

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS COM O MÉTODO BFGS ASSOCIADO A TÉCNICAS DE CONTINUAÇÃO

Luiz Antonio Farani de Souza (UTFPR) E-mail: lafarani@yahoo.com.br
Emerson Vitor Castelani (UEM) E-mail: emersonvitor@gmail.com
Wesley Vagner Inês Shirabayashi (UEM) E-mail: wwishirabayashi@uem.br

Resumo: Um dos principais objetivos da Engenharia Estrutural é tornar os sistemas estruturais mais econômicos, por meio da redução do seu peso e do consumo de materiais, sem, no entanto, diminuir sua segurança e durabilidade. Nessa área, pesquisas têm sido direcionadas no sentido de obtenção de estruturas cada vez mais leves e esbeltas. A formação do mecanismo de colapso de uma estrutura está, em geral, associada a não convergência da solução do problema não linear próximo a um ponto limite. Com isso, a força de colapso encontrada na solução pode ser muito diferente da força real de ruína da mesma. Uma metodologia eficiente de solução do problema estrutural deve ser capaz de superar as dificuldades numéricas associadas ao comportamento não linear, traçando toda a trajetória de equilíbrio (caminhos primários e secundários) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos que possam existir. Nesse contexto, o objetivo deste artigo é a implementação computacional e estudo de técnicas de continuação, por meio do Método dos Elementos Finitos, aplicadas em problemas de estruturas com não linearidade física encontrados na literatura. No ciclo iterativo, a matriz de rigidez é corrigida a partir de um procedimento baseado no método BFGS. Os resultados numéricos mostram a eficiência e aplicabilidade das técnicas implementadas, e as trajetórias de equilíbrio são obtidas com um menor número de iterações e tempo de processamento em comparação com o procedimento do tipo Newton - Raphson.

Palavras-chave: Elementos Finitos, técnica de continuação, BFGS, Mecânica do Dano, Gradiente Conjugado.

STRUCTURES NONLINEAR ANALYSIS WITH THE BFGS METHOD ASSOCIATED TO PATH-FOLLOWING TECHNIQUES

Abstract: Making the most economical structural systems, by reducing the weight and material consumption without, however, decrease its safety and durability, it has been one of the main objectives of Structural Engineering. In this area, researches have been directed towards obtaining increasingly lighter and more slender structures. The formation of a structure failure mechanism is, generally, associated with non-convergence of the problem solution close to a critical point. Thus, the collapse force found in the solution can be very different from the actual ruin force. An efficient methodology of solution should be able to overcome the numerical difficulties associated with non-linear behavior, plotting the complete equilibrium path (primary and secondary paths) of the structural system under analysis, by identifying and going through all singular or critical points that may exist. In this context, the aim of this paper is the computational implementation and study path-following techniques, by means of Finite Element Method, applied at structures problems with physical nonlinearity found in the literature. In iterative loop, the stiffness matrix is corrected from a procedure based on the BFGS method. The numerical results show the efficiency and applicability of the techniques implemented, and equilibrium path are obtained with a smaller number of iterations and processing time compared with the Newton - Raphson method.

Keywords: Finite Element, path-following technique, BFGS, Mechanics Damage, Conjugate Gradient.

1. INTRODUÇÃO

Na análise estrutural muitos problemas estão caracterizados pelo comportamento inelástico dos materiais (não linearidade física) que conformam as estruturas, identificando fenômenos tais como plasticidade, dano, fraturamento, entre outros, os quais mudam substancialmente as propriedades de rigidez do sistema. Um problema gerado pela inelasticidade dos materiais é a ocorrência de deformações localizadas no sistema. A consideração desse fenômeno aumenta a complexidade da análise, e pode levar a problemas na implementação numérica, acontecendo inclusive a interrupção da análise por problemas de convergência ou mal - condicionamento

numérico. Nesse contexto, a análise numérica de estruturas com características inelásticas de material requer técnicas de controle de iteração e força que permitam avaliar as mudanças de rigidez do sistema ocasionadas pelo comportamento não linear (MUÑOZ; ROEHL, 2012).

A Mecânica do Dano Contínuo (MDC) é uma ferramenta para a análise da deterioração do material em sólidos submetidos à ação de natureza mecânica ou térmica. Enquanto a Mecânica da Fratura lida com as condições de propagação de fissuras macroscópicas, a MDC estuda o efeito de microfissuras distribuídas na resposta do material. Os modelos constitutivos formulados pela aplicação dos conceitos dessa teoria permitem considerar as perdas de rigidez e resistência, observadas em diferentes materiais, como resultado do processo evolutivo de microfissuração. A MDC pretende descrever a evolução dos fenômenos dessas perdas que se desenvolvem entre um estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, correspondente à ruptura do elemento de volume. Para tanto, fundamenta-se nos princípios, e métodos, da mecânica dos meios contínuos e da termodinâmica dos processos irreversíveis (PROENÇA, 1992).

As análises numéricas de modelos estruturais complexos - via Método dos Elementos Finitos (MEF) - têm exigido a manipulação de grande quantidade de dados, que é intrínseco ao método, bem como a procura da diminuição do tempo de resposta para a resolução dos sistemas de equações lineares gerados. O uso comum de métodos diretos se deu em virtude desses serem bem adequados às aplicações no MEF, visto que são estáveis, robustos e sabe-se, *a priori*, a ordem e a quantidade de operações a serem realizadas. Entretanto, o desempenho desses métodos é influenciado negativamente pelo aumento da dimensão do problema e, em problemas de dimensão muito grande, sua computação é muito cara e, muitas vezes, impraticável. Dessa forma, a aplicação de métodos iterativos (como, por exemplo, o método dos Gradientes Conjugados) - têm se destacado pela sua forma desacopladora de se resolver o sistema (ALMEIDA; PAIVA, 1999).

Do exposto, este artigo tem por objetivo apresentar um procedimento de análise de estruturas com comportamento não linear baseado no método Quase - Newton do tipo BFGS associado às seguintes técnicas de continuação: Controle Direto de Deslocamento e Controle de Deslocamento Generalizado. O comportamento material é descrito por um modelo constitutivo fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998), com a possibilidade de prever o comportamento diferenciado à tração e à compressão. Simulações com o código computacional desenvolvido no *software* Matlab são efetuadas a partir de problemas de estruturas (treliça, viga e pórtico), via Método dos Elementos Finitos, com não linearidade física encontrados na literatura. Os sistemas de equações lineares gerados da discretização por elementos finitos, a cada iteração no processo incremental, são solucionados com o método do Gradiente Conjugado pré-condicionado. O desempenho dos algoritmos implementados são avaliados com base nos parâmetros: número total de incrementos de força (NP); número total de iterações (I_i); tempo de processamento; e deslocamento num ponto específico da estrutura. Os resultados numéricos mostram a eficiência e aplicabilidade do procedimento implementado, sendo as trajetórias de equilíbrio obtidas com um menor número de iterações e tempo de processamento, em comparação com os métodos de Newton - Raphson padrão e modificado.

2. MODELO CONSTITUTIVO BASEADO NA MECÂNICA DO DANO

Para descrever o comportamento do material, utiliza-se um modelo baseado na Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998). Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial, a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ é expressa por:

$$\bar{\sigma} = E_0 \varepsilon. \tag{1}$$

O limite de dano inicial r_0 é uma propriedade do material e pode ser relacionado à tensão limite de proporcionalidade f_0 da seguinte forma:

$$r_0 = B_1 \frac{f_0}{\sqrt{E_0}}, \tag{2}$$

onde B_1 é um parâmetro do modelo. Define-se a norma da tensão efetiva $\tau(\bar{\sigma})$ por:

$$\tau(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{E_0}}. \tag{3}$$

A partir das relações de Kuhn - Tucker, o limite de dano é dado pelo máximo valor da variável τ durante o processo de carregamento, tal que:

$$r = \text{máx}(r_0, \tau). \tag{4}$$

A partir das Eqs. (1) e (3), τ pode ser expresso em termos da deformação ε por:

$$\tau(\varepsilon) = \sqrt{E_0} \varepsilon. \tag{5}$$

A variável dano d é escrita em função do módulo H e do limite de dano r por:

$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)}. \tag{6}$$

Variando-se a função que descreve o módulo H , tem-se na Figura 1 em (a) o regime elastodegradável perfeito (perfeitamente plástico), em (b) o encruamento linear positivo (endurecimento), em (c) o encruamento linear negativo (abrandamento), e em (d) o abrandamento exponencial.

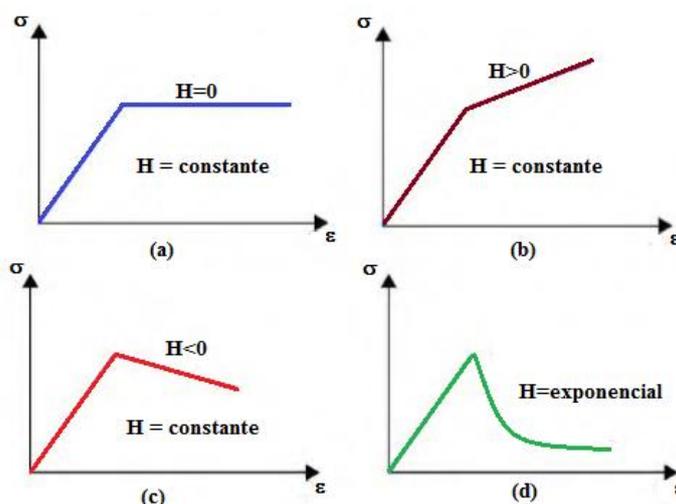


Figura 1 – Comportamentos distintos de endurecimento/abrandamento.

Para o caso de um procedimento incremental, o dano d no passo de força $t+\Delta t$ pode ser obtido a partir das deformações na barra (ε), a cada iteração k , pelo algoritmo do modelo constitutivo de dano diferenciado à tração e à compressão apresentado na Figura 2. No algoritmo, os limites de dano inicial r_{0c} e r_{0t} são referentes à compressão e à tração, respectivamente, e os módulos H_c e H_t referem-se à compressão e à tração, respectivamente.

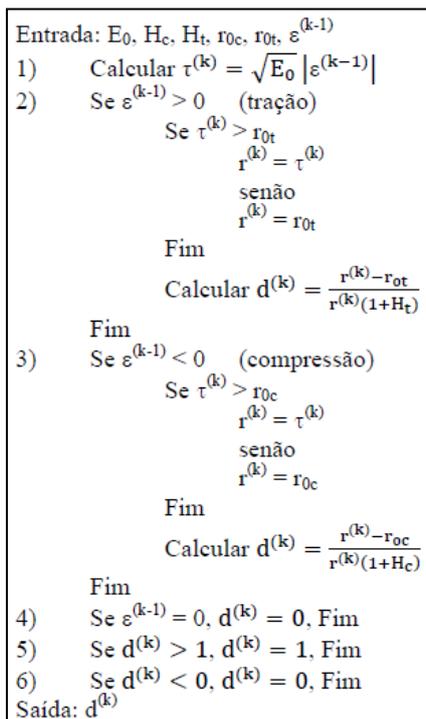


Figura 2 – Algoritmo para o modelo de dano diferenciado à tração e à compressão.

3. MÉTODO DE SOLUÇÃO

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural pode ser descrita pela equação (MAXIMIANO, 2012):

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}). \tag{7}$$

Sendo \mathbf{F}_i o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de deslocamentos totais nos pontos nodais da estrutura \mathbf{u}), e λ o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor \mathbf{F}_r , sendo este um vetor de referência e de magnitude arbitrária. A estimativa para o deslocamento residual $\delta \mathbf{u}$ é determinada pelo seguinte sistema:

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u} = \mathbf{g}. \tag{8}$$

Sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural. Conforme Crisfield (1991), os deslocamentos residuais são definidos como a soma de duas parcelas:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_g + \delta \lambda \delta \mathbf{u}_r. \tag{9}$$

Sendo $\delta \lambda$ o parâmetro de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo, e $\delta \mathbf{u}_g$ e $\delta \mathbf{u}_r$ obtidos pelos sistemas de equações, respectivamente:

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_g = \mathbf{g}, \tag{10}$$

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_r = \mathbf{F}_r. \tag{11}$$

Os sistemas dados em (10) e (11), gerados a cada iteração no processo incremental pela discretização por Elementos Finitos, são solucionados pelo método dos Gradientes Conjugados pré - condicionado. Os parâmetros incrementais de força ($\Delta \lambda$) e deslocamento ($\Delta \mathbf{u}$) no passo de força $t + \Delta t$ e iteração k são avaliados, respectivamente, por:

$$\Delta \lambda^{(k)} = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \tag{12}$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (13)$$

Os parâmetros totais de força (λ) e de deslocamento (\mathbf{u}) são atualizados por, respectivamente:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \quad (14)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (15)$$

A determinação do parâmetro de força iterativo ($\delta \lambda$) é função da estratégia de iteração ou da equação de restrição imposta adicionalmente ao problema não linear. O problema estrutural dado pela Eq. (8) é avaliado de forma incremental e iterativo, ou seja, para uma sequência de incrementos do parâmetro de força ($\lambda^{(k)}$) é determinada uma sequência de incrementos de deslocamentos nodais ($\mathbf{u}^{(k)}$).

3.1 Procedimento de solução baseado no método BFGS

Nos métodos Quase - Newton, a sequência $\mathbf{u}^{(k)}$ é estabelecida por meio da expressão (CRISFIELD, 1991):

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \mathbf{s}^{(k)}. \quad (16)$$

Sendo $\mathbf{s}^{(k)}$ a solução do sistema de equações dado por:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)}). \quad (17)$$

A matriz de rigidez \mathbf{K} é atualizada a cada iteração, e é imposta a condição de que tal matriz satisfaça a seguinte equação:

$$\mathbf{K}^{(k)} (\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k-1)}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k-1)}). \quad (18)$$

A escolha da estratégia na obtenção da matriz de rigidez define o método Quase - Newton ou método Secante. No método BFGS a matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(k)}$ é determinada pela equação:

$$\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)} + \mathbf{A}^{(k-1)}. \quad (19)$$

Sendo a matriz $\mathbf{A}^{(k)}$ dada por:

$$\mathbf{A}^{(k)} = \frac{\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)T}}{\mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{s}^{(k)}} - \frac{\mathbf{K}^{(k-1)} \mathbf{s}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)T} \mathbf{K}^{(k-1)}}{\mathbf{s}^{(k)T} \mathbf{K}^{(k-1)} \mathbf{s}^{(k)}}, \quad (20)$$

onde $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)})$. O algoritmo para a determinação do vetor de deslocamento total \mathbf{u} no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k é apresentado na Figura 3.

3.2 Métodos de Continuação

A metodologia para a solução de problemas estruturais não lineares deve ser capaz de traçar a trajetória de equilíbrio completa, identificando e passando por todos os pontos críticos. Para tal, utiliza-se um processo incremental-iterativo que consiste de duas etapas (ROCHA, 2000):

1. A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, seleciona-se um incremento de força (definido como parâmetro de força inicial - $\delta \lambda^{(1)}$), procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção desse parâmetro, determina-se o incremento inicial de deslocamentos nodais $\delta \mathbf{u}^{(1)}$; e

2. Na segunda etapa de solução, procura-se por meio de uma estratégia de continuação corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura. Se as iterações envolverem deslocamentos nodais (\mathbf{u}) e o parâmetro de força (λ), então uma equação adicional de restrição é requerida. O formato dessa equação é o que distingue as várias estratégias de iteração.

```

1) Para a primeira iteração (k = 1):
   Calcular a matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(0)}$ 
   Calcular  $\delta\mathbf{u}_r^{(1)} = (\mathbf{K}^{(0)})^{-1} \mathbf{F}_r$ 
   Calcular o parâmetro de força incremental inicial  $\delta\lambda^{(1)}$ 
   Calcular  $\delta\mathbf{u}^{(1)} = \delta\lambda^{(1)} \delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ 
2) Para as próximas iterações (k = 2, 3, ...):
   Atualizar a matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)} + \mathbf{A}^{(k-1)}$ 
   Calcular o vetor de força interna  $\mathbf{F}_i(\mathbf{u}^{(k-1)})$ 
   Calcular o vetor  $\mathbf{g}^{(k-1)} = \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}^{(k-1)})$ 
   Calcular  $\delta\mathbf{u}_g^{(k)} = (\mathbf{K}^{(k)})^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)}$ 
   Calcular  $\delta\mathbf{u}_r^{(k)} = (\mathbf{K}^{(k)})^{-1} \mathbf{F}_r$ 
   Calcular o parâmetro de força incremental  $\delta\lambda^{(k)}$ 
   Calcular  $\delta\mathbf{u}^{(k)} = \delta\mathbf{u}_g^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}$ 
3) Atualizar  $\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)}$ 
4) Atualizar  $\Delta\mathbf{u}^{(k)} = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)}$ 
5) Calcular o vetor de força interna  $\mathbf{F}_i(\mathbf{u}^{(k)})$ 
6) Calcular  $\mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}^{(k)})$ 
7) Atualizar  $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}$ 
8) Se  $\|\mathbf{g}^{(k)}\| > \zeta$ 
   Calcular  $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k-1)} - \mathbf{g}^{(k)}$ 
   Calcular  $\mathbf{A}^{(k)}$ 
   Retornar ao passo 2)
Senão
   Retornar ao passo 1) ou parar o processo incremental.
Fim
    
```

Figura 3 – Algoritmo para o procedimento incremental e iterativo baseado no método BFGS.

Nas análises não lineares efetuadas neste trabalho são consideradas as seguintes estratégias de incremento de força e controle de iteração (técnicas de continuação): controle Direto de Deslocamento (CDD); e controle de Deslocamento Generalizado (CDG). Na Tabela 1 são apresentadas as equações para a avaliação do parâmetro de força inicial ($\delta\lambda^{(1)}$) e do parâmetro para a correção da solução incremental inicial ($\delta\lambda^{(k)}$), para cada um dos métodos de continuação.

Há possibilidade de que o incremento de deslocamento tenda ao infinito em pontos próximos a um ponto limite da trajetória de equilíbrio. Para evitar que isso ocorra, limitou-se este deslocamento a um valor máximo. Para todos os métodos foi considerada a seguinte condição quanto ao incremento de deslocamento: se $\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\| > u_{\text{máx}}$, então:

$$\delta\mathbf{u}^{(k)} = \frac{u_{\text{máx}}}{\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\|} \delta\mathbf{u}^{(k)} \tag{21}$$

Para o método CDD, o sinal de $\delta\lambda^{(1)}$ é avaliado da seguinte forma: se ${}^t\Delta\mathbf{u}^T \Delta\mathbf{u}^{(1)} < 0$, então:

$$\Delta \mathbf{u}^{(1)} = - \Delta \mathbf{u}^{(1)}, \tag{22}$$

$$\Delta \lambda^{(1)} = - \Delta \lambda^{(1)}. \tag{23}$$

Tabela 1 - Parâmetros de força $\delta\lambda^{(1)}$ e $\delta\lambda^{(k)}$.

Método	k = 1	k = 2, 3, ...
CDD	$\delta\lambda^{(1)} = \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} \delta\mathbf{u}_r^{(1)}}}$	$\delta\lambda^{(k)} = - \frac{(\delta\mathbf{u}_g^{(k)})_j}{(\delta\mathbf{u}_r^{(k)})_j}$
CDG	$\delta\lambda^{(1)} = \pm \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}$	$\delta\lambda^{(k)} = - \frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}$

Assim, assegura-se que a trajetória de equilíbrio será percorrida corretamente mesmo se houver uma reversão do deslocamento.

O sinal de $\delta\lambda^{(1)}$ para o método CDG é determinado em função do parâmetro de rigidez GSP dado por:

$$GSP = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} \delta\mathbf{u}_r^{(1)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}. \tag{24}$$

Esse parâmetro torna-se negativo próximo a pontos limites. Dessa maneira, se $GSP < 0$, então $\delta\lambda^{(1)} = - \delta\lambda^{(1)}$. Uma estratégia adaptativa é a determinação automática da variação do parâmetro de força inicial ($\delta\lambda^{(1)}$), que consiste em, ao final de cada passo da análise, monitorar o número de iterações para a convergência (N_{it}) da técnica iterativa e compará-lo a um valor ótimo (N_{ot}). Por meio dessa monitoração, o parâmetro de força inicial é determinado da seguinte forma (RAMM, 1981; CRISFIELD, 1991):

$$\delta\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{N_{ot}}{N_{it}}} \delta\lambda^{(1)} \sqrt{|GSP|}. \tag{25}$$

4. MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS PRÉ-CONDICIONADO

Uma forma de melhorar a eficiência e a robustez dos métodos iterativos para a solução de sistemas de equações lineares consiste em utilizar pré - condicionadores. Um pré - condicionador \mathbf{M} válido para o Método do Gradiente Conjugado deve ser simétrico definido positivo. Atendida essa condição, pode-se escrever uma versão pré - condicionada desse método, conforme o algoritmo apresentado na Figura 4 (COELHO et al., 2010).

Neste trabalho, utiliza-se o pré-condicionador de Jacobi, também chamado de pré - condicionador Diagonal, o qual é composto pelos elementos da diagonal principal da matriz \mathbf{K} (NOGUEIRA, 2011):

$$M_{ij} = \begin{cases} K_{ij}, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{w}_0 = \mathbf{g} - \mathbf{K} \mathbf{u}_0 \\
 & \mathbf{z}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}_0 \\
 & \mathbf{p}_0 = \mathbf{z}_0 \\
 & \text{Enquanto } \|\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i\| > Tol \text{ faça} \\
 & \quad \alpha_i = \frac{\mathbf{w}_i^T \mathbf{z}_i}{\mathbf{p}_i^T \mathbf{K} \mathbf{p}_i} \\
 & \quad \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i \\
 & \quad \mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + \alpha_i \mathbf{K} \mathbf{p}_i \\
 & \quad \mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w}_{i+1} \\
 & \quad \beta_i = \frac{\mathbf{w}_{i+1}^T \mathbf{z}_{i+1}}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{z}_i} \\
 & \quad \mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{z}_{i+1} + \beta_i \mathbf{p}_i \\
 & \text{Fim}
 \end{aligned}$$

Figura 4 – Algoritmo do método do Gradiente Conjugado pré - condicionado.

5. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas de estruturas com não linearidade física encontrados na literatura, com o intuito de comparar os métodos de solução. Em todas as análises estruturais, considerou-se para a verificação da convergência a cada iteração k a tolerância ζ igual a 10^{-5} . O peso próprio das estruturas é negligenciado nas análises. Na montagem da matriz de rigidez e do vetor de força interna elementares utilizou-se dois pontos de Gauss (Quadratura Gaussiana).

5.1 Simulação 1 - Treliça

Na Figura 5a é mostrada uma estrutura de treliça plana com duas forças concentradas P aplicadas simetricamente. Esse problema foi analisado por Gutiérrez (2014). O material que constitui as barras apresenta comportamento elástico idealmente plástico. Para o modelo de dano são considerados os seguintes parâmetros: $E_0 A = 10^5$ kN, $f_0 = 65,0$ kPa (diagonais), $f_0 = 61,1$ kPa (demais barras), $H = 0$ e $B_1 = 1$. Nas simulações, supôs-se o incremento de força $\Delta P = 2,5$ kN. Como variável de controle no método CDD, adotou-se o deslocamento vertical no nó 5 ($j = 10$). Os parâmetros para os métodos de continuação são: ${}^1\delta\lambda^{(1)} = 2,5$, $N_{ot} = 5$, $\Delta s = 2,5$ e $u_{máx} = 0,025$.

Na Figura 5b são apresentadas as trajetórias de equilíbrio obtidas com os métodos BFGS-CDG e BFGS-CDD, comparando-as com a obtida por Gutierrez (2014). Os resultados numéricos (NP, I_t , tempo de processamento e deslocamento vertical no nó 5) das simulações efetuadas com os métodos numéricos implementados são apresentados na Tabela 2. Observa-se, nessa tabela, que o método BFGS associado às técnicas CDD e CDG obteve o menor tempo de processamento (tempo de CPU) em contraste com os esquemas iterativos de NR e NRM. Deve-se ressaltar que não estão contabilizados no tempo a geração da malha (pré-processamento) e a visualização dos resultados (pós-processamento).

No método BFGS, a matriz de rigidez \mathbf{K} é determinada segundo o MEF somente no início do passo de força ($k = 1$), sendo atualizada nas demais iterações com a determinação da matriz $\mathbf{A}^{(k)}$ conforme as Eqs. (19) e (20). No método de NRM a matriz \mathbf{K} é determinada no início de cada passo de força (como no método BFGS) sendo mantida invariável durante o ciclo iterativo; já no método de NR, a matriz de rigidez \mathbf{K} é avaliada segundo o MEF em cada iteração. Apesar do número total de iterações obtido com o método de NRM ser superior aos demais, o mesmo obteve um melhor desempenho computacional se comparado ao método de NR, uma vez que a iteração do NRM é menos custosa do que a do NR. No entanto, os sistemas

de equações lineares gerados a cada iteração precisam ser resolvidos em um número maior de vezes durante a análise com o método NRM.

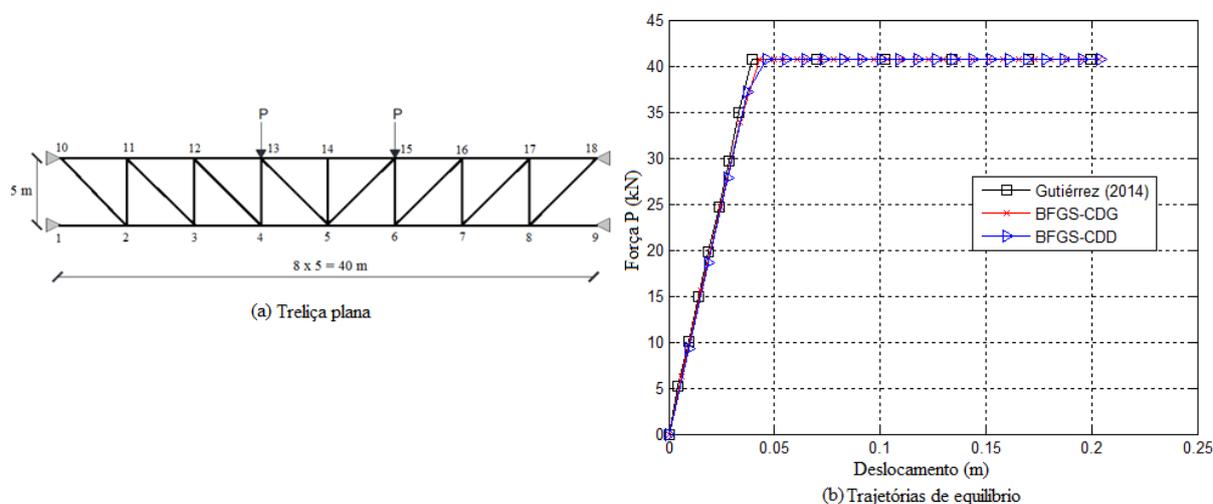


Figura 5 – (a) Modelo estrutural da treliça plana; e (b) Trajetórias de equilíbrio.

Tabela 2 - Resultados numéricos.

Método de solução	NP	I _t	Tempo de processamento (s)	Deslocamento (m)
NR-CDG	58	1129	3,410574	-0,201964576014773
NRM-CDG	58	1197	2,326601	-0,201688952803414
BFGS-CDG	29	121	0,616429	-0,203593952070447
NR-CDD	23	404	1,247428	-0,204312540250865
NRM-CDD	23	473	0,977268	-0,204312540250880
BFGS-CDD	23	108	0,570834	-0,204312540250735

5.2 Simulação 2 - Viga

Considere o problema da viga biengastada, estudado por Lourenço (1999), de comprimento $L = 5,0$ m e seção transversal retangular $(0,3 \times 0,6)$ m², cujo material é o aço macio com o comportamento elástico idealmente plástico. A viga está sujeita a uma força concentrada vertical P aplicada no meio vão, conforme o modelo estrutural mostrado na Figura 6a. Para o modelo de dano, consideram-se os seguintes parâmetros: $E_0 = 200,0$ GPa, $f_0 = 300,0$ MPa, $H = 0$ e $B_1 = 1$. A seção transversal da viga é dividida em 70 camadas de mesma espessura, sendo o módulo de rigidez à flexão equivalente determinado conforme o trabalho de Souza (2013). A viga é discretizada por 20 elementos finitos de pórtico com dois nós e três graus de liberdade/nó. Os parâmetros para os métodos de continuação adotados são: ${}^1\delta\lambda^{(1)} = 2,0$, $N_{ot} = 5$, $\Delta s = 0,002$ e $u_{m\acute{a}x} = 0,1$. Como variável de controle no método CDD, adotou-se o deslocamento vertical no centro do vão.

Na Figura 6b aparecem as curvas numéricas, deslocamento vertical máximo *versus* força P (trajetórias de equilíbrio), para os métodos BFGS-CDG e BFGS-CDD, sendo obtidas com o incremento de força $\Delta P = 1,0$ MN. Os resultados numéricos (NP, I_t, tempo de processamento e deslocamento vertical máximo) são apresentados na Tabela 3. Vê-se, nessa tabela, o bom desempenho do método BFGS, em comparação com o de NR e NRM, independentemente da estratégia de continuação adotada, alcançando o final das simulações com um número total de

iterações e tempo de processamento inferiores. O método de NRM apresentou o tempo de processamento menor do que o de NR, mesmo levando mais iterações até a convergência.

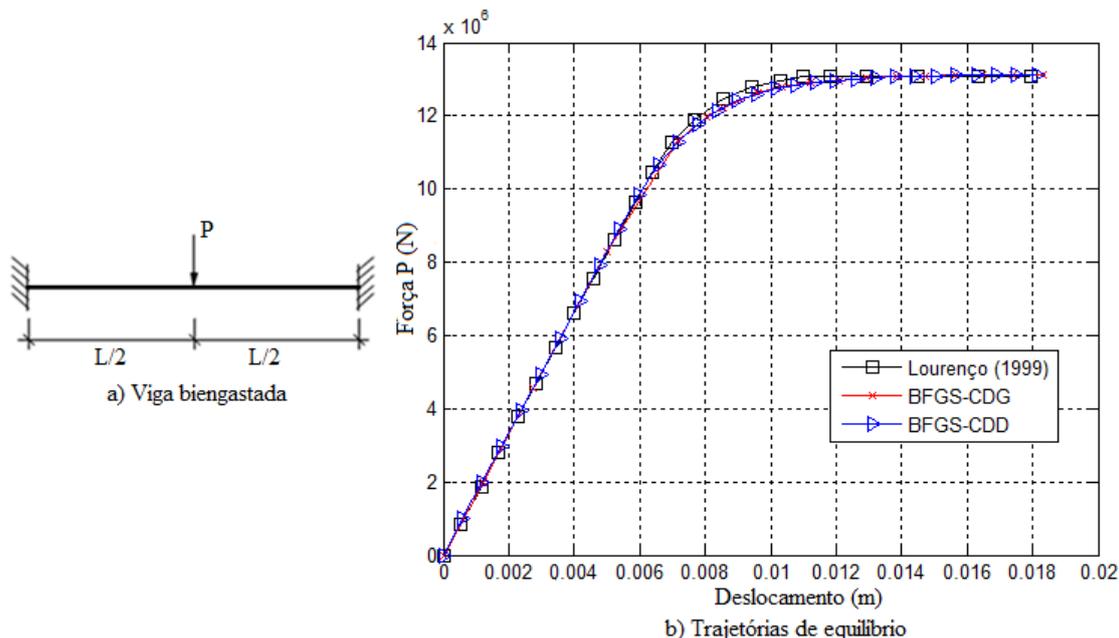


Figura 6 – (a) Modelo estrutural da viga biengastada; e (b) Trajetórias de equilíbrio.

Tabela 3 - Resultados numéricos.

Método de solução	NP	I ₁	Tempo de processamento (s)	Deslocamento (m)
NR-CDG	44	4071	120,089625	-0,018209484326139
NRM-CDG	44	4260	67,599323	-0,018010800561263
BFGS-CDG	17	250	7,724399	-0,018330871986234
NR-CDD	30	1953	58,219739	-0,018121589263744
NRM-CDD	30	2078	33,453376	-0,018121589263744
BFGS-CDD	30	318	10,146010	-0,018121589263743

5.3 Simulação 3 - Pórtico

Considere o problema de um pórtico, estudado por Lourenço (1999), de um andar com 6,0 m de largura e 3,0 m de altura e sujeito às forças concentradas P_1 e P_2 , segundo o desenho esquemático apresentado na Figura 7a. A viga do pórtico tem seção transversal retangular ($0,3 \times 0,4$) m^2 e os pilares seção transversal quadrada ($0,3 \times 0,3$) m^2 . O material que constitui os elementos estruturais apresenta comportamento elástico idealmente plástico. As seções transversais dos elementos estruturais foram divididas em 20 camadas de mesma espessura conforme a metodologia apresentada por Souza (2013).

Na discretização por elementos finitos foram utilizados 16 elementos de pórtico, sendo quatro elementos para cada pilar e oito para a viga. Os seguintes parâmetros para o modelo de dano são: $E_0 = 200,0$ GPa, $f_0 = 200,0$ MPa, $H = 0$ e $B_1 = 1$. Nas simulações, adotaram-se os incrementos de força $\Delta P_1 = 100,0$ kN e $\Delta P_2 = 150,0$ kN, e como critério de parada $\|\mathbf{u}^{(k)}\|/\|\Delta \mathbf{u}^{(k)}\| < \zeta$. Como variável de controle para o método CDD, escolheu-se o deslocamento horizontal no nó 5 ($j = 13$). Os parâmetros para os métodos de continuação adotados são: ${}^1\delta\lambda^{(1)} = 3,2$, $N_{ot} = 5$, $\Delta s = 0,01$ e $u_{m\acute{a}x} = 0,5$. As trajetórias de equilíbrio (deslocamento horizontal nó 5 *versus* fator de força λ) são apresentadas na Figura 7b. Observa-se, na Tabela 4, o melhor desempenho do

método BFGS associado às técnicas de continuação em comparação com os métodos de NR e NRM, quanto ao número total de iterações e ao tempo de processamento.

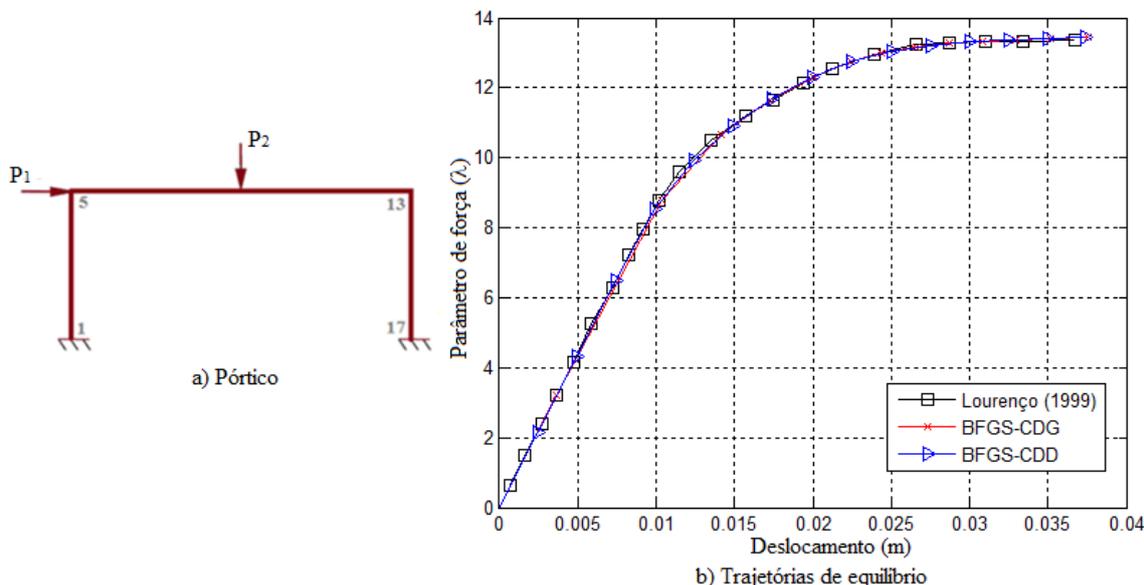


Figura 7 – (a) Modelo estrutural da viga biengastada (Pórtico); e (b) Trajetórias de equilíbrio.

Tabela 4 - Resultados numéricos.

Método de solução	NP	I_t	Tempo de processamento (s)	Deslocamento (m)
NR-CDG	24	1349	28,505312	0,037563533726730
NRM-CDG	24	1424	17,061298	0,037051727308594
BFGS-CDG	13	173	4,107543	0,037535667523526
NR-CDD	15	591	12,844869	0,037532623842189
NRM-CDD	15	670	8,027204	0,037532635514706
BFGS-CDD	15	168	3,978216	0,037413760703856

6. CONCLUSÕES

O código computacional desenvolvido com o auxílio do *software* Matlab mostrou-se eficiente devido à simplicidade de implementação e ao razoável desempenho nos exemplos numéricos estudados, demonstrando, assim, potencialidade na sua aplicação em análises não lineares de estruturas planas. A partir dos resultados obtidos, observa-se um melhor desempenho computacional nas simulações com o procedimento incremental e iterativo baseado no método BFGS, quanto ao número total de iterações até o fim da simulação e ao tempo de processamento.

O custo computacional para a resolução dos sistemas de equações lineares gerados da discretização pelo MEF a cada iteração costuma ser, em geral, o mais dispendioso durante o processo. Consequentemente, com a redução significativa de iterações até a convergência obtida com o método BFGS, o tempo de processamento para se obter a resposta da análise estrutural diminui. Além disso, essa redução diminui o número de atualizações da matriz de rigidez e do vetor de força interna durante o processo incremental e iterativo. Apesar das simulações com o método de NRM terem apresentado um número total de iterações maior nas análises, o mesmo apresentou melhores resultados (quanto ao tempo de processamento) em comparação com os de NR. Esse fato se deve ao custo computacional da iteração do método de

NRM ser menor do que a de NR, uma vez que naquele a matriz de rigidez é atualizada somente no início do passo de força corrente.

Deve-se atentar para as características peculiares de cada estratégia de continuação, visto que uma pode demandar maior tempo de processamento em relação à outra. Destaca-se a necessidade da utilização de um método de solução associado a uma técnica de continuação para a solução de problemas com não linearidade física, quando se tem pontos limites (pontos críticos) na trajetória de equilíbrio.

O pré-condicionador é uma matriz que transforma um sistema de equações lineares em outro com propriedades mais favoráveis para a solução iterativa. A técnica de pré-condicionamento é utilizada para melhorar as propriedades espectrais da matriz \mathbf{K} , e/ou, no caso da matriz ser Simétrica Definida Positiva (SDP), agrupar os autovalores próximo a um. Para o método do Gradiente Conjugado optou-se pelo pré - condicionador matriz Diagonal, construído com as entradas da diagonal principal da matriz de rigidez, por ser de fácil implementação e de baixo custo computacional. Estudos com outros pré - condicionadores encontrados na literatura podem ser realizados, todavia a construção do pré-condicionador pode ser muito cara. Dessa maneira, uma implementação cuidadosa deve ser feita a fim de se obter resultados numéricos competitivos tanto em relação à velocidade quanto à robustez.

Como sugestão de pesquisa futura, pode-se empregar outros métodos para a solução do problema estrutural num esquema incremental e iterativo, como por exemplo: os métodos de Potra e Pták, do Ponto-Médio, de Chun e de Quase - Newton do tipo Broyden. Além disso, sugere-se a implementação de algoritmos que permitam efetuar ciclos de carregamento e descarregamento e adequar o código implementado para estudos em análise dinâmica.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UTFPR e ao Programa de Pós - Graduação em Matemática da UEM que deram apoio para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, V. S.; PAIVA, J. B. *Aplicação do método dos gradientes conjugados com o uso de pré-condicionadores em problemas do MEF. In: XX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 1999, São Paulo. Anais... Eds. P. M. Pimenta, R. M. L. R. F. Brasil e E. S. Almeida N., São Paulo, Brasil, 1999.*

COELHO, A. F. E.; OLIVEIRA, A. R. L.; FONTOVA, M. I. V. *Solução de sistemas lineares de grande porte usando uma variante do método dos gradientes conjugados. In: XLII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2010, Bento Gonçalves. Anais... Bento Gonçalves, Brasil, pp. 2445 - 2456, 2010.*

CRISFIELD, M. A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol. 1: Essentials. John Wiley & Sons Ltd., New York, 1991.*

GUTIÉRREZ, M. P. D. *Análise elastoplástica de estruturas metálicas usando o conceito de rótulas plásticas e o algoritmo de retorno radial. Dissertação (Mestrado), Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Brasília, Brasil, 2014.*

LOURENÇO, P. B. *Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não linear. Relatório 99-DEC/E-1, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, Portugal, 1999.*

MANZOLI, O. L. *Um modelo analítico y numérico para la simulati6n de discontinuidades fuertes em la mecânica de sólidos. Tese (Doutorado), Escola Técnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1998.*

MAXIMIANO, D. P. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.*

MUÑOZ, L. F. P.; ROEHL, D. M. *Comparação de Métodos de Continuação em Problemas com Análise Inelástica. In: Anais do XXXI Mecânica Computacional. Salta, Argentina, 2012.*

NOGUEIRA, E. C. *Estudo da paralelização para solução do sistema linear do método dos elementos finitos generalizados. Dissertação (Mestrado), Curso de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2011.*

PROENÇA, S. P. B. *Simulação numérica do comportamento de elementos estruturais em concreto e argamassa armada pelo emprego de um modelo de dano. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, v. 8, n. 4, p. 351-360, 1992.*

RAMM, E. *Strategies for tracing the non-linear response near limit-points, nonlinear finite element analysis in structural mechanics. Wunderlich, W. (ed.), Berlin, Springer-Verlag, p. 63-89, 1981.*

ROCHA, G. *Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não linear de estruturas. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Ouro Preto, Escola de Minas, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, 2000.*

SOUZA, L. A. F. *Análise estrutural unidimensional de viga de concreto armado reforçada com PRFC. Ciência & Engenharia, v. 22, p. 65-72, 2013.*