates. Plates with  $H / L = 1.0$  and  $H / L = 0.5$  were considered for the analysis, with H being the width and L the plate length. The thickness (h) of the plates is constant, as is the volume fraction ( $\Phi$ ) defined for the perforated. In addition, the plates were considered to be centrally perforated, with the following geometric shapes being used for the perforated: longitudinal oblong, transverse oblong, elliptical, rectangular, diamond, longitudinal hexagonal and transverse hexagonal. In order to adequately compare the von Mises stress distribution, the Constructal Design method was used. The results show that the variation of the geometric shape, for all types of perforations analyzed, leads to optimum geometry.

**Keywords:** Elasto-plastic Buckling, Steel Thin Plates, Tensions, Finite Element Method (FEM), Constructal Design Method.

## 1. INTRODUÇÃO

A crescente utilização do aço em estruturas ou em parte destas, está diretamente relacionada com as vantagens que este tipo de elemento possui quando comparado com outras formas de construção. A alta resistência do material aos diversos estados de tensão, por exemplo, possibilita suporte a grandes esforços, apesar de possuir em suas seções áreas relativamente pequenas, o que os torna mais leves (BELLEI, 2008).

Quanto às placas finas, estas são elementos estruturais muito utilizados na indústria naval, aérea, automobilística e também na construção civil. Destaca-se sua utilização na construção de pórticos de estaleiros, plataformas de petróleo, docas flutuantes, cascos de navios e na fuselagem de aviões. Placas finas são muito utilizadas em estruturas por possuírem excelente desempenho às solicitações impostas, com capacidade de resistência adequada ao peso reduzido de seus elementos, e se for adicionado às placas cromo, níquel ou zinco, possuirão também, grande resistência à corrosão. Quando uma placa plana está submetida a esforços transversais ou axiais, estará sujeita a desenvolver tensões de cisalhamento, flexão e de torção (VENTSEL e KRAUTHAMMER, 2001). Para Okumoto (2009), alguns fatores devem ser analisados com extremo cuidado no projeto de estruturas navais e offshore, dentre os quais se destaca o dimensionamento da estrutura, que deve levar em consideração elementos como o casco e as demais partes integrantes da embarcação, de forma que estes elementos possam resistir à ação de cargas internas e externas para diferentes solicitações mecânicas em função do tipo de sua utilização. A idealização e o projeto de um elemento estrutural devem satisfazer requisitos específicos de resistência, rigidez e estabilidade. Em sua grande maioria, estruturas como as embarcações são formadas basicamente pela associação de vigas e pilares, os quais normalmente estão submetidos a esforços de compressão. E, neste contexto, quando um elemento estrutural está submetido a esforço de compressão, poderá haver a ocorrência de um fenômeno extremamente importante denominado de flambagem, ou seja, tornando o elemento suscetível à instabilidade. Projetistas devem observar com extremo cuidado a presença de perfurações em placas. Estas podem ser utilizadas com o objetivo de diminuição do peso total da estrutura, ou para possibilitar o acesso de pessoas a determinados setores ou a serviços, ou ainda, como elementos com finalidade estética. Porém, a inclusão destas perfurações nas placas provoca uma redistribuição de suas tensões, podendo inclusive acarretar modificações em sua resistência mecânica e também nas características de flambagem (CHENG e ZHAO, 2010). Devem ser consideradas também outras características relacionadas às perfurações, tais como a geometria, a dimensão e o posicionamento da perfuração, pois estas características possuem influência direta no desempenho de uma placa submetida à compressão uniaxial (CHOW e NARAYANAN, 1984).

Diversos pesquisadores estudaram o comportamento mecânico de placas finas de aço submetidas à compressão, e dentre estes podem ser citados: El-Sawy e Martini (2007) determinaram os valores das cargas críticas de flambagem em placas retangulares com perfurações centralizadas e submetidas a carregamento biaxial utilizando o MEF; Moen e Shafer (2009) desenvolveram expressões analíticas validadas e resumidas cuja finalidade é estimar a influência de perfurações únicas ou múltiplas na determinação do valor da carga crítica de flambagem de placas na flexão ou na compressão; Helbig et al. (2013) aplicaram o método *Constructal Design* para a otimização de placas finas perfuradas de aço submetidas à flambagem elástica; Lorenzini et al. (2015) utilizaram o método *Constructal Design* para avaliar a influência do tipo e da forma da perfuração em placas finas perfuradas de aço submetidas à flambagem; e Falkowicz et al. (2015) estudaram o comportamento mecânico à flambagem não linear de placas retangulares finas de aço, com perfurações retangulares e vértices arredondados, submetidas à compressão uniforme.

Embora exista um número significativo de trabalhos científicos direcionados ao estudo da flambagem elástica em placas, há um número muito reduzido destes no que se refere à flambagem elasto-plástica. Este artigo possui como proposta, analisar o comportamento mecânico de placas finas perfuradas de aço submetidas à compressão uniaxial, utilizando modelos numéricos computacionais para a geração das curvas limite à flambagem elasto-plástica. Neste contexto o tipo, a forma e o tamanho da perfuração, são elementos essenciais.

## 2. FLAMBAGEM E PÓS-FLAMBAGEM

Segundo Okumoto (2009), as partes que integram uma estrutura naval, em sua maioria são compostas por placas e vigas, e em diversas situações estas são submetidas a esforços de compressão. Elementos estruturais como, por exemplo, as placas, quando submetidas a esforços de compressão ou de tração possuem comportamento diferenciado. Placas submetidas a esforços axiais de tração desenvolvem tensões de cisalhamento, por outro lado, quando submetidas a esforços de compressão há uma deflexão lateral do elemento, denominado de flambagem. Portanto, é de suma importância que o fenômeno da flambagem seja considerado nos procedimentos que envolvem o cálculo estrutural de estruturas navais e offshore. Obviamente, este procedimento deve ser utilizado para qualquer tipo de elemento que esteja sob a influência do fenômeno da flambagem.

Quando uma placa fina submetida à compressão atinge para o seu carregamento, o valor crítico ( $P_{cr}$ ), a placa sofre uma deformação de forma repentina e pode perder sua capacidade de suportar o carregamento, o que resultaria no colapso da estrutura. A deformação lateral é curvilínea e mostra graficamente o fenômeno da flambagem. A carga responsável por desencadear este fenômeno, é denominada de Carga Crítica ( $P_{cr}$ ), (ÄKESSON, 2007). Ainda de acordo com Äkesson (2007), a aplicação de uma carga adicional de compressão, porém inferior ao valor da carga crítica, não acarretará a formação do fenômeno da flambagem. Neste caso, a carga aplicada provocará na placa uma deformação curvilínea (deslocamento lateral), mas com a retirada desta, a placa voltará a sua configuração inicial. Porém, para o menor acréscimo de carga a carga crítica, ocorrerá um grande deslocamento na estrutura, podendo inclusive haver a ocorrência do colapso desta.

De acordo com Vinson (2005), a solução analítica para o problema da flambagem elástica em placas finas de aço sem perfuração, submetidas à compressão uniaxial, é:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 Et^3}{12(1-\nu^2)H^2} \left( m \frac{H}{L} + \frac{1}{m} \frac{L}{H} \right)^2 \quad (1)$$

Na Eq. (1),  $P_{cr}$  é a carga crítica por unidade de comprimento,  $\pi$  é uma constante matemática,  $E$  o módulo de elasticidade do material,  $\nu$  o coeficiente de Poisson, e  $m$  define o número de semiondas na direção do carregamento.

Uma placa elástica esbelta não entra em colapso logo após a ocorrência da flambagem, podendo suportar cargas significativamente maiores do que sua carga crítica sem se deformar excessivamente. O comportamento das placas diferencia-se do esperado, quando se considera o comportamento de barras elásticas comprimidas que suportam apenas um pequeno acréscimo de carga antes que ocorra a deformação excessiva da barra, (ver Fig. 1). A resistência adicional de pós-flambagem de placas finas deve-se a diversos fatores, porém, o principal é que a forma deformada da placa flambada não pode ser desenvolvida a partir da configuração de pré-flambagem sem que haja uma redistribuição das tensões no plano médio

ao longo da placa. Essa redistribuição, que é ignorada na teoria de pequenos deslocamentos em flambagem elástica, normalmente favorece as regiões menos rígidas da placa, e causam um aumento de eficiência da placa. Uma das causas mais comuns dessa redistribuição está associada com as condições de contorno no plano das bordas carregadas da placa (CHAJES, 1974).

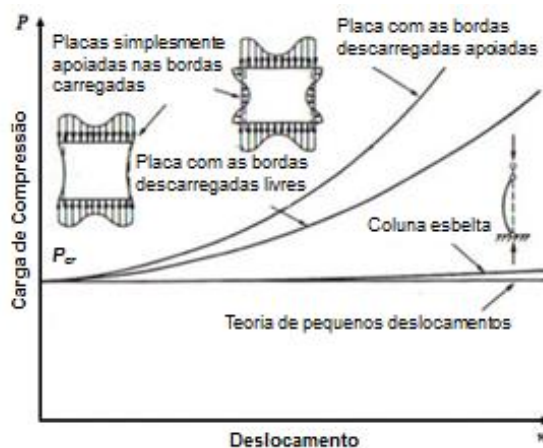


Figura 1 - Comportamento de pós-flambagem de placas elásticas esbeltez: Adaptada de (BRADFORD e CUK, 1988).

A carga que define o colapso de uma placa, em seu comportamento elasto-plástico, é denominada de pós-crítica ou última ( $P_u$ ). A capacidade final de carga de uma placa não está restrita à ocorrência da flambagem elástica, ou seja, as placas suportam carregamento superior à carga crítica, o que possibilita acréscimo de carga após a ocorrência da flambagem elástica (ÄKESSON, 2007). Ainda de acordo com Äkesson (2007), Fig. 2, a capacidade de placas suportarem um acréscimo de carga está associada à formação de uma membrana que estabiliza o deslocamento através de uma tensão transversal. Quando se aumenta a carga externa de forma a provocar a flambagem da placa, o que ocorre é uma distribuição não uniforme das tensões provocadas pela carga externa. Isso proporciona um aumento de resistência, o qual se deve ao fato das fibras transversais serem tracionadas após a flambagem, tendendo a estabilizar as fibras longitudinais.

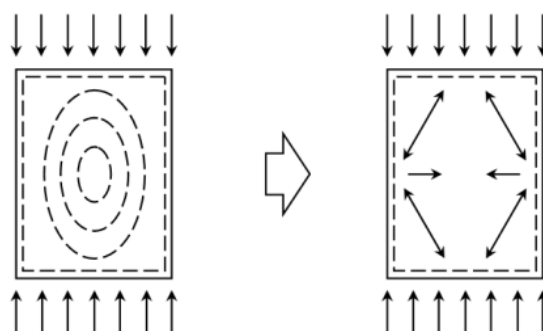


Figura 2 - Redistribuição de tensões no estado crítico de pós-flambagem (ÄKESSON, 2007).

Conforme descrito acima, diferentemente do comportamento de barras, as placas apresentam resistência significativa após a ocorrência da flambagem. E, se essa resistência pós-crítica for totalmente utilizada, um projeto estrutural, eficiente e econômico poderá ser obtido (MULLIGAN e PĚKOZ, 1983). De acordo com Von Karman et al. (1932), essa reserva pós-crítica de carga não é ilimitada, e de acordo com resultados experimentais, a placa

atinge a ruptura quando a tensão de compressão máxima nos bordos não carregados atingir o limite elástico. Em 1924, Bleich propôs a Eq. (2) para calcular a flambagem de placas no regime elasto-plástico, sendo que  $\tau = E_t/E$ , e  $E_t$  corresponde ao módulo de elasticidade tangente do aço.

$$\tau \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{\tau} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\sigma_x h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

O termo  $\sqrt{\tau}$  é o fator de redução plástica de uma placa submetida à tensão de compressão uniforme em uma direção, sendo este fator variável com o tipo de sollicitação e com as condições de contorno da placa. A análise da equação diferencial proposta por von Karman, 1910, e depois por Bleich, 1924, para a análise elasto-plástica é bastante complexa, devendo-se normalmente recorrer-se a métodos numéricos e computacionais.

### 3. CONSTRUCTAL DESIGN

Em um contexto de atualidade, e de percepção da importância do *design* de estruturas naturais destaca-se a Teoria Constructal. Sua base está fundamentada na percepção de que o *design* de estruturas naturais são consequências de um fenômeno físico, que ocorre em sistemas de pequeno e de grande porte como os flocos de neve, os raios, os rios, os tecidos vivos vascularizados, o tráfego nas cidades, a difusão de novas ideias, dentre outros. Suas diretrizes e seus principais avanços na ciência estão diretamente relacionados com os estudos desenvolvidos por seu idealizador, o engenheiro de origem romena e radicado nos Estados Unidos, Adrian Bejan. A linha de raciocínio onde as formas provenientes da natureza são aceitas, observadas e copiadas continua presente na atualidade. Entretanto, a Teoria Constructal de acordo com Bejan e Lorente (2008), propõe a inversão deste pensamento, ou seja, inicialmente invoca-se a lei constructal e com isso, teoricamente, deduz-se a arquitetura da forma. Em seguida, compara-se a configuração teórica obtida na dedução com a dos fenômenos naturais, e o acordo entre as geometrias é o que validará a lei constructal.

De acordo com Bejan (2000), a Lei Constructal para a geração e configuração de escoamento é definida como: “para que um sistema de volume fixo possa persistir no tempo, isto é sobreviver, sua configuração deve evoluir de tal forma que possibilite maior e maior acesso para as correntes que fluem através dele”. Essa lei corresponde a base da Teoria Constructal, e representa uma nova extensão da termodinâmica: a termodinâmica de sistemas fora do equilíbrio e com configurações. A aplicação da Lei Constructal se dá através do Método Constructal, denominado por *Constructal Design*, e serve para prever muitos fenômenos na natureza e designs em engenharia. Este método é empregado para a obtenção de configurações que aperfeiçoam os sistemas de fluxo através da distribuição ótima das imperfeições (BEJAN e LORENTE, 2008).

### 4. APLICAÇÃO DO CONSTRUCTAL DESIGN

O método *Constructal Design* permite avaliar de forma adequada a influência da configuração geométrica no desempenho mecânico de um sistema físico. Considerando-se que todas as configurações geométricas propostas com o *Constructal Design* sejam avaliadas, pode-se dizer que está sendo utilizado um procedimento de otimização geométrica por meio de um processo de busca exaustiva. Então, com a finalidade de aplicar o método *Constructal Design*, torna-se necessária a definição de alguns parâmetros, como: funções objetivo, graus de

liberdade e restrições. Após a definição destes parâmetros são geradas infinitas geometrias, permitindo o emprego do método de pesquisa exaustiva. Porém, se os graus de liberdade e/ou os parâmetros forem muitos, pode ser utilizado outro método de otimização, (LORENZINI et al., 2014 e GONZALES et al., 2015).

A função objetivo busca maximizar as tensões últimas variando-se os dois graus de liberdade:  $H/L$  e  $H_0/L_0$ . O primeiro grau de liberdade relaciona a largura e o comprimento da placa, e o segundo, a largura e o comprimento da perfuração. Na Fig. 3 estão indicadas as variáveis:  $H$ ,  $L$ ,  $H_0$  e  $L_0$ . A Fig. 3a mostra uma placa sem perfuração (será utilizada para a verificação do modelo computacional). Para  $H/L$  foram consideradas duas possibilidades:  $H/L = 1,0$  e  $H/L = 0,5$ . Para as placas com  $H/L = 1,0$  foram considerados os seguintes valores:  $H = L = 1414,21$  mm, e para as placas com  $H/L = 0,5$ ,  $H = 1000,00$  mm e  $L = 2000,00$  mm. Por outro lado, para  $H_0/L_0$ , existem infinitas possibilidades, sendo estas relacionadas ao tipo de perfuração e as restrições impostas ao problema.

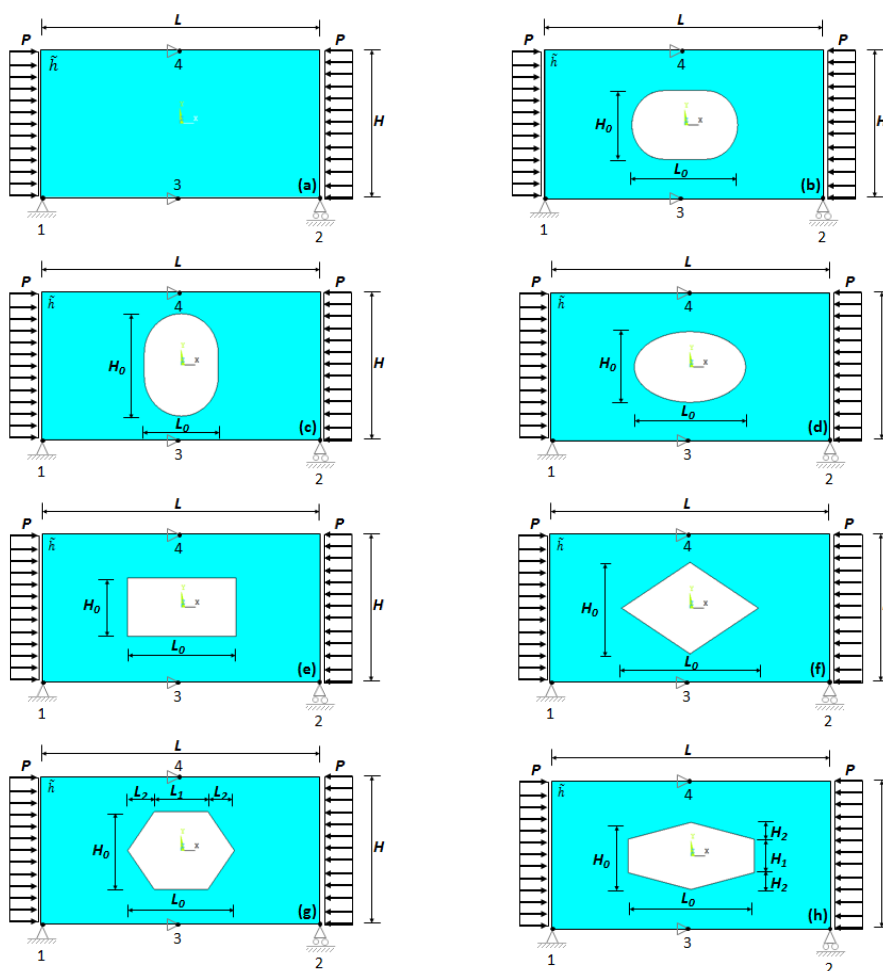


Figura 3 - Placas com  $H/L = 1,0$  e  $H/L = 0,5$ , sendo: (a) sem perfuração, (b) perfuração oblonga longitudinal, (c) perfuração oblonga transversal, (d) perfuração elíptica, (e) perfuração retangular, (f) perfuração losangular, (g) perfuração hexagonal longitudinal, e (h) perfuração hexagonal transversal.

A Fig. 3 mostra os diferentes tipos de perfuração considerados neste trabalho. Com a finalidade de proporcionar uma comparação adequada para os diversos tipos de perfuração utilizados adotou-se, como restrição, uma fração ( $\Phi$ ) para o volume da perfuração. Esta fração do volume da perfuração é função das dimensões características para cada tipo de perfuração, sendo definida, respectivamente, para oblonga longitudinal, oblonga transversal, elíptica, retangular, losangular, hexagonal longitudinal e hexagonal transversal, como:

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{(L_0 - H_0)H_0 + \frac{\pi}{4}H_0^2}{HL} \quad (3)$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{(H_0 - L_0)L_0 + \frac{\pi}{4}H_0^2}{HL} \quad (4)$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{(\pi H_0 L_0 h)/4}{HLh} = \frac{\pi H_0 L_0}{4HL} \quad (5)$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{H_0 L_0 h}{HLh} = \frac{H_0 L_0}{HL} \quad (6)$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{(H_0 L_0 h)/2}{HLh} = \frac{H_0 L_0}{2HL} \quad (7)$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{H_0(L_1 + L_2)h}{HLh} = \frac{H_0(L_1 + L_2)}{HL} \quad (8)$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{H_0(L_1 + L_2)h}{HLh} = \frac{L_0(H_1 + H_2)}{HL} \quad (9)$$

sendo que,  $V_0$  representa o volume da perfuração e  $V$ , o volume total da placa sem a perfuração.

Como restrição ao tamanho das perfurações, adotou-se:  $H - H_0 = 200,00$  mm e  $L - L_0 = 200,00$  mm, Fig. 3. Finalmente, o volume de material da placa a ser analisada precisa ser mantido constante. Para tanto, foram consideradas para todos os casos estudados, placas com espessura de 10,00 mm e área total sem perfuração de 2,00 m<sup>2</sup>.

## 5. MODELO COMPUTACIONAL

O software ANSYS®, baseado no Método dos Elementos Finitos, foi utilizado neste trabalho para desenvolver um modelo computacional para resolver o problema da flambagem elasto-plástica em placas finas perfuradas de aço.

Em todas as simulações numéricas presentes neste trabalho utilizou-se o elemento finito *Shell93*, conforme mostrado na Fig. 4. O elemento *Shell93* pode ser utilizado para a modelagem de placas e cascas.

O elemento *Shell93* possui oito nós, seis graus de liberdade em cada nó, com translações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e rotações em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , pode trabalhar com até quatro espessuras, e também pode possuir propriedades ortotrópicas. Os polinômios interpoladores responsáveis pela forma de deformação são quadráticos em ambas as direções planas e o elemento finito em questão pode incorporar plasticidade, encruamento e grandes deformações. Quanto às restrições, não são permitidos elementos de área iguais a zero,

elementos com espessura nula em qualquer extremidade, e a opção triangular é recomendada para ser utilizada apenas como elementos de composição na geração da malha.

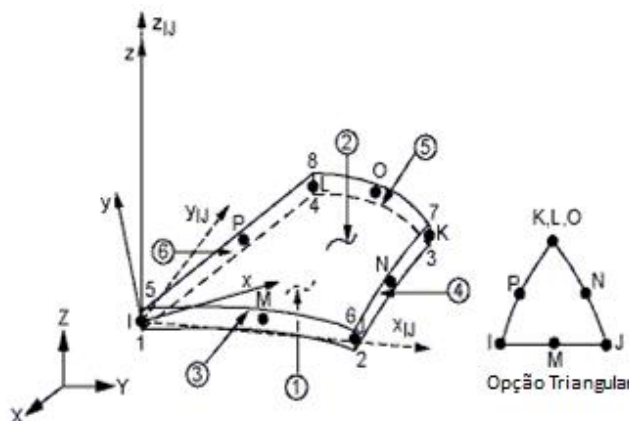


Figura 4 - Elemento *Shell93*, (ANSYS, 2005).

A Fig. 5 apresenta um exemplo de discretização e geração da malha para o domínio computacional utilizando o elemento finito *Shell93*. Estão indicados na Fig. 5, a carga de compressão ( $P$ ), o comprimento ( $L$ ), a largura ( $H$ ) e as restrições. A placa possui espessura ( $h$ ) constante. Como condições de contorno, a placa possui todas as bordas simplesmente apoiadas, ou seja, todos os nós ao longo das quatro bordas estão restringidos à deflexão ao longo do eixo  $z$ . Os nós 1, 2, 3 e 4, foram adicionados ao modelo computacional com o objetivo de restringir o movimento da placa em relação aos eixos  $x$  e  $y$ .

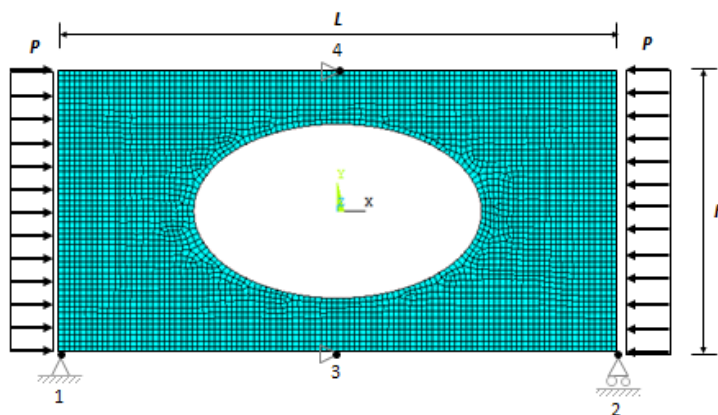


Figura 5 - Modelo de referência gerado no ANSYS®.

### 5.1 Flambagem Elástica e Elasto-Plástica em Placas

O procedimento numérico utilizado para o cálculo da carga que provoca a flambagem elástica é baseado em uma análise de autovalores e autovetores. Uma vez assumido que a estrutura apresenta um comportamento elástico linear, uma instabilidade estrutural é prevista, sendo o enfoque do estudo a verificação da carga que provoca a flambagem elástica do elemento. Para este tipo de análise, que envolve as condições de equilíbrio das equações de elementos finitos, é necessária a solução de equações algébricas homogêneas, cujo menor autovalor e autovetor correspondem, respectivamente, a carga crítica de flambagem e o modo de deformação elástica da estrutura (MADENCI e GUVEN, 2006).

Na análise elasto-plástica adota-se um valor inicial pequeno para as imperfeições. Esta consideração é necessária em função do problema de pós-flambagem exata não possibilitar



uma análise diretamente devido a problemas de descontinuidades de resposta no ponto de bifurcação. El-Sawy et al. (2004) em seus estudos, definiu que o valor máximo a ser assumido para a imperfeição inicial deve obedecer à relação  $H/2000$ , onde  $H$  representa a largura da placa. A carga última atuante sobre a placa pode ser encontrada utilizando-se como referência  $P_y = \sigma_y h$ , onde  $\sigma_y$  representa a tensão de escoamento do material, aplicando-se pequenos incrementos de carga sobre a placa na direção paralela ao eixo  $x$ . Para cada incremento de carga aplica-se o método de Newton-Raphson para a determinação dos deslocamentos que correspondem à configuração de equilíbrio da placa através das equações:

$$\{P\}_{i+1} = \{P\}_i + \{\Delta P\} \quad (10)$$

$$\{\psi\} = \{P\}_{i+1} - \{F_{NL}\} \quad (11)$$

$$[K_t]\{\Delta U\} = \{\psi\} \quad (12)$$

$$\{U\}_{i+1} = \{U\}_i + \{\Delta U\} \quad (13)$$

onde  $[K_t]$  é a matriz de rigidez tangente atualizada,  $\{\Delta U\}$  corresponde ao vetor de deslocamentos incrementais necessários para alcançar a configuração de equilíbrio,  $\{F_{NL}\}$  representa o vetor das forças nodais não lineares internas e  $\{\psi\}$  é o vetor de forças desequilibradas. Os vetores  $\{U\}_i$  e  $\{U\}_{i+1}$  correspondem aos deslocamentos, enquanto os vetores  $\{P\}_i$  e  $\{P\}_{i+1}$  correspondem às cargas externas aplicadas, para duas sucessivas configurações de equilíbrio da estrutura.

Em um determinado estágio de carga a convergência não poderá ser alcançada, ou seja, um incremento finito de deslocamento não pode ser determinado de modo que o vetor de forças desequilibradas  $\{\psi\}$  seja anulado, isso significa que a carga de ruptura da estrutura foi atingida. Isso ocorre porque não importa o valor que possa ser atingido pelas deformações e pelos deslocamentos, as tensões e as forças internas não podem aumentar da forma que seria necessário para equilibrar as cargas externas. Nesse caso, o material atingiu sua capacidade máxima de resistência.

O carregamento externo de compressão sobre a placa, utilizado neste trabalho para a análise da flambagem elasto-plástica, foi dividido em 100 incrementos de carga com no máximo 200 iterações para cada incremento de carga.

## 6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como resultados, inicialmente serão apresentados a verificação e a validação dos modelos computacionais utilizados para a análise da flambagem elástica e da elasto-plástica. Na sequência, as placas finas de aço com  $H/L = 1,0$  e  $H/L = 0,5$ , ambas com perfuração centralizada, para  $\Phi = 0,20$ , podendo assumir diferentes tipos de perfuração (elíptica, retangular, losangular, hexagonal longitudinal, hexagonal transversal, oblonga longitudinal e oblonga transversal) e para diferentes formas geométricas através da atribuição de valores para  $H_0/L_0$ , são submetidas à flambagem elasto-plástica.

### 6.1 Verificação e Validação

A verificação do modelo computacional para a análise da flambagem elástica foi realizada comparando-se o resultado da carga crítica de uma placa fina de aço sem perfuração com o obtido pela solução analítica dada pela Eq. (1). Foi considerada uma placa simplesmente apoiada nas quatro bordas, com as propriedades mecânicas e dimensionais:  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0,30$ ,  $\sigma_y = 250$  MPa,  $H = 1000,00$  mm,  $L = 2000,00$  mm e  $h = 10,00$  mm. Utilizou-se uma malha estruturada e convergente, gerada com o auxílio de um elemento finito quadrado de lado  $20,00$  mm, obtendo-se uma tensão crítica de  $\sigma_{cr} = 75,37$  MPa. Este valor, quando comparado com o resultado analítico ( $\sigma_{cr} = 75,92$  MPa), representa uma diferença de  $-0,72\%$ , verificando o modelo computacional desenvolvido.

A validação do modelo computacional para a análise da flambagem elasto-plástica utilizou para a comparação o valor da carga última obtida experimentalmente em (EL-SAWY et al. 2004). Para este fim foi utilizada uma placa fina de aço simplesmente apoiada nas quatro bordas, com as dimensões  $H = L = 1000,00$  mm e  $h = 20,00$  mm, e com as propriedades mecânicas:  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0,30$ ,  $\sigma_y = 350$  MPa, e com uma perfuração circular centralizada e de diâmetro  $300,00$  mm. O domínio computacional foi discretizado utilizando-se um elemento finito com tamanho máximo de  $20,00$  mm. A tensão última determinada experimentalmente em [23] foi  $\sigma_u = 213,50$  MPa, e o resultado obtido por simulação numérica neste trabalho foi  $\sigma_u = 217,00$  MPa, o que representa uma diferença de  $1,64\%$ , validando o modelo computacional proposto.

## 6.2 Tensão Limite Normalizadora

Aqui o objetivo é definir a curva limite que evite a ocorrência da flambagem elasto-plástica. Neste sentido, é necessária a normalização das tensões últimas, Eq. (14), onde  $TLN$  representa a tensão limite normalizada e o subscrito  $EP$  refere-se à flambagem elasto-plástica.

$$TLN_{EP} = \frac{\sigma_u}{\sigma_y} \quad (14)$$

Em todas as simulações numéricas realizadas neste trabalho foram consideradas as seguintes propriedades do material:  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0,30$ ,  $\sigma_y = 250$  MPa e  $h = 10,00$  mm.

Para mostrar como as curvas limite à flambagem elasto-plástica são obtidas, foi utilizado como referência, placas com  $H/L = 1,0$  e  $H/L = 0,5$ , para  $\Phi = 0,20$  e com perfuração elíptica.

A Fig. 6 mostra a curva limite à flambagem elasto-plástica para as placas com  $H/L = 1,0$  e  $H/L = 0,5$ ,  $\Phi = 0,20$  e com perfuração elíptica. Nesta figura, também estão inclusos e devidamente posicionados, os fatores  $TLN_{Max}$  e  $TLN_{Min}$ .

Convém salientar que, para diversos valores de  $H_0/L_0$ , as tensões nas placas ultrapassam o limite à flambagem elástica. Ainda de acordo com a Fig. 6, o fator  $TLN_{Max}$  identifica a geometria ótima e, o fator  $TLN_{Min}$ , a pior geometria.

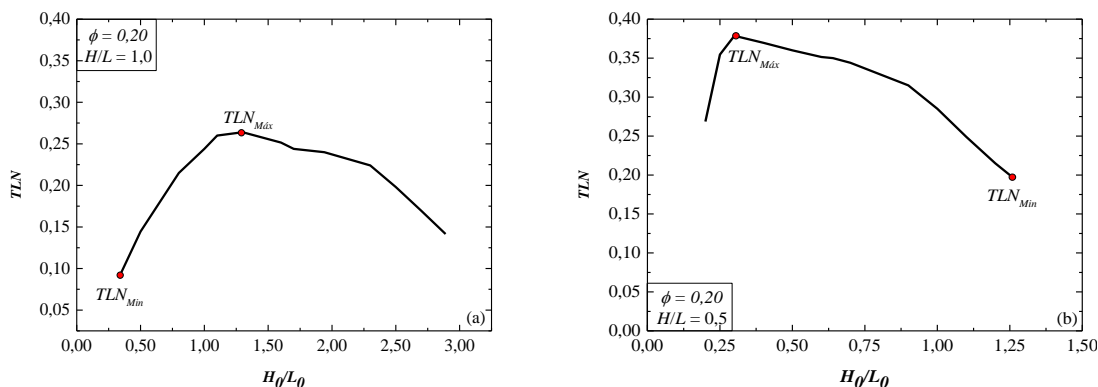


Figura 6 - Curva limite à flambagem elasto-plástica em placas com perfuração elíptica, para  $\Phi = 0,20$ : (a)  $H/L = 1,0$  e (b)  $H/L = 0,5$ .

Utilizou-se a seguinte nomenclatura para a representação gráfica das curvas limite: elíptica (E), retangular (R), losangular (L), hexagonal longitudinal (HL), hexagonal transversal (HT), oblonga longitudinal (OL) e oblonga transversal (OT). A Fig. 7 mostra as curvas limite à flambagem elasto-plástica para as placas com  $H/L = 1,0$  e  $H/L = 0,5$ ,  $\Phi = 0,20$  e para todos os tipos de perfuração.

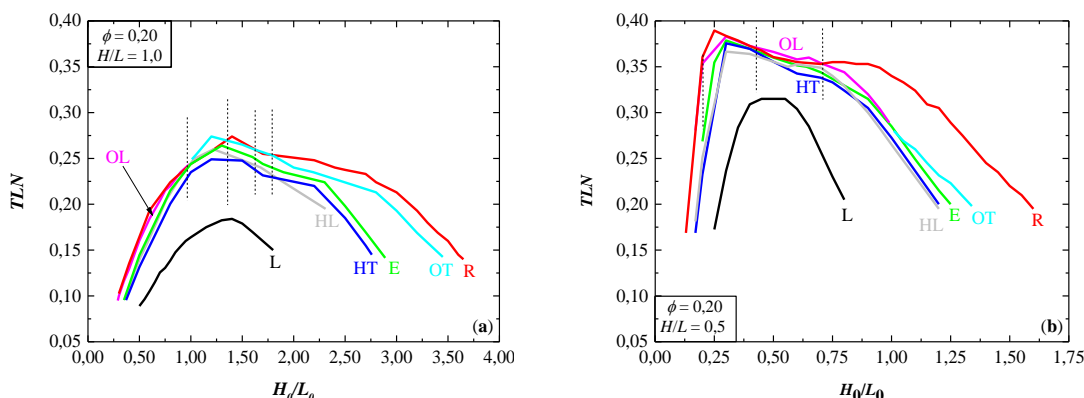


Figura 7 - Curvas limite para todos os tipos de perfuração e  $\Phi = 0,20$ : (a)  $H/L = 1,0$  e (b)  $H/L = 0,5$ .

Analisando o comportamento gráfico das curvas limite à flambagem elasto-plástica, Fig. 7, alguns fatores são recorrentes: primeiro, as placas com  $H/L = 1,0$  possuem uma maior amplitude para o grau de liberdade  $H_0/L_0$ , quando comparadas às placas  $H/L = 0,5$ . Neste contexto, as placas com perfuração losangular (L) apresentam a menor amplitude para o grau de liberdade  $H_0/L_0$ . Segundo, os dois tipos de placas mostram uma semelhança gráfica no traçado das curvas limite. Terceiro, o fator  $TLN_{Max}$  para as placas com  $H/L = 0,5$  e para todos os tipos de perfuração, possui resultados superiores aos das placas  $H/L = 1,0$ . Assim, quanto à flambagem elasto-plástica, as placas retangulares possuem maior capacidade de carregamento do que as placas quadradas, com  $TLN_{Max}$  médio de 0,3555 e 0,2499, respectivamente. Quarto, para a maioria dos valores de  $H_0/L_0$ , as melhores geometrias referem-se às placas com perfuração retangular (R), para os dois tipos de placas.

A Tab. 1 apresenta as melhores e as piores geometrias para as placas com  $H/L = 1,0$  e  $H/L = 0,5$ ,  $\Phi = 0,20$  e para todos os tipos de perfuração. Na Tab. 1 fez-se uso, para definir o tipo de perfuração, da mesma nomenclatura utilizada para o traçado das curvas limite.

Tabela 1 - Melhores e piores geometrias para as placas com  $H/L = 1,0$  e  $H/L = 0,5$ ,  $\Phi = 0,20$  e para todos os tipos de perfuração.

Perfuração	$H/L = 1,0$					$H/L = 0,5$				
	$(H_0/L_0)_o$	$TLN_{Máx}$	$(H_0/L_0)_p$	$TLN_{Min}$	Diferença %	$(H_0/L_0)_o$	$TLN_{Máx}$	$(H_0/L_0)_p$	$TLN_{Min}$	Diferença %
OL	0,99	0,2440	0,29	0,0950	156,84	0,30	0,3830	0,17	0,2805	36,54
OT	1,60	0,2740	3,45	0,1425	92,28	1,01	0,2800	1,34	0,1980	41,41
E	1,30	0,2640	0,35	0,0955	176,44	0,30	0,3786	1,25	0,2000	89,30
R	1,40	0,2740	0,30	0,1025	167,32	0,25	0,3895	0,13	0,1687	130,88
L	1,30	0,1840	0,55	0,0890	106,74	0,45	0,3150	0,25	0,1725	82,61
HL	1,20	0,2600	0,37	0,1000	160,00	0,30	0,3665	0,17	0,1813	102,15
HT	1,50	0,2490	0,37	0,0955	160,73	0,30	0,3756	0,17	0,1687	122,64

Na Tab. 1, observa-se um acréscimo médio no desempenho mecânico das placas  $H/L = 1,0$  de 145,76%. Sendo que, o melhor desempenho mecânico refere-se às placas com perfuração elíptica, e o pior, às placas com perfuração oblonga transversal, de 176,44% e 92,28%, respectivamente. Verificou-se um acréscimo médio no desempenho mecânico das placas  $H/L = 0,5$  de 86,50%. Sendo que, o melhor desempenho mecânico refere-se às placas com perfuração retangular, e o pior, às placas com perfuração oblonga longitudinal, de 130,88% e 36,54%, respectivamente. Quanto às geometrias ótimas observa-se que, estas são encontradas para valores de  $H_0/L_0 \geq 1,19$ , exceto para as placas com perfuração oblonga longitudinal  $H_0/L_0 = 0,99$ , para placas com  $H/L = 1,0$  e, para valores de  $H_0/L_0 \leq 0,46$ , exceto para as placas com perfuração oblonga transversal  $H_0/L_0 = 1,01$ , para as placas  $H/L = 0,5$ . Quanto ao valor do fator  $TLN_{Max}$ , para as placas com  $H/L = 1,0$  corresponde a 0,2740, para as placas com perfuração oblonga transversal e retangular, e a 0,3895 para as placas com  $H/L = 0,5$ , ou seja, um acréscimo de 42,15% na capacidade de carregamento das placas retangulares. Comparando-se os valores obtidos para as geometrias ótimas em placas com  $H/L = 1,0$  e  $H/L = 0,5$ , verificou-se que as placas quadradas apresentam, em média, um acréscimo de 68,50% no desempenho mecânico, superior ao das placas retangulares.

As Fig. 8 e 9 apresentam as tensões de *von Mises* para as melhores e as piores geometrias, para placas com  $H/L = 1,0$  e  $H/L = 0,5$ , para todos os tipos de perfuração e todas as frações do volume ( $\Phi$ ) da perfuração.

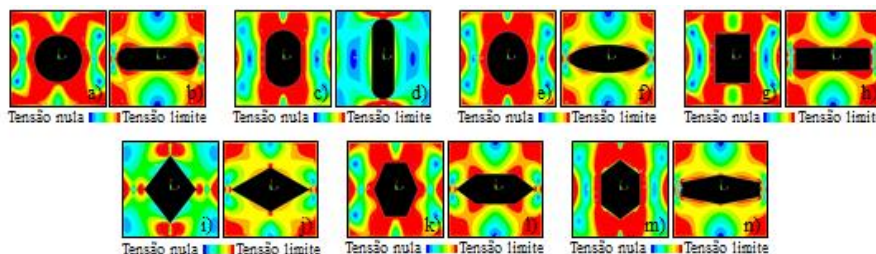


Figura 8 - Distribuição das tensões de *von Mises* em placas com  $H/L = 1,0$ , para todos os tipos de perfuração e  $\Phi = 0,20$ , sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações, e (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.

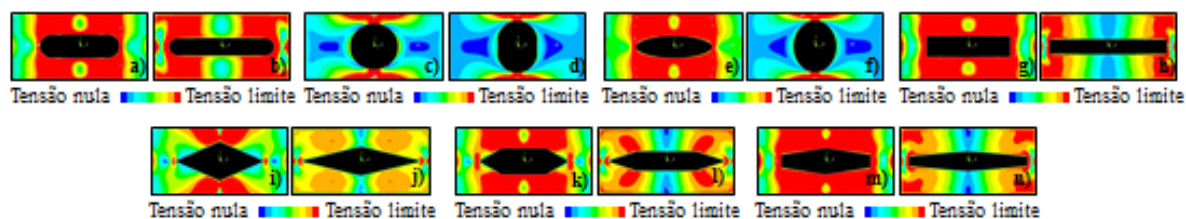


Figura 9 - Distribuição das tensões de *von Mises* em placas com  $H/L = 0,5$ , para todos os tipos de perfuração e  $\Phi = 0,20$ , sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; e (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.

As Fig. 8 e 9 mostram que as placas com as melhores geometrias apresentam uma maior concentração das tensões de escoamento do material, quando comparadas com as placas com as piores geometrias.

O melhor desempenho mecânico observado nas geometrias ótimas justificam os princípios definidos pela Teoria Constructal, através da ótima distribuição das imperfeições, (BEJAN e LORENTE, 2008).

## 7. CONCLUSÕES

Este trabalho utilizou modelos computacionais associados ao método *Constructal Design* para analisar o comportamento mecânico à flambagem elasto-plástica de placas com  $H/L = 1,0$  e  $H/L = 0,5$  submetidas à compressão. Com o auxílio destes modelos computacionais, foi possível obter os valores das cargas últimas na flambagem elasto-plástica.

O acréscimo máximo no desempenho mecânico de placas submetidas à flambagem elasto-plástica, corresponde a 176,44% para as placas com  $H/L = 1,0$ , e a 130,88% para as placas com  $H/L = 0,5$ , comparando-se as melhores com as piores geometrias, para placas com perfuração elíptica e retangular, respectivamente.

Finalmente, a aplicação do método *Constructal Design* possibilitou comparar de forma adequada, os resultados obtidos para todos os tipos e formas geométricas das perfurações propostas. Foi possível avaliar, em função dos graus de liberdade  $H/L$  e  $H_0/L_0$ , a influência do tipo e da forma geométrica da perfuração no comportamento mecânico de placas sob a ação de carregamento de compressão.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a FURG, a UFRGS, e ao CNPQ, pelo apoio.

## REFERÊNCIAS

- ÅKESSON, B. Plate buckling in bridges and other structures. CRC Press, 2007.
- ANSYS, CFX. 10.0 User's Manual. ANSYS Inc., July, 2005.
- BEJAN, A. Shape and structure, from engineering to nature. Cambridge University Press, 2000.
- BEJAN, A.; LORENTE, S. Design with constructal theory. 2008.
- BELLEI, I. H. Edifícios industriais em aço: projeto e cálculo. Pini, 2008.

**BRADFORD, M. A.; CUK, P. E.** Elastic buckling of tapered monosymmetric I-beams. In: Journal of Structural Engineering, v. 114, n. 5, p. 977-996, 1988.

**CHAJES, A.** Principles of structural stability theory. Prentice Hall, 1974.

**CHENG, Bin; ZHAO, Jincheng.** Strengthening of perforated plates under uniaxial compression: Buckling analysis. Thin-Walled Structures, v. 48, n. 12, p. 905-914, 2010.

**CHOW, Fong-Yen; NARAYANAN, Rangachari.** Buckling of plates containing openings. 1984.

**EL-SAWY, K. M.; NAZMY, A. S.; MARTINI, M. I.** Elasto-plastic buckling of perforated plates under uniaxial compression. In: Thin-Walled Structures, v. 42, n. 8, p. 1083-1101, 2004.

**EL-SAWY, Khaled M.; MARTINI, Mohammad Iqbal.** Elastic stability of bi-axially loaded rectangular plates with a single circular hole. Thin-Walled Structures, v. 45, n. 1, p. 122-133, 2007.

**FALKOWICZ, K.; FERDYNUS, M.; DEBSKI, H.** Numerical analysis of compressed plates with a cut-out operating in the geometrically nonlinear range. Eksploatacja i Niezawodność, v. 17, 2015.

**GONZALES, G. V. et al.** A comparison of simulated annealing schedules for constructal design of complex cavities intruded into conductive walls with internal heat generation. In: Energy, v. 93, p. 372-382, 2015.

**HELBIG D., REAL M. DE V., CORREIA A. L. G., DOS SANTOS E. D., ROCHA L. A. O., ISOLDI L. A.** *Constructal Design of perforated steel plates subject to linear elastic and nonlinear elasto-plastic buckling.* In: XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Pirinópolis, GO, 2013.

**LORENZINI G., HELBIG D., DA SILVA C. C. C., REAL M. DE V., DOS SANTOS E. D., ISOLDI L. A.** *Constructal design method applied to the analysis of the cutout type and cutout shape influences in the mechanical behavior of thin steel plates subjected to buckling.* In: Constructal Law & Second Law Conference, Italy, 2015.

**LORENZINI, G. et al.** Constructal design of convective Y-shaped cavities by means of genetic algorithm. In: Journal of Heat Transfer, v. 136, n. 7, p. 071702, 2014.

**MADENCI, E.; GUVEN, I.** The finite element method and applications in engineering using Ansys®. 2006.

**MOEN, Christopher D.; SCHAFER, B. W.** Elastic buckling of thin plates with holes in compression or bending. Thin-Walled Structures, v. 47, n. 12, p. 1597-1607, 2009.

**MULLIGAN, G. P.; PEKÖZ, T.** The influence of local buckling on the structural behavior of singly-symmetric cold-formed steel columns. In: Center for Cold-Formed Steel Structures Library, 1983.

**OKUMOTO, Yasuhisa et al.** Design of ship hull structures: a practical guide for engineers. Springer Science & Business Media, 2009.

**VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T.** Thin plates and shells: theory: analysis, and applications. CRC press, 2001.

**VINSON, J. R.** Plate and panel structures of isotropic, composite and piezoelectric materials, including sandwich construction. Springer Science & Business Media, 2006.

**VON KARMAN, T.; SECHLER, E. E.; DONNELL, L. H.** The strength of thin plates in compression. In: Trans. ASME, v. 54, n. 2, p. 53-57, 1932.