

INFLUÊNCIA DO TAMANHO DO LOTE NO FATOR DE RANK PARA PARÂMETROS DE FORMA NA DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL

José Maciel - Universidade Estadual do Norte Fluminense – E-mail: joseantonio.maciel@uol.com.br

Eduardo Carvalho – Universidade Estadual do Norte Fluminense - E-mail: eatem@uenf.br

Vitor Tamy – E-mail: joseantonio.maciel@uol.com.br

João Damasceno de Jesus – E-mail: joseantonio.maciel@uol.com.br

Resumo: Este trabalho propõe avaliar a influência do número de lotes nos valores dos estimadores de Rank para determinação do Parâmetro de Forma (β) e do Parâmetro de Escala (θ) na Distribuição de Weibull, quando se emprega o Método Gráfico de Probabilidade, do número considerando-se o Parâmetro de Localização (δ) como nulo. Foram utilizados valores não censurados (completos) de Tensão de Ruptura obtidas de quatro lotes, sendo três de 30 amostras de uma argila vermelha e um segundo de 40 amostras de uma pastilha de revestimento comercial. Sub-lotes aleatórios foram criados para se avaliar o impacto do tamanho da amostra nestas estimativas. Utilizando-se o Método de Estimação da Máxima Verossimilhança (EMV) como referência em comparação ao Método Gráfico de Probabilidade, verifica-se que para estes sub-lotes foram encontradas diferenças significativas no valor do β e pouca diferença no valor do θ .

Palavras-chave: Lote, Weibull, Rank, Parâmetros.

BATCH SIZE INFLUENCE AGAINST RANK FACTOR FOR WEIBULL DISTRIBUTION SHAPE PARAMETER

Abstract: This study aims to assess the influence of size samples within Rank Estimators for getting Shape Parameter (β) and Scale Parameter (θ) as well at Weibull Distribution when Probability Plotting Method has been applied considering Location Parameter (δ) equal to zero. It has been used complete data (not censored) of Fracture Test results from 04 sizes, being three of them 30 samples from red ceramic and the last one composed by 40 samples from commercial covering tiles. Randomly smaller samples sizes had been prepared aiming to assess what the impact of sample size is within such estimations. By using EMV as pattern to have Probability Plotting assessment focusing Rank Distribution Function it is clear to conclude some important differences among these new smaller sample sizes regarded to shape parameter β . By the other hand, it was found not too much impact at scale parameter θ behavior.

Keywords: Batch, Weibull, Rank, Parameters.

1. INTRODUÇÃO

O Modelo ou Distribuição de Weibull, que foi já conhecido como Fisher-Tippet III dos Menores Valores ou Terceira Assintótica dos Menores Valores Extremos (KAPUR & LAMBERSON, 1977), tem sido em recentes anos, utilizado em grande número de trabalhos científicos para a determinação de vida útil ou previsões nas áreas aeroespacial, automotiva, geração elétrica, médica e dentária, eletrônica e em diversas outras. Em aplicações práticas, pode ser empregado como um modelo e ferramenta recomendada para determinar o potencial da energia eólica (ROCHA *et al*, 2012), analisar os dados de campo ou de ensaios para análises de confiabilidade com objetivo de determinar as fases de falhas prematuras (mortalidade infantil), a fase de falhas casuais ou aleatórias (taxa de falhas constante) e a fase por falhas por desgaste (LAFRAIA, 2001). Possui boa aderência ao controle de processos que envolvam falhas de materiais ou peças ao longo do tempo (DODSON, 2006). Sendo assim, é uma ótima ferramenta para a determinação de vida útil, descrevendo uma propriedade de materiais frágeis, o Módulo de Weibull (CARVALHO, 2007).

Este trabalho propõe a análise dos efeitos do tamanho da amostra frente aos estimadores de parâmetros da função cumulativa de distribuição (FCD) de Weibull quando se usa o Método Gráfico de Probabilidade. Diversos autores, tais como Skinner *et al* (2001); Al-Fawzan (2000); Kirtay & Dispinar (2012) apresentaram trabalhos com uso de vários métodos não paramétricos, já que a Distribuição de Weibull é uma função assimétrica de estimação da FCD. Yahaya *et al* (2012) compilam diversos estudos. Dodson (2006) reforça que os mais comuns destes métodos são o Gráfico de Probabilidade, Máxima Verossimilhança, Estimadores de Momento e Estimadores Lineares. Além disto, o estudo tratará das particularidades dos estimadores obtidos através do Método Gráfico, utilizados em comparação com o Método de Máxima Verossimilhança, apontado por Dodson (2006) como sendo o de melhor acurácia, tendo seus valores obtidos através de software estatístico freeware, já que é de difícil operação e diversas interações numéricas são necessárias (Rocha *et al*, 2012).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Distribuição de Weibull

Wallodi Weibull (1887-1979), engenheiro originário da área aeronáutica, contribuiu bastante para a difusão do conhecimento de confiabilidade, previsão vida futura e comportamento de materiais. Agraciado com duas Medalhas de Ouro (1972 e 1988) pela ASME (*American Society of Mechanical Engineers*) devido a contribuição à Engenharia e à Estatística. A Distribuição de Weibull foi inicialmente publicada em 1951 em “*A Statistical Distribution Function of Wide Applicability*” (DODSON, 2006), embora tenha sido identificado pela primeira vez por Fréchet em 1927 e aplicado pela primeira vez por Rosin & Rammler em 1933 para descrever a distribuição do tamanho de partículas (SOUZA *et al*, 2011)

Dodson (2006) estabelece funções de interesse para o uso das Funções de Weibull, dentre elas:

- 1) A Função Densidade de Probabilidade (fdp) $\rightarrow f(x)$.
- 2) A Função Distribuição Cumulativa (cdf) $\rightarrow F(x)$
- 3) A Função Confiabilidade $\rightarrow R(x)$

a) Função Densidade de Probabilidade (FDP) – *Probability Density Function (PDF)*:

Descreve a forma da distribuição em função de um histograma. Possui duas condições básicas requeridas:

- a) $f(x) > 0$ para todo x (tempo).
- b) Área sob a curva $f(x) = 1$.

Assim:

Para Distribuições Contínuas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (1)$$

Para Distribuições Discretas:

$$\sum_n x_n = 1 \quad (2)$$

A função densidade de probabilidade de Weibull é definida por Dodson (2006) como:

$$f(x) = \frac{\beta(x-\delta)^{\beta-1}}{\theta^{\beta}} e^{\left\{-\left(\frac{x-\delta}{\theta}\right)^{\beta}\right\}} \quad (3)$$

Onde:

β é o parâmetro de forma (também conhecido como Módulo de Weibull e inclinação da Distribuição de Weibull) cujo efeito na FDP é visto na Figura 01.

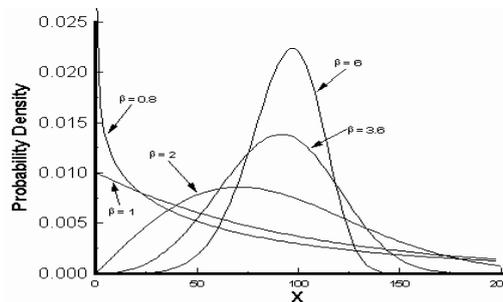


Figura 1: Efeito do Parâmetro de Escala na Função de Densidade de Probabilidade (FDP).

Fonte: <http://www.engineeredsoftware.com/nasa/reliabil.htm>

Valor de β igual a:

- a) 1: Equivalente à Distribuição Exponencial.
- b) 2: Equivalente à Distribuição de Rayleigh.
- c) Entre 1 e 3,6: Aproxima da LogNormal.
- d) Entre 3 e 4: Aproxima da Distribuição Normal (3.6 é a melhor estimaco, compensando a assimetria existente).
- e) 5: Aproxima de um Distribuio Normal de Pico (desvio padro tende a zero).

θ é o parâmetro de escala. É também conhecido como vida característica, ou seja, valor de tempo em que 63,2% das falhas ocorrem se o parâmetro de localizao for igual a zero. Se o parâmetro de localizao for diferente de zero, este dever ser adicionado ao parâmetro de escala para que esta mesma regra seja aceita. Determina a escala propriamente dita da funo, conforme explicitado na Figura 02.

δ é o parâmetro de localizao (Considerando que x é maior ou igual a δ). Em uma Distribuio de Weibull de 02 parâmetros ($\delta = 0$), θ é a vida mnima da populao. Em caso de $\delta \neq 0$, novas consideraes devero ser feitas, as quais se encontram claramente explicitadas em Dodson (2006).

b) Funo de Distribuio Cumulativa - FDC (*Cumulative Distribution Function - CDF*): É a rea sob a linha da Funo de Densidade de Probabilidade, representando a probabilidade de sobrevivncia de x sendo menor do que o valor de $P(X < x)$.

Para Distribues Contnuas: $P \geq 0$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \tag{4}$$

Para Distribues Discretas: $P > 0$

c) Funo de Confiabilidade - FC (*Reliability Function - RF*): É a probabilidade de sobrevivncia do sistema, sendo o complemento da Funo de Distribuo Cumulativa $F(x)$ e atravs da Funo de Densidade de Probabilidade:

$$R(x) = 1 - F(x) = 1 - \int_0^x f(\sigma) d\sigma = \int_x^\infty f(\sigma) d(\sigma) \tag{5}$$

$$R(x) = \int_x^\infty \frac{\beta(t-\delta)^{\beta-1}}{\theta^\beta} e^{-\left(\frac{t-\delta}{\theta}\right)^\beta} dt \tag{6}$$

2.2 Métodos de Estimação de Parâmetros

Dodson (2006) apresenta cinco métodos de estimação de parâmetros: Método Gráfico (*Probability Plotting*), Método de Risco (*Hazard Plotting*); Método de Máxima Verossimilhança (*Maximum Likelihood Estimation - EMV*), Método dos Momentos Lineares (*Linear Estimation*) e Método de Estimação dos Momentos (*Moment Estimation*). Em geral, todos possuem vantagens e limitações de utilização. Ao mesmo tempo, recomenda o uso do Método Gráfico ou Método de Risco para a melhor verificação da qualidade da linearização proposta para a Distribuição de Weibull. Por outro lado, recomenda o EMV para ou o Método de Estimadores Lineares para a estimação de parâmetros e limites de confiança correspondentes, reforçando que o EMV é o método mais acurado para a estimação de parâmetros e possui, em geral, propriedades muito boas (BUSSAB e MORETTIN, 2006), contudo torna-se um método de difícil utilização sem o suporte da informática.

2.2.1 Método de Estimadores de Máxima Verossimilhança - EMV (*Maximum Likelihood*):

O princípio, demonstrado por Fischer em 1912 e 1922, adota que este método determina o valor do parâmetro desconhecido que maximiza a probabilidade de obter a amostra particular observada, ou seja, o valor que torna aquela amostra mais provável de ocorrer (BUSSAB & MORETTIN, 2006).

Para a estimação de β pelo EMV, existe a necessidade de que os dois lados da equação abaixo sejam iguais:

$$\sum_{i=1}^r \frac{\ln(x_i - \delta)}{r} = \frac{\sum_{i=1}^r (x_i - \delta)^\beta \ln(x_i - \delta)}{\sum_{i=1}^r (x_i - \delta)^\beta} \quad (8)$$

Os estimadores não podem ser pontuais, ou seja, não podem ser especificados por um único valor, já que não se permite julgar a magnitude do erro que se comete: daí a necessidade de que sejam delimitados Intervalos de Confiança, baseados na Distribuição Amostral do estimador pontual (BUSSAB e MORETTIN, 2006). Um coeficiente de confiança indica onde uma certa quantidade percentual dos estimadores seriam encontrados dentro de um dado intervalo delimitado entre um valor limite superior e um valor limite inferior.

Carvalho (2007) estabelece a necessidade de determinação dos intervalos de confiança para os parâmetros de forma e de escala para que se saiba o quão precisas foram estes resultados. Descreve a existência de dois métodos mais utilizados para a determinação de β .

2.2.2 Método Gráfico de Probabilidade (*Probability Plotting Position*).

Para a estimação dos parâmetros, o Método Gráfico de Probabilidade torna-se uma ferramenta de bastante útil, sendo utilizado na representação da Função de Distribuição Cumulativa da distribuição dada (YAHAYA et al, 2012), apesar de não ser tão acurado como outros métodos (DODSON, 2006). Para construção do Método Gráfico de Probabilidade é necessário que a Função de Distribuição Cumulativa de Weibull abaixo apresentada tenha uma forma mais palatável de trabalho:

$$F(x) = 1 - e^{\left[-\left(\frac{x-\delta}{\theta}\right)^\beta\right]} \quad (12)$$

Assim, com um rearranjo da equação (12), tem-se:

$$1 - F(x) = e^{\left[-\left(\frac{x-\delta}{\theta}\right)^\beta\right]} \quad (13)$$

Aplicando-se logaritmo em ambos os termos da equação (13), temos como resultado:

$$\ln(1 - F(x)) = \ln\left(e^{\left[-\left(\frac{x-\delta}{\theta}\right)^\beta\right]}\right) \quad \text{tem-se:} \quad \ln(1 - F(x)) = \ln\left[-\left(\frac{x-\delta}{\theta}\right)^\beta\right] \quad (14)$$

Aplicando-se, novamente, logaritmo em ambos os termos da equação (14), tem-se como resultado:

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-F(x)} \right) \right] = \beta \ln (x - \delta) - \beta \ln \theta \quad (15)$$

Para o caso particular de que β e θ constantes, se $\delta = 0$, teremos uma reta e, caso $\delta \neq 0$, resultará em uma curva (LAFRAIA, 2001).

Utilizando o papel de plotagem de Weibull, escala log-log nas ordenadas conjuntamente com uma transformação para $(1/(1-F(x)))$ de forma que se coloca diretamente $F(x)$, a probabilidade de falha, contra $(x-\delta)$ como abscissa. Assim, o método gráfico é utilizado para estimar beta (a inclinação da curva), θ (escala da curva) e δ para o período de garantia (localização da curva).

O Método Gráfico de Probabilidade, com o apoio da Análise de Regressão Linear Simples, pode ser utilizado para a linearização definitiva da Função de Distribuição Cumulativa de Weibull.

Considerando a equação geral da reta como:

$$Y = AX + B \quad (16)$$

Relacionando com a equação (16) teremos:

$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-F(x)} \right) \right]$ = apresenta-se como o variável dependente (Y).

β = responsável pela inclinação da reta (A)

$\ln (x - \delta)$ = como a variável independente (X).

$-\beta \ln \theta$ = como intercepto do eixo das ordenadas (B).

Para o cálculo do Parâmetro de Escala θ , temos a expressão obtida anteriormente que $-\beta \ln \theta = B$ Assim:

$$\theta = e^{\left(\frac{B}{\beta} \right)} \quad (17)$$

Onde:

B é o valor onde a linha de tendência corta o eixo e está representado na equação da reta obtida para cada sub-lote

β é o valor do parâmetro de forma de Weibull obtido na equação da reta.

2.2.3 Distribuição de Rank.

Antes do início do processo de determinação dos parâmetros, uma estimação da influência da posição do valor em relação à probabilidade de falha. Assim, dada uma seqüência ordenada de dados x_1, x_2, \dots, x_n cujo número total de amostras é n e tem uma função de distribuição cumulativa $F(x)$, onde x é um valor contínuo, deseja-se determinar os valores dos estimadores $F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$. A expressão para o Rank é:

$$w_\alpha = \frac{\frac{i}{n-i+1}}{F_{1-\alpha, 2(n-i+1), 2i} + \frac{i}{n-i+1}} \quad (18)$$

Onde:

$w_\alpha = 100 (1 - \alpha)\%$ limite de confiança não paramétrico ($\alpha = 0,5$ para o rank mediano)

i = ordem da falha.

n = número total da amostra.

F_{α, v_1, v_2} : valor crítico da distribuição F (Fischer-Snedecor), com dois graus de liberdade.

O valor médio é usado porque a média é normalmente assumida como sendo o valor representativo de toda a distribuição. Porém, em distribuições muito distorcidas, como é o caso das distribuições de Rank, a mediana descreve melhor a amostra (DODSON, 2006). As distribuições em rank são normalmente assimétricas da direita para a esquerda, quando se inicia a análise do menor para o maior valor. Assim sendo a probabilidade de que um valor da amostra caia abaixo da média é maior para os primeiros membros ordenados (do menor para o maior) do que para os últimos (maiores valores). Isto implica em que se o Rank Médio está sendo usado, o Rank designado para as primeiras observações serão, provavelmente, grandes demais, com mudanças sucessivas no valor do erro para os termos intermediários. Quando uma linha reta é usada para descrever (através de “*best fit*”) estes dados estudados usando Rank Médio, a linha sofrerá rotação no sentido horário e sua inclinação será menor, indicando valores muito menores do que os reais para os fatores estudados. Desta forma, existe uma tendência para se usar o Rank Mediano neste método.

O mais comum estimador é o rank mediano. É utilizado para obter a probabilidade de falha $F(x)$ para um certo dado ordenado, ou seja, é o valor que esta mesma probabilidade de falha deveria ter na j -ésima ordenação (ordem da amostra) em um numero total de amostras testadas n , com intervalo de confiança de 50% (LINO, 2008).

Rank Mediano é um estimador não paramétrico da Função Cumulativa de Distribuição baseado em falhas ordenadas. Dodson (2006) apresenta dois modelos numéricos para o cálculo do Rank:

$$\text{Rank Médio} \rightarrow (x_j) = \frac{j}{n+1} \quad (19)$$

$$\text{Rank Mediano} \rightarrow (x_j) = \frac{j-0.3}{n+0.4} \quad (20)$$

Existem outras propostas para o Rank Mediano. Askeland & Phulé (2005) apresentam duas possíveis estimativas sugeridas por White (White 1 e White 2).

$$\text{Rank Mediano W1} \rightarrow F(x_j) = \frac{j-0.375}{n+0.250} \quad (21)$$

$$\text{Rank Mediano W2} \rightarrow F(x_j) = \frac{j-0.5}{n} \quad (22)$$

Dodson (2006) também apresenta os estimadores de Kaplan-Meir, onde $Q_j = 0$ para as observações que foram censuradas e $Q_j = 1$ para aquelas que não. Onde Γ é a função Gama, tabulada em textos estatísticos. Além destas propostas, ver Yahaya *et al* (2012) que acrescentam outros métodos.

$$F(x_i) = \frac{\left\{ \frac{\Gamma(-n+i+1)}{\Gamma(-n+1)} \right\}^{Q_j}}{\left\{ \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n)} \right\}^{Q_j}} \quad (23)$$

2.3 Tipos de Amostras

DODSON (2006) estabelece quatro tipo principais de amostras coletadas através de testes em geral: completas, uncensuradas, multi-censuradas e dados agrupados. Amostras completas ou não censuradas são aquelas em que os resultados dos testes são obtidos sem que nenhum dos componentes seja retirado ou excluído antes do final do teste. Uncensuradas são aqueles dados obtidos quando somente uma única condição-limite é definida como critério para um teste. Multi-censuradas, quando duas ou mais condições-limites são necessárias. Dados Agrupados são aqueles obtidos quando o tempo exato de falha não é conhecido, mas o número de falhas dentro de um intervalo de tempo é conhecido e coletado.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Materiais

Para a determinação de propriedades de materiais para o relacionamento com a Distribuição de Weibull, foram selecionados dois tipos de materiais: cerâmica vermelha (MC1, MC2 e MC3) e pastilhas de revestimento industriais (MC4), cujos dados foram extraídos de Freire (2007), conforme Tabelas 1 e 2.

Tabela 1 – Valor da Tensão de Ruptura dos Lotes MC1, MC2 e MC3.

Amostra	TRup (Mpa)			Amostra	TRup (Mpa)			Amostra	TRup (Mpa)		
	MC1	MC2	MC3		MC1	MC2	MC3		MC1	MC2	MC3
1	42.3	39.1	40	11	38.6	35.7	42.9	21	37.7	43.5	41.9
2	37.3	33	43.3	12	37.5	34.3	46.2	22	39.1	37.3	37.1
3	40.3	37.5	39.6	13	38.6	35	41.2	23	37.7	35.1	42.4
4	39.3	34.7	40.2	14	38.2	37.4	42.2	24	38.3	28.1	44.5
5	36.9	37.5	41.4	15	42.8	40.4	40.8	25	36.6	33.9	45.9
6	39.1	39.6	42.6	16	42	42.1	40.3	26	39.4	30.5	38.1
7	43.5	31.1	42.2	17	37.5	45.8	46	27	41.6	37.6	42.1
8	38.3	40.2	40	18	41.3	46.7	36.5	28	43.2	38	38
9	41.1	33.8	38.9	19	37.8	36.3	42.6	29	38.7	37.9	40.2
10	34.9	39.6	39.6	20	37.6	38.7	36.2	30	37.3	41.4	43.9

Tabela 2 – Valor da Tensão de Ruptura dos Lotes com Pastilhas (MC4).

Amostra	TRup (MPa)								
1	658.11	9	508.16	17	552.66	25	571.26	33	457.26
2	391.5	10	516.4	18	439.26	26	337.48	34	524.61
3	466.81	11	476.62	19	432.63	27	438.73	35	464.2
4	527.81	12	515.86	20	512.48	28	486.73	36	480.41
5	466.8	13	465.9	21	438.52	29	402.41	37	413.76
6	330.35	14	532.16	22	483.66	30	509.53	38	508.26
7	475.55	15	559.30	23	421.52	31	392.55	39	439.04
8	561.51	16	345.52	24	473.44	32	482.33	40	496.39

Este autor apresenta valores de Tensões de Ruptura para três lotes de materiais cerâmicos, obtidos em ensaios de flexão de 4 pontos. Estes valores serão adotados para o presente estudo, sendo denominados de MC1, MC2 e MC3 para cada lote apresentado.

Garcia *et al* (2000) estabelecem que, em ensaios de flexão consiste na aplicação de uma certa carga P no centro de um corpo de prova específico apoiado em dois pontos. Esta carga parte de um valor inicial igual a zero e aumenta lentamente até a ruptura do corpo de prova. No ensaio a 4 pontos, que consiste com a aplicação de carga em dois pontos equidistantes sob dois apoios, existindo quatro pontos de carga, o estado de tensões previsto na formulação é do tipo abaixo apresentado, conforme ASTM E855-90:

$$\sigma_{4P}^{Flex} = \frac{3P_{max}a}{wh^2} \quad (24)$$

Onde:

P_{max} = carga aplicada.

a = distância entre o suporte e o ponto de carga mais próximo.

w = espessura do corpo.

h = altura do corpo.

No caso das Pastilhas de Revestimento, fabricante Portobello, foram adquiridas na Cidade de Campos (RJ). Suas dimensões foram consideradas uniformes para todo o lote (145.29 x 45.36 x 6.73mm), conforme as normas ISO 13.006 e NBR 13.818. Para determinação dos valores de Tensão de Ruptura foram utilizados ensaios de flexão de 3 pontos, onde a aplicação de carga no centro da distância entre três apoios, tendo o estado de tensões com seção retangular previsto na formulação é do tipo abaixo apresentado:

$$\sigma_{3P}^{Flex} = \frac{3P_{max}L}{2wh^2} \quad (25)$$

Onde:

P_{max} = carga aplicada.

L = comprimento do corpo

w = espessura do corpo.

h = altura do corpo

3.2 Método

De posse dos valores de Tensão de Ruptura (MC1, MC2, MC3 e MC4), foram feitas análises dos resultados com o uso software estatístico e o Microsoft Excel. As análises foram feitas lote por lote do seguinte modo: Em primeiro lugar cada lote (MC1, MC2, MC3 e MC4) foi dividido em sub-lotes, múltiplos de 05, e agrupados em ordem crescente, com respectivamente 5, 10, 15, 20, 25 e 30 amostras para MC1, MC2 e MC3 e também 35 e 40 amostras para MC4. Estes sub-lotes foram analisados individualmente no software RelRig32, onde foram obtidos os valores dos fatores de Weibul pelo Estimador de Máxima Verossimilhança, com intervalo de confiança de 90%.

Utilizando-se o Excel, calculou-se os valores dos estimadores de rank pelos Métodos do Rank Médio, Rank Mediano, White 1, White 2 e Kaplan-Meier, utilizando-se da expressão (1) para elaborar um gráfico de plotagem de pontos em relação às tensões de ruptura para cada lote. Traçou-se uma linha de tendência para estes pontos para identificar cada estimador, obtém-se a equação da reta com melhor R^2 , que representa a análise de variância ou eficiência do método (ROCHA, 2012), ou seja, mais próximo de 1 melhor será a estimativa.

A partir dos valores acima listados, foram gerados outros sub-lotes contendo 5, 10, 15, 20, 25 e 30 amostras para MC1, MC2 e MC3 e para MC4: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 e 40 amostras. O método consistiu em se listar os valores na ordem em que foram obtidos. Depois, de baixo para cima, ir progressivamente eliminando as quantidades necessárias para que os novos lotes fossem gerados. Então, estes lotes foram analisados como se fossem novos lotes, independentes entre si.

Como passo seguinte, já com o valor do fator de forma (β) na equação, obtém-se o valor do fator de escala (θ) através da expressão (9), ou seja, os módulos de Weibull para cada estimador de Rank. Considera-se o valor de $\delta = 0$, admitindo-se não existirem gradientes de temperatura durante o processo de fabricação ou estocagem que gerassem tensões residuais existentes. Com os valores de (β) e (θ) em mãos, realizou-se a comparação entre os obtidos pelo EMV e aqueles obtidos através das Distribuições de Rank. A análise se completou com a ajuda dos erros quadrático e percentual calculados.

3.2.1 Software de Análise:

Para levantamento dos parâmetros da distribuição de Weibull através do Método de Estimação de Verossimilhança, será utilizado o Software Relrig 32, versão 4.8, desenvolvido por *Engineered Software, Inc.* Além deste, foi também utilizado o software *Microsoft Office Excel*.

3.2.2 Medição do Erro (ϵ)

A medição dos erros dos Estimadores de Parâmetros em relação ao EMV para a determinação do melhor estimador é feito através de dois tipos de critérios: o Erro Médio Quadrático (*RMSE: Root Mean Squared Error*) e o Erro Percentual. Busca-se, assim, uma melhor comparação dos valores obtidos pelos métodos numéricos dos Estimadores de Rank (ER) em relação ao método de Máxima Verossimilhança (EMV), para a análise do comportamento do Módulo de Weibull (β) e do Parâmetro de Escala (θ), já que se deseja quantificar a diferença entre os valores obtidos por meios de dado modelo de Rank e os

valores tidos como referência (EMV). Quanto mais próximo de zero for o valor obtido pelas equações (26) e (27), menor é a incerteza do Estimador de Rank frente ao valor tido ideal pelo EMV.

Yahaya *et al* (2012) estabelecem a seguinte expressão para Erro Médio Quadrático (RMSE: Root Mean Squared Error):

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y^{EMV} - y^{Est})^2} \tag{26}$$

Onde:

N é o número de sub-lotes estudados;

y^{EMV} é o valor do módulo de Weibull de um determinado lote para EMV e

y^{Est} é o valor do módulo de Weibull de um determinado lote.

Carvalho (2007) estabelece a seguinte expressão para Erro Percentual:

$$\varepsilon = \left| \frac{Y_{maior} - Y_{menor}}{Y_{maior}} \right| \times 100 \tag{27}$$

Onde:

y^{maior} é o valor do β ou θ de um determinado lote para EMV;

y^{menor} é o valor do módulo de β ou θ de um determinado lote.

4 Resultados e Discussões

4.1 Influência dos Estimadores de Rank no Valor do Fator de Forma (β).

As Tabelas e Gráficos seguir apresentam os valores de β obtidos empregando-se o método gráfico de probabilidade e cada um dos modelos de Rank apresentados neste trabalho em relação aos sub-lotes de MC1, MC2, MC3 e MC4. Na mesma tabela os nomes dos estimadores estão abreviados como Rm para Rank Médio, RM para Rank Mediano, W1 para White1, W2 para White2, KM para Kaplan-Meier e EMV para Máxima Verossimilhança.

Tabela 3: Valores de β e ε pelo Método Gráfico, empregando-se as diversas expressões para o Rank no lote de Amostras MC1 e MC2.

N	β (Rm)		β (RM)		β (W1)		β (W2)		β (KM)		β (EMV)	
	MC1	MC2	MC1	MC2								
5	15.13	12.63	17.60	14.79	18.39	15.49	19.94	16.87	19.13	12.89	20.57	20.57
10	14.90	10.86	16.57	12.01	17.01	12.44	18.01	13.00	16.58	10.89	17.44	15.29
15	17.87	12.97	19.43	14.09	19.9	14.43	20.81	15.00	21.02	13.31	17.83	15.63
20	17.90	10.13	19.16	10.84	19.54	11.06	20.25	11.46	19.18	11.33	18.29	9.63
25	19.54	9.38	20.74	9.98	21.1	10.16	21.78	10.16	21.22	10.07	18.68	9.16
30	20.46	10.62	21.55	11.24	21.87	11.42	22.48	11.42	20.81	10.76	18.55	9.46

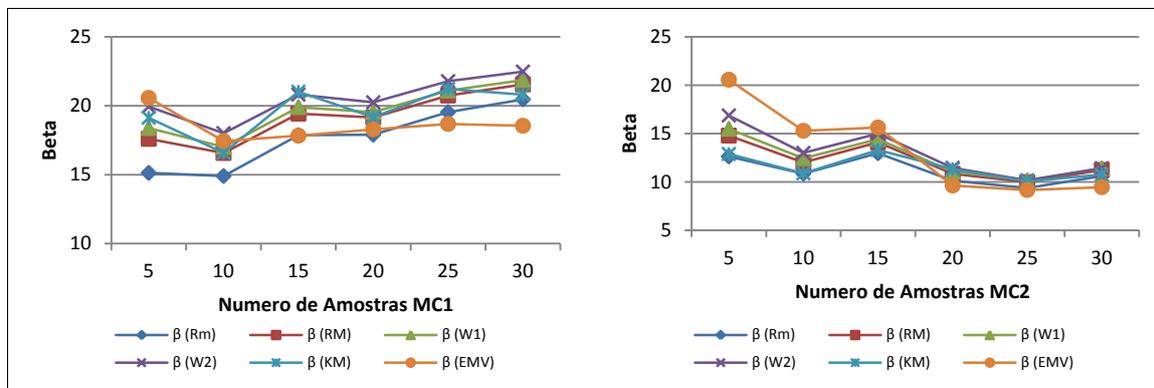
Tabela 4 : Valores do Coeficiente de Eficiência do Método (R²) para o Lote MC1 para aceitação do Parâmetro de Forma.

Lote	R ² (Rm)	R ² (RM)	R ² (W1)	R ² (W2)	R ² (KM)
5	0.9253	0.9128	0.9084	0.8991	0.9062
10	0.9807	0.9773	0.9758	0.9722	0.9878
15	0.8989	0.8962	0.8949	0.8921	0.9249
20	0.9057	0.8987	0.8963	0.8911	0.9083
25	0.8584	0.8532	0.8514	0.8474	0.8657
30	0.8583	0.8498	0.8469	0.8409	0.8655

Tabela 5 : Valores do Coeficiente de Eficiência do Método (R²) para o Lote MC2 para aceitação do Parâmetro de Forma.

R ² (Rm)	R ² (RM)	R ² (W1)	R ² (W2)	R ² (KM)	R ² (Rm)
---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------

5	0.9524	0.9531	0.953	0.9522	0.9173
10	0.9557	0.9515	0.9497	0.9454	0.9566
15	0.971	0.9654	0.9633	0.9584	0.9716
20	0.9272	0.9206	0.9182	0.9128	0.9483
25	0.9549	0.9546	0.9542	0.9529	0.9658
30	0.9851	0.9849	0.9843	0.9826	0.9868



Gráficos 01 e 02: Valores de β pelos diversos Métodos de Estimadores, frente ao tamanho do lote, para MC1 e MC2.

Tabela 6: Valores de β e ϵ obtidos pelo Método Gráfico, frente ao tamanho do lote, empregando-se as diversas expressões para o Rank no lote de Amostras MC3 e MC4.

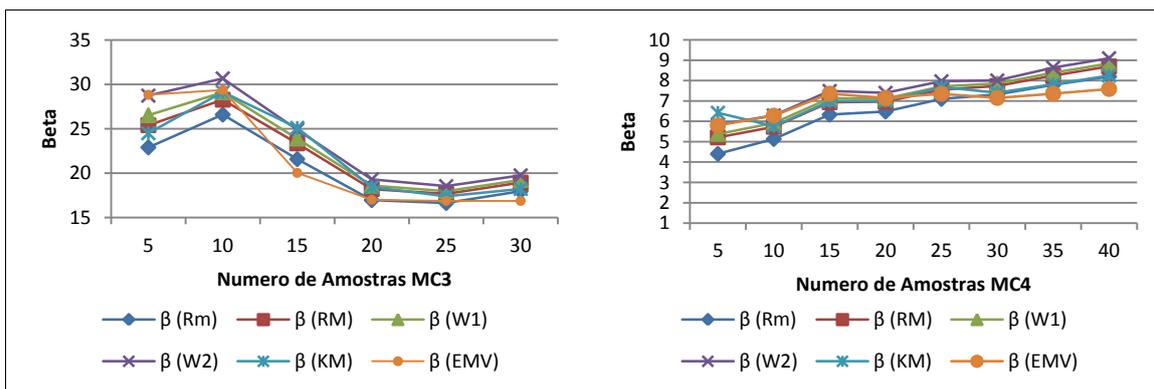
N	β (Rm)		β (RM)		β (W1)		β (W2)		β (KM)		β (EMV)	
	MC3	MC4	MC3	MC4								
5	22.90	4.40	25.4	5.21	26.52	5.38	28.73	5.83	24.5	6.42	28.83	5.80
10	26.59	5.13	28.27	5.73	29.1	5.92	30.67	6.29	29.13	5.76	29.37	6.28
15	21.58	6.33	23.35	6.94	23.88	7.13	24.89	7.49	25.1	6.99	20.03	7.36
20	16.96	6.48	18.21	6.97	18.59	7.12	19.30	7.4	18.43	7.01	17.00	7.15
25	16.63	7.1	17.66	7.56	17.97	7.71	18.54	7.97	17.39	7.68	16.88	7.35
30	17.97	7.32	18.94	7.74	19.22	7.86	19.75	8.01	18.22	7.41	16.88	7.15
35	NA	7.79	NA	8.25	NA	8.39	NA	8.64	NA	7.82	NA	7.36
40	NA	8.20	NA	8.70	NA	8.84	NA	9.1	NA	8.25	NA	7.59

Tabela 7 : Valores do Coeficiente de Eficiência do Método (R^2) para o Lote de Amostras MC3 para aceitação do Parâmetro de Forma Obtido.

Lote	R^2 (Rm)	R^2 (RM)	R^2 (W1)	R^2 (W2)	R^2 (KM)
5	0.7981	0.7843	0.7797	0.7701	0.7646
10	0.8573	0.8433	0.8385	0.8287	0.8442
15	0.8393	0.8284	0.8246	0.8167	0.9121
20	0.9341	0.9326	0.9316	0.9291	0.9416
25	0.9581	0.953	0.9509	0.946	0.9614
30	0.9645	0.9561	0.953	0.946	0.9674

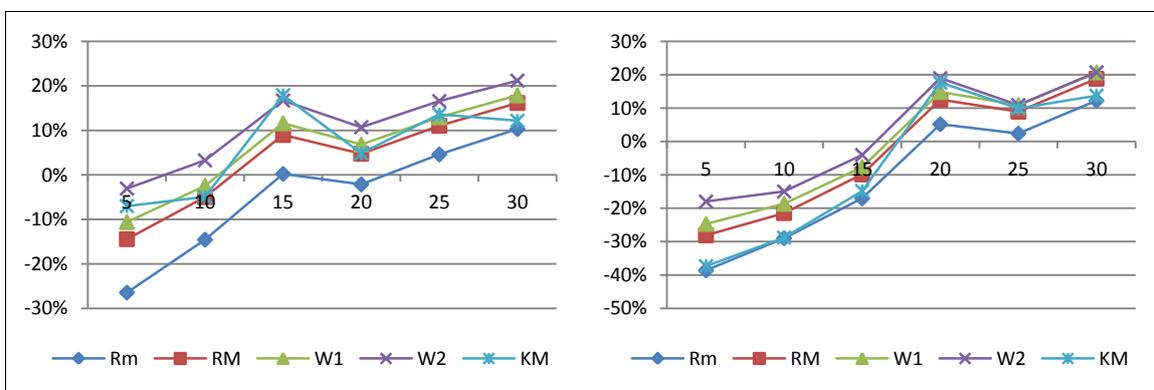
Tabela 8 : Valores do Coeficiente de Eficiência do Método (R^2) para o Lote MC4 para aceitação do Parâmetro de Forma.

Lote	R^2 (Rm)	R^2 (RM)	R^2 (W1)	R^2 (W2)	R^2 (KM)
5	0.8983	0.8352	0.894	0.8914	0.9194
10	0.9481	0.954	0.9561	0.9596	0.9318
15	0.9157	0.928	0.9315	0.968	0.9007
20	0.9577	0.9614	0.962	0.9625	0.9557
25	0.9663	0.969	0.9694	0.9694	0.9734
30	0.9767	0.9745	0.9732	0.9698	0.976
35	0.9738	0.9715	0.9701	0.9665	0.9737
40	0.9734	0.9714	0.9701	0.9665	0.9731

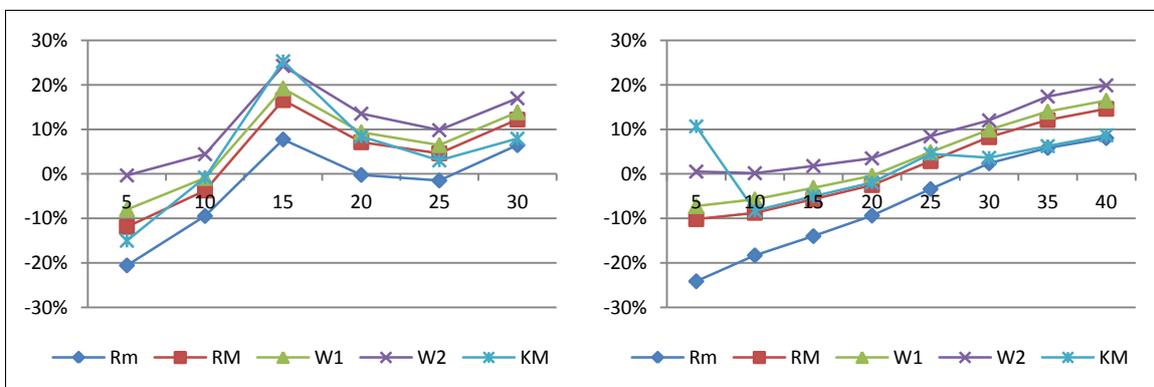


Gráficos 03 e 04: Valores de β , frente ao tamanho do lote, pelos diversos Métodos de Estimadores para MC3 e MC4.

4.2 Erros Percentuais e Médios Quadráticos.



Gráficos 05 e 06: Erros Percentuais do valor de β em relação os valores obtidos pelo EMV para MC1 e MC2.



Gráficos 07 e 08: Erros Percentuais do valor de β em relação os valores obtidos pelo EMV para MC3 e MC4.

Tabela 9: Erros Quadráticos de β , frente ao tamanho do lote, a partir da Fórmula (8) dos Estimadores de Rank em relação ao EMV.

N	MC1					MC2				
	Rm	RM	W1	W2	KM	Rm	RM	W1	W2	KM
5	2.9594	0.8821	0.4752	0.0397	0.2074	6.3044	3.3408	2.5806	1.3690	5.8982
10	0.3226	0.0378	0.0092	0.0162	0.0370	0.9812	0.5379	0.4061	0.2622	0.9680
15	0.0001	0.0853	0.1428	0.2960	0.3392	0.2359	0.0791	0.0480	0.0132	0.1794
20	0.0038	0.0189	0.0391	0.0960	0.0198	0.0063	0.0366	0.0511	0.0837	0.0722
25	0.0148	0.0849	0.1171	0.1922	0.1290	0.0010	0.0134	0.0200	0.0200	0.0166
30	0.0608	0.1500	0.1837	0.2574	0.0851	0.0224	0.0528	0.0640	0.0640	0.0282

Tabela 10: Erros Quadráticos de β , frente ao tamanho do lote, a partir da Fórmula (8) dos Estimadores de Rank em relação ao EMV.

N	MC 3					MC4				
	Rm	RM	W1	W2	KM	Rm	RM	W1	W2	KM
5	3.5165	1.1765	0.5336	0.0010	1.8749	0.1960	0.0348	0.0176	0.0001	0.0384
10	0.3864	0.0605	0.0036	0.0845	0.0029	0.0661	0.0151	0.0065	0.0000	0.0135
15	0.0801	0.3674	0.4941	0.7873	0.8568	0.0354	0.0059	0.0018	0.0006	0.0046
20	0.0000	0.0366	0.0632	0.1323	0.0511	0.0112	0.0008	0.0000	0.0016	0.0005
25	0.0013	0.0122	0.0238	0.0551	0.0052	0.0013	0.0009	0.0026	0.0077	0.0022
30	0.0198	0.0707	0.0913	0.1373	0.0299	0.0005	0.0058	0.0084	0.0123	0.0011
35	NA	NA	NA	NA	NA	0.0026	0.0113	0.0152	0.0234	0.0030
40	NA	NA	NA	NA	NA	0.0047	0.0154	0.0195	0.0285	0.0054

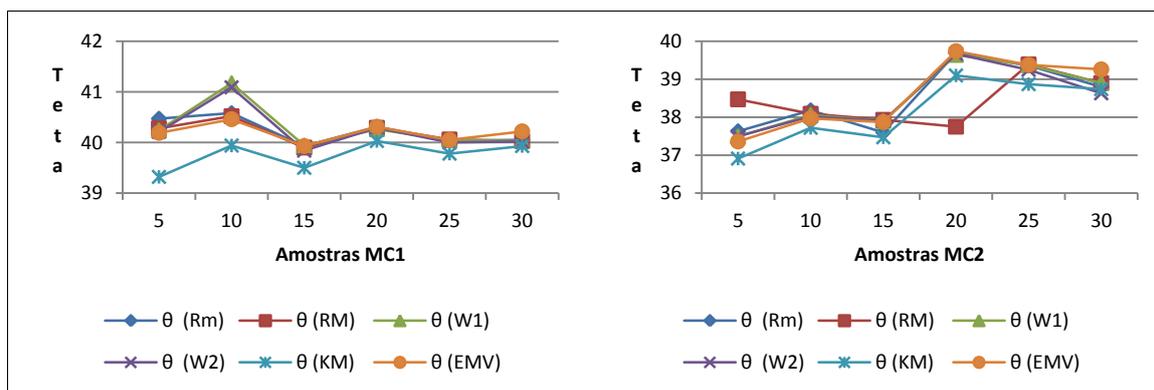
4.1.1 Análise e Discussões:

4.2 Influência dos estimadores de rank no valor do fator de escala (θ)

As Tabelas e Gráficos seguir apresentam os valores de β obtidos empregando-se o método gráfico de probabilidade e cada um dos modelos de Rank apresentados neste trabalho em relação aos sub-lotes de MC1, MC2, MC3 e MC4. Estes, então, são comparados aos resultados obtidos por EMV, que é utilizado como referência na indústria e o mais utilizado na área acadêmica para determinação dos parâmetros de Weibull (Dodson, 2006), na mesma tabela os nomes dos estimadores estão abreviados como Rm para Rank Médio, RM para Rank Mediano, W1 para White1, W2 para White2, KM para Kaplan-Meier e EMV para Máxima Verossimilhança.

Tabela 11 – Valores de θ obtidos pelo Método Gráfico, frente ao tamanho do lote, empregando-se as diversas expressões para o Rank de amostras MC1 e MC2. Na última coluna valores estimados pelo EMV.

N	θ (Rm)		θ (RM)		θ (W1)		θ (W2)		θ (KM)		θ (EMV)	
	MC1	MC2	MC1	MC2								
5	40.47	37.63	40.28	38.47	40.24	37.49	40.21	37.5	39.32	36.91	40.2	37.4
10	40.58	38.18	40.52	38.09	41.17	38.06	41.09	38.02	39.94	37.72	40.5	38
15	39.93	37.6	39.9	37.93	39.94	37.9	39.84	37.9	39.5	37.47	39.9	37.9
20	40.31	39.69	40.29	37.75	40.26	39.64	40.29	39.67	40.03	39.1	40.3	39.7
25	40.04	39.36	40.06	39.39	40.05	39.37	40	39.25	39.78	38.87	40.1	39.4
30	40.05	38.8	40.03	38.9	40.03	38.9	40.02	38.63	39.93	38.74	40.2	39.3

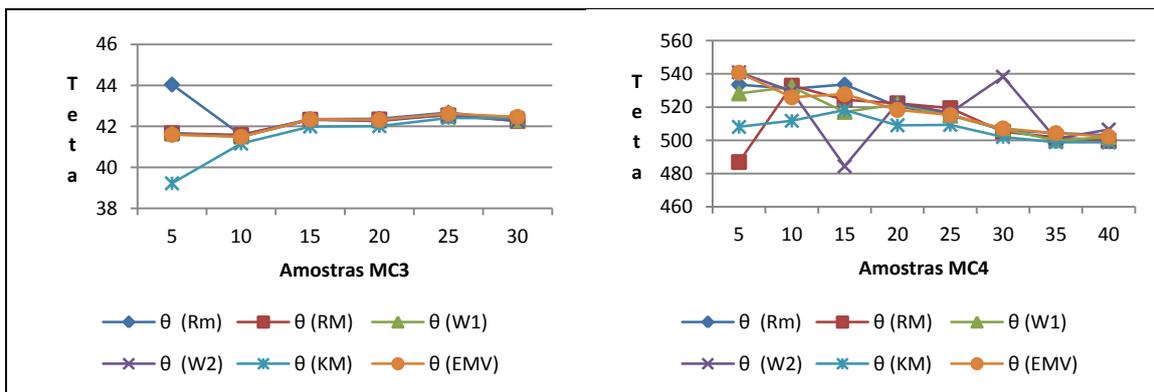


Gráficos 09 e 10: Valores de θ , frente ao tamanho do lote, pelos diversos Métodos de Estimadores para o lote de Amostras MC1 e MC2.

Tabela 12 – Valores de θ obtidos pelo Método Gráfico, frente ao tamanho do lote, empregando-se as diversas expressões para o Rank de amostras MC3 e MC4.

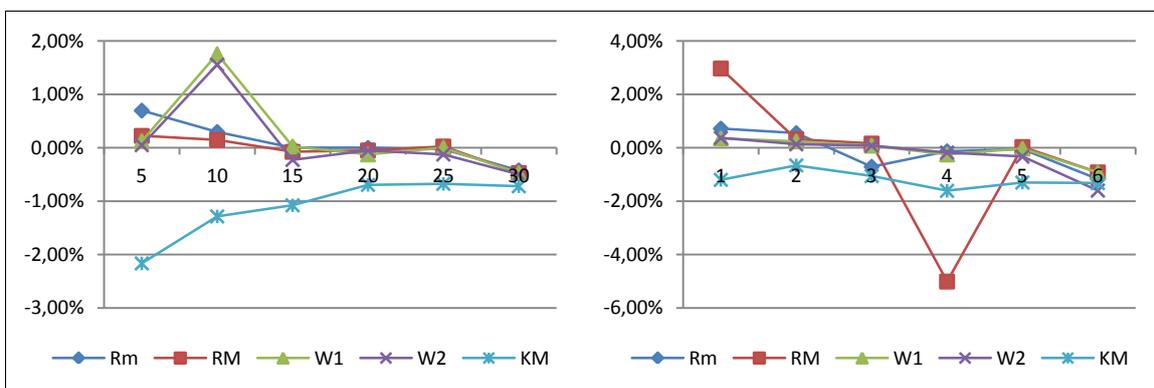
N	θ (Rm)		θ (RM)		θ (W1)		θ (W2)		θ (KM)		θ (EMV)	
	MC3	MC4	MC3	MC4								
5	44.04	533.5	41.67	486.9	41.66	528.2	41.63	540.9	39.22	508.1	41.6	541
10	41.58	531.1	41.58	533	41.5	532.2	41.5	529.5	41.16	511.8	41.5	526
15	42.35	533.6	42.33	524.4	42.34	517.1	42.32	484.4	41.99	518.2	42.3	528
20	42.37	520.4	42.34	522.3	42.28	521.7	42.26	522.2	42.01	509	42.3	518
25	42.67	515.5	42.53	519.4	42.59	514.8	42.57	516.6	42.41	509.3	42.6	515
30	42.31	506.1	42.26	505.1	42.29	506.6	42.26	538.3	42.4	502	42.5	507

35	NA	504.4	NA	501.8	NA	500	NA	500.9	NA	498.8	NA	504
40	NA	503.1	NA	499.6	NA	501.9	NA	506.5	NA	498.8	NA	502

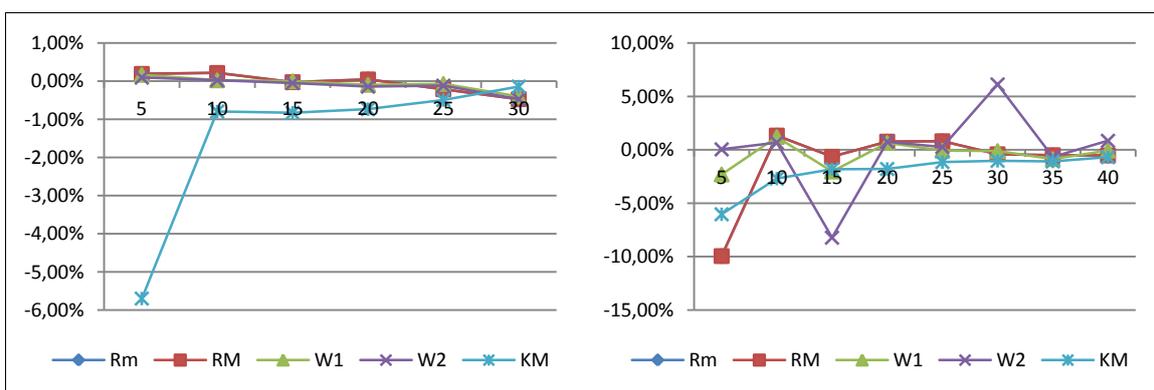


Gráficos 11 e 12: Valores de θ , frente ao tamanho do lote, pelos diversos Métodos de Estimadores para o lote de Amostras MC3 e MC4.

4.2 Erros Percentuais e Quadráticos:



Gráficos 13 e 14: Erro Percentual do valor de θ em relação os valores obtidos pelo EMV para MC1 e MC2.



Gráficos 15 e 16: Variação do valor de θ , frente ao tamanho do lote, em relação os valores obtidos pelo EMV e Distribuições de Rank para MC3 e MC4

Tabela 13: Erros Quadráticos de θ , frente ao tamanho do lote, a partir da Fórmula (8) dos Estimadores de Rank em relação ao EMV.

N	MC1					MC2				
	Rm	RM	W1	W2	KM	Rm	RM	W1	W2	KM
5	0.0078	0.0008	0.0003	0.0000	0.0757	0.0073	0.1232	0.0017	0.0020	0.0203
10	0.0007	0.0002	0.0252	0.0198	0.0135	0.0022	0.0007	0.0004	0.0001	0.0031
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0062	0.0024	0.0001	0.0000	0.0000	0.0053
20	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0020	0.0001	0.0990	0.0003	0.0001	0.0102
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0015	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0052
30	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0014	0.0035	0.0022	0.0022	0.0066	0.0045

Tabela 14: Erros Quadráticos de θ , frente ao tamanho do lote, a partir da Fórmula (8) dos Estimadores de Rank em relação ao EMV.

N	MC 3					MC4				
	Rm	RM	W1	W2	KM	Rm	RM	W1	W2	KM
5	0.6002	0.0006	0.0005	0.0002	0.5617	5.1266	289.2288	15.5750	0.0058	106.4064
10	0.0004	0.0004	0.0000	0.0000	0.0054	1.3261	2.4851	1.9845	0.6337	10.0111
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0041	1.1136	0.3876	3.8163	62.7853	3.0720
20	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001	0.0024	0.1113	0.4000	0.2822	0.3861	2.1437
25	0.0001	0.0002	0.0000	0.0000	0.0009	0.0014	0.3494	0.0027	0.0364	0.6938
30	0.0004	0.0007	0.0005	0.0007	0.0001	0.0194	0.0721	0.0060	16.0994	0.4489
35	NA	NA	NA	NA	NA	0.0001	0.0900	0.2691	0.1642	0.4274
40	NA	NA	NA	NA	NA	0.0095	0.0852	0.0014	0.2279	0.1479

4.2.1 Análise e Discussão

As comparações dos estimadores de rank são realizadas com parâmetros obtidos por EMV frente aos calculados, pode-se notar que para o fator de forma β , o comportamento dos estimadores calculados é praticamente o mesmo do que o EMV para lotes maiores do que 10 unidades. A partir de um número entre 25 e 30 amostras o valor de β tem um melhor comportamento na comparação dos estimadores, ou seja, os erros calculados se aproximam do EMV. Contudo, não tendem a zero. Já para lotes menores do que 10 unidades, existe uma variabilidade grande entre os calculados. Para lotes abaixo de 15 amostras, o melhor estimador de rank aparece o Estimador de White1 e, para lotes maiores do que 15 amostras, o melhor é o Rank Médio (Rm). Verificando-se os Gráficos 01, 02, 03 e 04, podemos inferir que o valor de β calculado pelo Método EMV apresenta uma estabilização mais rápida, em relação aos demais Estimadores de Rank, a partir de N=10. Por outro lado, os estimadores W1, W2 e KM também apresentam o mesmo comportamento. Verifica-se que o Rm se estabiliza rapidamente e, de um modo geral, sendo o estimador de rank que tem o comportamento mais próximo ao do EMV.

De um modo geral, os estimadores têm comportamento parecido ao do EMV, exceto para pequenos lotes $N < 10$, isto sugere que a acurácia de predição aumenta com o número de amostras. Além disto, os gráficos apresentados e erros calculados, indicam as curvas tendem a se estabilizar após 20 amostras e que para um lote dito pequeno (5 a 10 amostras), sendo o estimador W1. Para lotes maiores (15 a 20 amostras), os melhores estimadores são W2 e Rm. Para lotes grandes (25 a 40 amostras), o melhor estimador Rm.

Para a comparação entre os estimadores de Rank e o EMV para os lotes de massas cerâmicas (MC1, MC2 e MC3), os valores do parâmetro escala θ são muito uniformes, logo todos os estimadores de Rank tem comportamento bem próximos com o EMV, diferenciando muito pouco. Para os lotes de pastilhas de revestimento não acontece o mesmo, pois ocorre uma grande dispersão entre os valores da força de ruptura, sendo o estimador W2 melhor para lotes pequenos, e o Rm para lotes grandes.

Observando o comportamento dos valores de θ nos Gráficos 09, 10, 11 e 12, pode-se verificar que os valores da distribuição de Rank não são muito próximos dos valores de EMV para lotes pequenos, já para médios e grandes os valores estão estabilizados. Já,

desconsiderando o tamanho de lote para comparação entre os estimadores, observa-se que W1 possui um comportamento semelhante ao Estimador de Máxima Verossimilhança. Fazendo a comparação entre os estimadores observamos que todos têm um comportamento bem uniforme e a partir de 15 amostras e são praticamente iguais, com exceção do KM, que tem uma pequena diferença. Na tabela 10, vê-se que os estimadores Rm e KM possuem uma pequena diferença em relação ao EMV na comparação do sub-lote de 5 amostras, o que não ocorre com os outros estimadores que são bem estáveis desde o início. No Gráfico 12, observa-se uma grande variação de θ encontrados onde os mesmos estabilizam para lotes grandes nos estimadores Rm, RM, W1 e no EMV. Nos Gráficos 15 e 16, estão os desvios dos estimadores utilizados calculado usando-se a expressão (26) em relação ao EMV, para as amostras do lote de pastilhas e o estimador de Rank que mais se aproxima do EMV no geral, desconsiderando tamanho de lote é o W1.

Como pode ser observado nos Gráficos 09 e 10, para o lote de amostras MC1 e MC2, os valores dos estimadores de θ são bem próximos dos EMV, tanto para lotes pequenos quanto para lotes grandes, como uma pequena diferença o estimador de KM é o que fica mais distante do EMV. Para o lote de amostras MC2, os estimadores Rm, W1 e W2, são os que mais se aproximam do EMV.

As tabelas 13 e 14, os Erros Médios Quadráticos demonstram a influência da escolha do Rank e o tamanho do lote no valor θ . Verifica-se que todos os estimadores obtiveram valores bem próximos do EMV, exceto para MC4 e não é possível afirmar qual dos estimadores é o melhor, pois tanto para lotes pequenos, quanto para lotes grandes todos são bem próximos.

5 CONCLUSÃO

Apesar do Método Gráfico não ser o mais acurado do que outros métodos, fornece uma ótima possibilidade de visualização do comportamento, em comparação com o EMV, podemos concluir que:

- 1) As diversas formulações apresentadas geram beta menor com menor variação para lotes menores e maior, para lotes maiores.
- 2) Quanto maior é o valor do parâmetro de forma β maior é acurácia, ou seja, a dispersão tende a ser menor, facilitando para que a curva da Distribuição de Weibull tenha a forma de pico. Por outro lado, quanto menor este mesmo fator de forma maior é a dispersão encontrada.
- 3) O modelos de rank utilizados possuem uma maior influência na determinação do fator de forma β do que no fator de escala θ , pois representa a propriedade característica, ou seja, Tensão de Ruptura. Isto pode ser explicado pelo fator de forma β ser o parâmetro que determina e quantifica a dispersão para a propriedade do material. Deste modo, torna-se vulnerável quando da remoção ou introdução de amostras nos lotes estudados.
- 4) Observa-se que os fatores de β e θ sempre que apresentam dispersão mais alta entre os seus valores, o comportamento de Rm (Rank médio) tende a ser melhor para lotes pequenos e o comportamento de White 2, para lotes maiores e grandes, ao contrário do RM (Rank Mediano) como prevê a literatura, comprovando que não existe um Estimador de Rank ideal, ou seja, ele varia com o processo.
- 5) Para lotes que apresentem propriedades muito dispersivas, caso a estimativa de parâmetros seja feita pelo Método Gráfico, recomenda-se empregar o Método de White 1. Assim, dependendo da dispersão encontrada na grandeza estudada, é necessário que sejam empregados grandes lotes para a correta caracterização da mesma.

- 6) Este trabalho possui a restrição de não ter sido verificado a existência do parâmetro de localização diferente de 0, bem como sugere a realização de novos trabalhos com arquivos gerados aleatoriamente para a verificação do possível novo comportamento de beta e teta. Também se apresenta como outra limitação do trabalho, o não uso de outros estimadores de Rank para que seus resultados também possam ser confrontados e corroborar, ou não, os resultados encontrados.

Referências:

- AL-FAWZAN, M.A.** *Methods for Estimating the Parameters of the Weibull Distribution.* King Abdulaziz City for Science and Technology. (2000).
- ASKELAND, D.R. PHULÉ, P.P.** *The Science of Engineering of Materials, 5th Ed.* Thomson Engineering. 380p. (2005)
- BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A.** *Estatística Básica. 5^a Ed.* Editora Saraiva. São Paulo. 521p. (2006)
- CARVALHO, E.A.** *Avaliação da Influência do Fator de Localização e Rank Mediano no Valor do Módulo de Weibull em Materiais Frágeis.* 62^o Congresso Anual da ABM. 23 a 27 de julho, Vitória (ES). (2007)
- DODSON, B.** *The Weibull Analysis Handbook. 2nd Ed.* ASQ Quality Press. (2006)
- FREIRE, M.N.** *Uso de Matéria-Primas Argilosas do estado do Rio de Janeiro em massas cerâmicas para porcelanato: Formulação, propriedades físicas e microestrutura.* Tese de Doutorado (Engenharia e Ciências de Materiais) – Campos dos Goitacazes – RJ. Universidade Estadual do Norte-Fluminense – UENF. 150pp. (2007)
- GARCIA, A.; SPIM, J. A.; Dos SANTOS** *Ensaio dos Materiais. LTC.* Rio de Janeiro. 247pp. (2000)
- KAPUR, K.C., LAMBERSON** *Reliability in Engineering Design.* John Wiley & Sons, pag.22: 301. 2^a Ed. (1977)
- KIRTAY, S.; DISPINAR, D.** *Effect of Ranking Selection on the Weibull Modulus Estimation.* Gazi University Journal of Science, GU J Sci 25(1):pp175-187. (2012)
- LAFFRAIA, J. R. B.** *Manual de Confiabilidade, Manutenibilidade e Disponibilidade – Rio de Janeiro.* Ed. Qualitymark. Petrobras. 388p. (2001)
- LINO, F.** *Caracterização da Distribuição de Weibull em Ambientes Indoor.* Dissertação de Mestrado (Engenharia Elétrica) – Campinas – SP. Pontifícia Universidade Católica – PUC. 79pp. (2008)
- ROCHA, P.A.C; De SOUZA, R.C.; De ANDRADE, C. F. e Da SILVA, M.E.V.** *Comparison of seven numerical methods for determining Weibull parameters for wind energy in northeast region of Brazil.* Applied Energy. v.89 pp 395-400. (2012)
- SKINNER, K.R.; KEATS, J.B.; ZIMMER, W.J.** *A Comparison of Three Estimators of the Weibull Parameters.* Quality and Reliability Engineering International. 17: pp 249-256. (2001)
- SOUZA, F.M.; PEREIRA, M.B.; SILVA, P. O. K.** *Aspectos Computacionais na Estimação dos Parâmetros da Distribuição de Weibull.* International Journal of Research in IT, Management and Engineering IJRIME. Volume2, Issue1. (2011)
- YAHAYA, A.S; YEE, C.S; RAMLI, N.A. and AHMAD, F.** *Determination of Best Probability Plotting Position for Predicting Parameters of Weibull Distribution.* International Journal of Applied Science and Technology. Vol.2 n3. March. (2012)