

MODELAGEM COMPUTACIONAL APLICADA À FLAMBAGEM ELÁSTICA DE COLUNAS PERFURADAS

Renata C. de A. Alonso (Universidade Federal do Rio Grande - FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional).

E-mail: renatalonso@yahoo.com.br

Diego S. de Lima (Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Escola de Engenharia).

E-mail: diegosouzalima@hotmail.com

Matheus Gomes (Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Escola de Engenharia).

E-mail: gomes_galz@hotmail.com

Mauro de V. Real (Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica).

E-mail: mauroreal@furg.br

Elizaldo D. dos Santos (Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica).

E-mail: elizaldosantos@furg.br

Liércio A. Isoldi (Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica).

E-mail: liercioisoldi@furg.br

Resumo: Elementos longos e esbeltos sujeitos a uma força axial de compressão são chamados de colunas e a deflexão lateral que sofrem é chamada de flambagem elástica. Em geral a flambagem leva a uma falha abrupta da estrutura. A carga axial máxima que uma coluna pode suportar antes de ocorrer a flambagem é chamada de carga crítica e qualquer carga adicional provocará flambagem na coluna. O objetivo desse trabalho foi avaliar numericamente a influência da retirada de 15% do volume de uma coluna em sua carga crítica de flambagem. Para isso, perfurações circulares, distribuídas em diferentes arranjos foram consideradas. Como essa coluna é um perfil metálico S610×149, as perfurações foram realizadas em sua alma. Os valores de carga crítica obtidos numericamente foram comparados com a carga crítica do perfil sem perfurações. O software ANSYS, que é baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), foi adotado para as simulações numéricas, empregando o elemento SHELL93. A coluna foi considerada engastada-livre e birrotulada. O modelo computacional foi devidamente verificado, apresentando diferenças inferiores a 5% quando comparado às soluções analíticas. Os resultados obtidos para os casos estudados mostraram que a carga crítica para uma coluna perfurada não foi afetada de maneira significativa, indicando a possibilidade de redução de peso total da estrutura, sem redução em sua capacidade de carga.

Palavras-chave: Flambagem, Colunas, Carga Crítica, Simulação Numérica.

COMPUTATIONAL MODELING APPLIED TO ELASTIC BUCKLING OF PERFORATED COLUMNS

Abstract: Long and slender members subjected to a compressive axial force are known as columns and the lateral deflection which they can suffer is called elastic buckling. In general the buckling leads to an abrupt failure of the structure. The maximum axial load that a column can withstand before the buckling occurs is called the critical load and any additional load on the column will cause buckling. The aim of this study was to numerically evaluate the influence on the critical buckling load of the withdrawal of 15% of the volume of a column. For this, circular perforations distributed in different arrangements were considered. As this column is a S610 × 149 steel structural shape, the perforations were made in his web. The numerical values obtained for the critical load were compared with the critical load of the column without perforations. The ANSYS software, which is based on the Finite Element Method (FEM), was adopted for the numerical simulations, using the SHELL93 element. The column was considered clamped-free and pinned-pinned. The computational model was duly verified, with differences below 5% when compared to analytical solutions. The results obtained for the studied cases showed that the critical load for a perforated column was not significantly affected, indicating the possibility of total weight reduction of the structure, with no reduction in their carrying capacity.

Keywords: Buckling, Columns, Critical Load, Numerical simulation.

1. INTRODUÇÃO

Sempre que se projeta um elemento estrutural, é necessário que ele satisfaça requisitos específicos de resistência, deflexão e estabilidade (Hibbeler, 2010). O foco desse trabalho está relacionado a um fenômeno de instabilidade estrutural chamado flambagem. Uma estrutura elástica estável será submetida a deslocamentos proporcionais ao carregamento aplicado: um pequeno aumento no carregamento ocasionará um pequeno aumento no deslocamento. Portanto a instabilidade estrutural acontece quando um pequeno incremento no carregamento causa um grande deslocamento na estrutura (Galambos, 2008).

Em elementos estruturais sujeitos à compressão, sendo estes esbeltos e compridos, a carga poderá ser grande o suficiente para provocar uma deflexão lateral: a flambagem. A flambagem de uma coluna pode resultar na falha repentina de uma estrutura ou mecanismo e por isso deve-se evitar que esse fenômeno de instabilidade estrutural aconteça (Hibbeler, 2010). Para isso é necessário conhecer a carga crítica de flambagem da coluna, que pode ser entendida como a carga axial máxima que o componente estrutural pode suportar quando está na iminência de flambar, ou seja, qualquer carga adicional provocará deflexão lateral.

Sabe-se que a carga crítica de uma coluna pode ser determinada através de métodos experimentais, analíticos e numéricos. Nesse trabalho é apresentado um modelo numérico, desenvolvido no software ANSYS (baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF)), que foi verificado a partir da comparação de seus resultados com os obtidos analiticamente. Para esse processo de verificação foi considerada uma coluna sem perfurações, uma vez que não existem soluções analíticas para o cálculo da carga crítica de colunas que possuam perfurações.

Então, usando esse modelo numérico verificado, o objetivo do presente trabalho é avaliar a influência, na carga crítica de flambagem, de perfurações distribuídas ao longo de uma coluna. Para isso, o volume de material retirado da coluna foi mantido constante e várias propostas para a distribuição das perfurações foram consideradas.

2. FLAMBAGEM DE COLUNAS

As colunas esbeltas quando submetidas à compressão estão sujeitas à ocorrência de um tipo de comportamento mecânico conhecido como flambagem. Enquanto a carga sobre esse componente é relativamente pequena, a coluna fica submetida a uma tensão de compressão e, conseqüentemente, a uma deformação axial. Porém, existe um valor crítico para esse carregamento de compressão no qual a coluna repentinamente sofre uma deflexão lateral, ocorrendo a flambagem e dando origem a grandes deformações que causam o colapso da coluna. Portanto, essa carga crítica, a partir da qual a flambagem ocorre, é um critério de projeto que deve ser considerado para colunas, uma vez que a intensidade dessa carga normalmente é muito menor que a necessária para atingir a tensão de escoamento do material (Chajes, 1974). Em outras palavras, de acordo com Hibbeler (2010), a carga crítica é a carga axial máxima que uma coluna pode suportar antes de ocorrer a flambagem. Qualquer carga adicional provocará flambagem na coluna, conforme mostra a Figura 1.

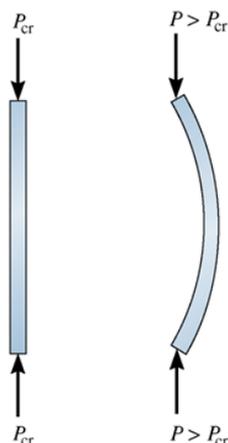


Figura 1 - Coluna sob Flambagem (Hibbeler, 2010).

É possível definir a carga crítica para uma coluna ideal com apoios de pinos ou birrotulada, conforme indicado na Figura 2. A carga P , Figura 2a, poderia ser aumentada até que o limite de escoamento ou de ruptura do material do qual a coluna é fabricada fosse alcançado. Entretanto, quando a carga crítica P_{cr} é atingida, a coluna está no limite de tornar-se instável. Qualquer pequena redução de P para um valor menor que P_{cr} permite que a coluna fique reta e qualquer aumento de P para um valor maior que P_{cr} , provoca aumento adicional da deflexão lateral. O fato de a coluna permanecer estável ou tornar-se instável, quando submetida à carga axial de compressão, depende de sua habilidade de restauração que, por sua vez, é baseada em sua resistência à flexão.

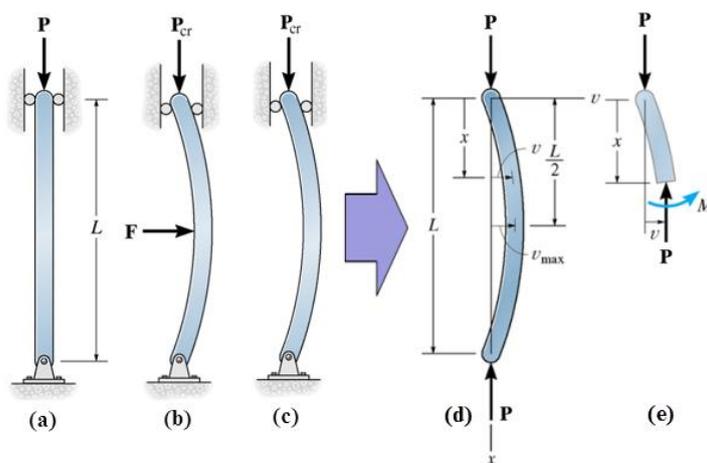


Figura 2 - Flambagem de uma coluna com apoios de pinos (Hibbeler, 2010).

Então, para determinar a carga crítica e a forma de flambagem da coluna, é necessário aplicar a equação diferencial da linha elástica que relaciona o momento fletor interno da coluna, Figura 2e, e sua forma fletida, Figura 2d:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = -Pv \quad \text{ou} \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{Pv}{EI} = 0 \tag{1}$$

onde “ E ” é o módulo de elasticidade do material da coluna (N/m^2); “ I ” é o momento de inércia da seção transversal da coluna (m^4); “ M ” é o momento fletor interno na coluna ($\text{N}\cdot\text{m}$), obtido através do método das seções, Figura 2e; “ P ” é carga aplicada na coluna (N); e “ v ” é deflexão lateral da coluna (m). A equação (1) é uma equação diferencial homogênea de

segunda ordem com coeficientes constantes. Sua solução geral é dada por:

$$v = C_1 \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) \tag{2}$$

sendo " C_1 " e " C_2 " constantes de integração determinadas pelas condições de contorno nas extremidades da coluna, Figura 2a, que são: $v = 0$ em $x = 0$, obtendo $C_2 = 0$; e $v = 0$ em $x = L$ definindo:

$$v = C_1 \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) \tag{3}$$

A solução trivial para a equação (3) seria $C_1 = 0$, porém, nesse caso, a deflexão seria nula ($v = 0$) para qualquer carga P aplicada. Por isso, é necessário impor uma solução não trivial:

$$\operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0 \tag{4}$$

A equação (4) é satisfeita se:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = n\pi \quad \text{ou} \quad P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{5}$$

Na equação (5) o menor valor de P é obtido para $n = 1$, definindo a carga crítica para uma coluna birrotulada, também chamada de carga de Euler, que é dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{6}$$

Se um procedimento análogo ao empregado na determinação da carga crítica de Euler for usado para colunas com outros tipos de condição de vinculação em suas extremidades, é possível obter analiticamente suas cargas críticas. Na Figura 3 são apresentadas diferentes condições de vinculação para uma coluna e suas respectivas equações para a carga crítica.

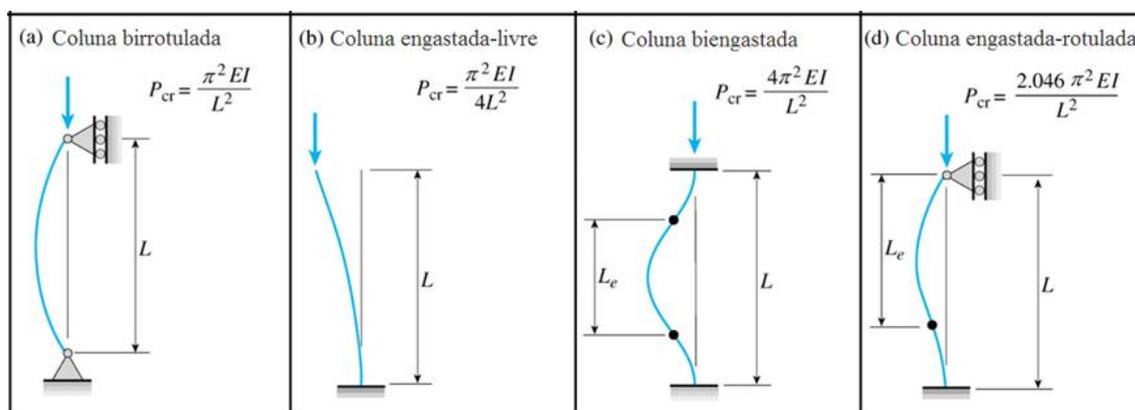


Figura 3 - Carga crítica em colunas com diferentes tipos de condição de vinculação (Gere, 2009).

3. MODELAGEM COMPUTACIONAL

No modelo numérico desenvolvido para a flambagem elástica de colunas, foi escolhido para a discretização do domínio computacional o elemento do tipo casca fina SHELL93, Figura 4. Esse elemento possui oito nós e integração reduzida, tendo seis graus de liberdade por nó: três translações nas direções dos eixos x , y e z e três rotações em torno dos eixos x , y e z (ANSYS, 2005).

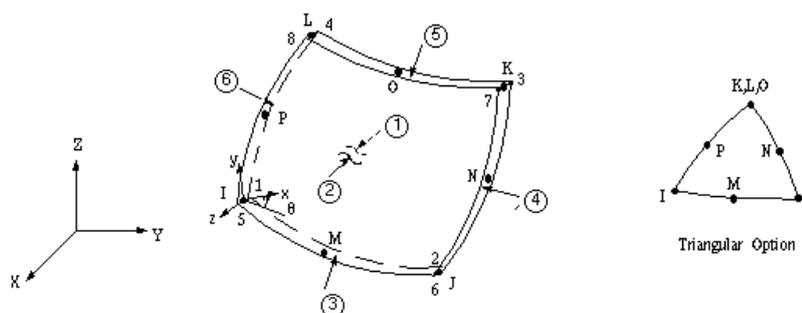


Figura 4 - Elemento SHELL93 (ANSYS, 2005).

O domínio computacional deve possuir o mesmo comprimento da coluna a ser analisada, e a geometria e as dimensões da seção transversal da coluna deverão ser representadas por superfícies. Deve-se ainda informar a espessura das paredes da coluna, ou seja, a espessura que será considerada no elemento SHELL93, através do comando *Real Constants*. E como existem vários nós localizados nas extremidades do domínio computacional, as condições de contorno e as cargas devem ser aplicadas individualmente a cada um desses nós.

Além disso, foi adotada a análise elástica através de autovalores. As equações de equilíbrio por elementos finitos para este tipo de análise envolvem a solução de equações algébricas homogêneas cujo autovalor mais baixo corresponde à carga crítica de flambagem e o autovetor associado representa o modo primário de flambagem (Madenci e Guven, 2006).

A formulação utilizada na análise numérica inclui tanto os termos lineares como os não-lineares. Assim, a matriz de rigidez total $[K]$, é obtida pela soma da matriz de rigidez convencional para pequenas deformações, $[K_E]$, com a matriz de rigidez geométrica, $[K_G]$. A matriz $[K_G]$ depende não só da geometria, mas também do esforço interno existente no início do carregamento, $\{P_0\}$. Então, a matriz de rigidez total da coluna para um nível de carga $\{P_0\}$ pode ser escrita como (Madenci e Guven, 2006):

$$[K] = [K_E] + [K_G] \tag{7}$$

Quando a carga atinge o nível de $\{P\} = \lambda\{P_0\}$, onde “ λ ” é um escalar, a matriz de rigidez pode ser definida como:

$$[K] = [K_E] + \lambda[K_G] \tag{8}$$

As equações de equilíbrio governantes para a coluna podem ser escritas como:

$$[[K_E] + \lambda[K_G]]\{U\} = \lambda\{P_0\} \tag{9}$$

sendo $\{U\}$ o vetor de deslocamento total, que pode, portanto, ser determinado por:

$$\{U\} = [[K_E] + \lambda[K_G]]^{-1} \lambda\{P_0\} \tag{10}$$

Na flambagem, o componente estrutural apresenta um grande crescimento nos deslocamentos sem crescimento da carga. Por definição matemática é possível determinar a matriz inversa como a matriz adjunta dividida pelo determinante dos coeficientes, então os deslocamentos $\{U\}$ tendem a infinito quando:

$$\det[[K_E] + \lambda[K_G]] = 0 \tag{11}$$

A equação (11) representa um problema de autovalores, que quando resolvido gera o menor autovalor, que corresponde à carga crítica $\{P_{cr}\} = \lambda_1\{P_0\}$ em que ocorre flambagem. Além disso, o vetor de deslocamento associado $\{U\}$ define a forma do modo de flambagem. O problema de autovalores é resolvido usando o método numérico de Lanczos (ANSYS, 2005).

3.1 Teste de convergência de malha e verificação do modelo computacional

O perfil laminado S610×149 de aço A-36, que possui tensão de escoamento $\sigma_y = 250$ MPa, módulo de elasticidade $E = 210$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, foi adotado, Figura 5.

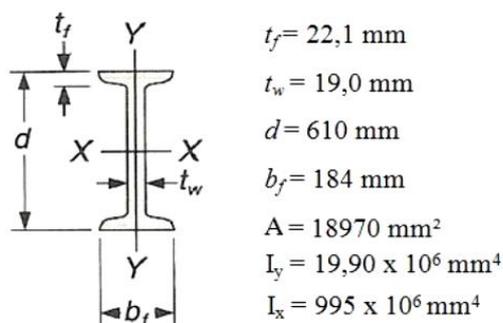


Figura 5 - Perfil metálico S610×149 (Beer e Johnston, 1995).

Na Figura 5 são apresentadas as dimensões da espessura da aba " t_f ", espessura da alma " t_w ", altura " d " e largura da aba " b_f " do perfil, assim como os valores da sua área de seção transversal A e dos seus momentos de inércia em relação aos eixos x e y , " I_x " e " I_y ", respectivamente. Para o teste de convergência de malha esse perfil foi considerado como uma coluna engastada-livre com comprimento $L = 2$ m. Na Figura 6 são apresentados os resultados numéricos para o teste de convergência de malha, relacionando o valor da carga crítica com o número de elementos finitos triangulares da malha em cada caso.

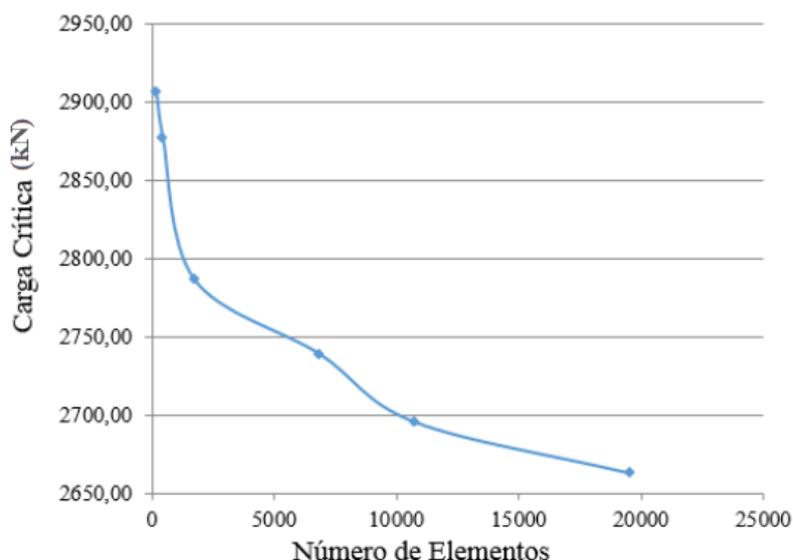


Figura 6 - Teste de convergência de malha.

Observando a Figura 6 é possível notar uma tendência que a partir de 10734 elementos ocorra uma diminuição da variação do valor da carga crítica. Sendo assim, essa malha, que foi gerada com elementos finitos triangulares, com dimensão máxima de 0,02 m, foi considerada como convergida.

Então, para a verificação do modelo computacional desenvolvido foi comparado o resultado numérico para a carga crítica obtido com a malha convergida ($P_{cr} = 2695,70$ kN) com o resultado analítico ($P_{cr} = 2577,83$ kN), dado pela Figura 3(b), encontrando uma diferença de 4,55%. Além disso, usando a malha convergida, foi simulada numericamente também a condição de vinculação birrotulada para a coluna, obtendo $P_{cr} = 10680,00$ kN. Esse valor quando comparado à solução analítica ($P_{cr} = 10311,32$ kN), que é definida conforme a equação (6), apresentou uma diferença de 3,58%. Portanto, é possível afirmar que o modelo numérico foi devidamente verificado.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foi desenvolvido um estudo de caso onde o perfil laminado usado para a verificação do modelo computacional Figura 5 foi adotado. Porém, para o estudo de caso, uma determinada quantidade de material foi retirada do perfil através de perfurações localizadas na alma do mesmo. Para isso, a variável fração de volume foi definida como:

$$\phi = \frac{V_{removido}}{V_{total}} \quad (11)$$

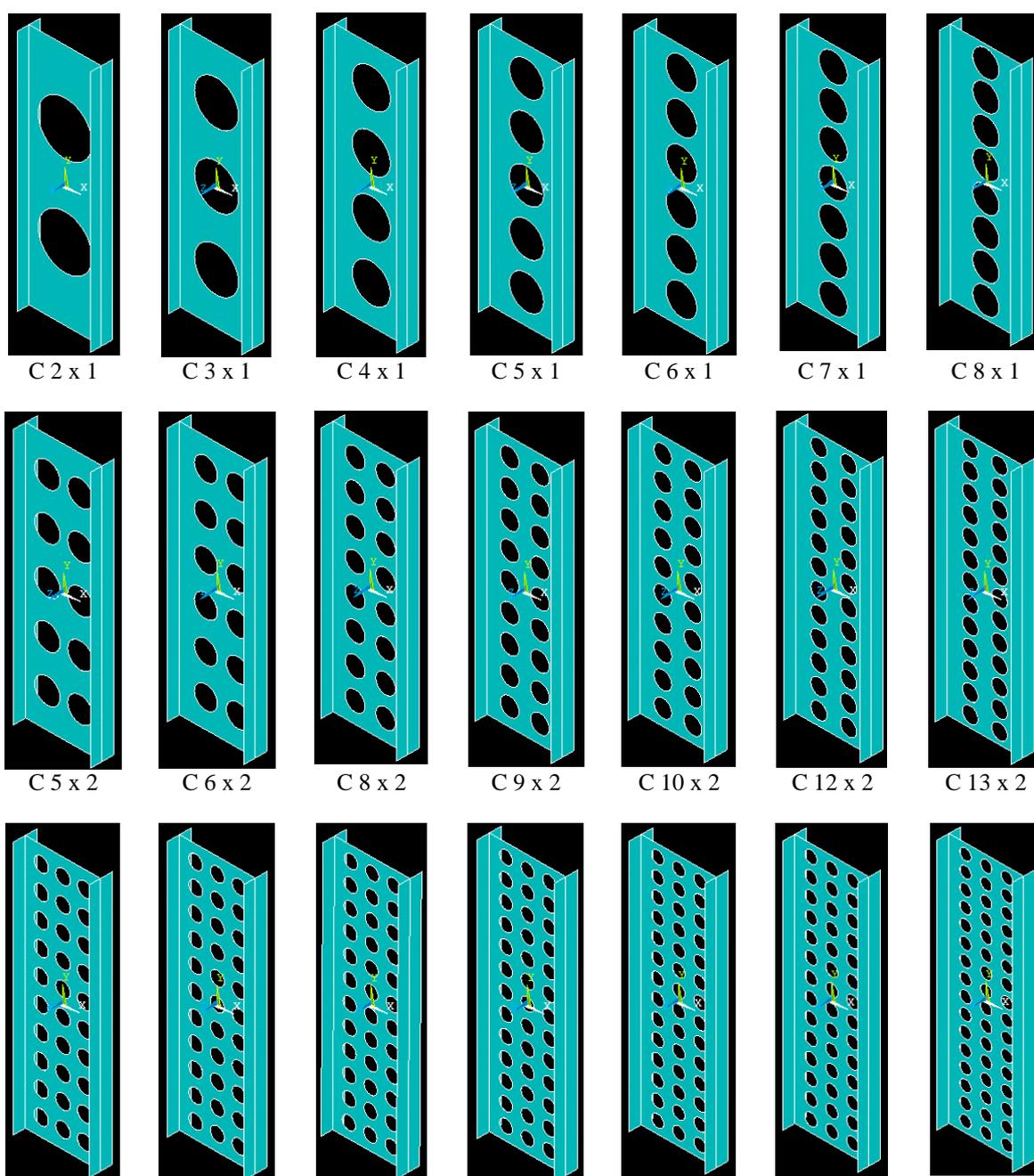
onde: ϕ é a fração de volume retirada de material, $V_{removido}$ é o volume de material removido e V_{total} é o volume total do perfil. Um valor de $\phi = 0,15$ foi adotado, representando uma subtração de material de 15%.

A partir da definição de ϕ foram propostas várias combinações de furos circulares na alma do perfil, conforme mostrado na Figura 7. Os furos circulares foram distribuídos em uma matriz linha por coluna, conforme o código abaixo de cada caso.

Então, todos os casos propostos na Figura 7 foram simulados numericamente, visando avaliar a influência das perfurações em seu comportamento mecânico quando submetidos à flambagem elástica. Como em todos os casos da Figura 7 a quantidade de material retirada é a mesma ($\phi = 0,15$), é possível, ainda, fazer uma comparação entre os mesmos. Para isso, as vinculações engastada-livre e birrotulada foram novamente consideradas, e uma carga crítica adimensional foi calculada:

$$P_{cr,adm} = \frac{P_{cr,cp}}{P_{cr,sp}} \tag{12}$$

onde: $P_{cr,cp}$ é a carga crítica numérica da coluna com perfurações e $P_{cr,sp}$ é a carga crítica numérica da coluna sem perfurações.



C 10 x 3

C 11 x 3

C 12 x 3

C 13 x 3

C 14 x 3

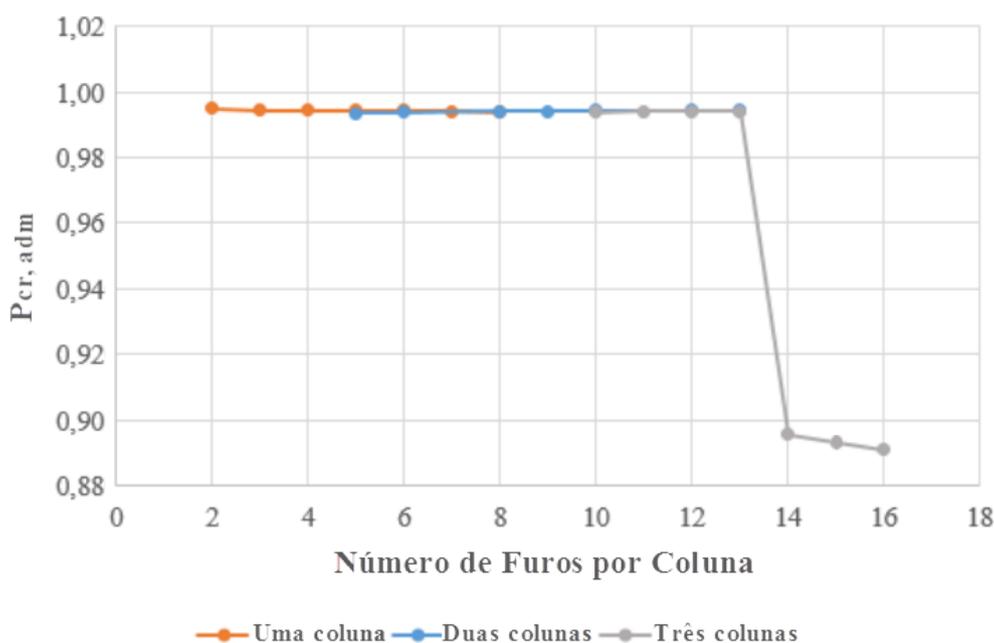
C 15 x 3

C 16 x 3

Figura 7 - Casos propostos considerando $\phi = 0,15$.

Com isso, na Figura 8, são apresentados os valores para a carga crítica adimensional em função do número de furos em cada coluna e do número de colunas com furos, para a vinculação engastada-livre da coluna.

Analisando a Figura 8, nota-se que para os casos com uma ou duas colunas de furos, independentemente da quantidade de furos por coluna, os valores de carga crítica adimensional foram muito semelhantes e aproximadamente iguais a 0,99. Nestes casos, mesmo com uma redução de 15% de material do perfil, não correu uma diminuição significativa de sua carga crítica. Essa mesma tendência foi observada para os casos com três colunas de furos, contendo 10, 11, 12 e 13 furos por coluna. Porém, para os casos com três colunas de furos e com 14, 15 e 16 furos por coluna, ocorreu uma maior redução no valor da carga crítica adimensional, chegando a valores em torno de 0,89.

Figura 8 - Resultados para $\phi = 0,15$ e vinculação engastada-livre.

Por fim, na Figura 9, são mostrados os resultados obtidos para a carga crítica adimensional para o perfil como vinculação birrotulada, para os casos apresentados na Figura 7.

É possível observar na Figura 9 uma tendência diferente da indicada na Figura 8. Para a vinculação birrotulada para a coluna, foram encontrados diversos casos onde a carga crítica da coluna com perfurações atingiu valores superiores ao da carga crítica da coluna sem perfurações, ou seja, valores superiores à unidade foram obtidos para a carga crítica adimensional. Esse comportamento mecânico é análogo ao que acontece em placas perfuradas quando submetidas à flambagem elástica, conforme observado em: Real e Isoldi (2011), Rocha et al. (2012), Isoldi et al. (2013) e Rocha et al. (2013). Além disso, de uma maneira geral, pode-se notar que o aumento do número de furos por coluna conduz a uma diminuição no valor da carga crítica do perfil. A exceção acontece para os casos com três colunas de furos, com 15 e 16 furos por coluna.

É importante destacar que os resultados apresentados nas Figuras 8 e 9 foram obtidos através de um procedimento numérico que considera um comportamento linear-elástico para o

material. Portanto, esses resultados são válidos somente para valores de carga crítica que não causem uma tensão crítica superior à tensão de escoamento do material.

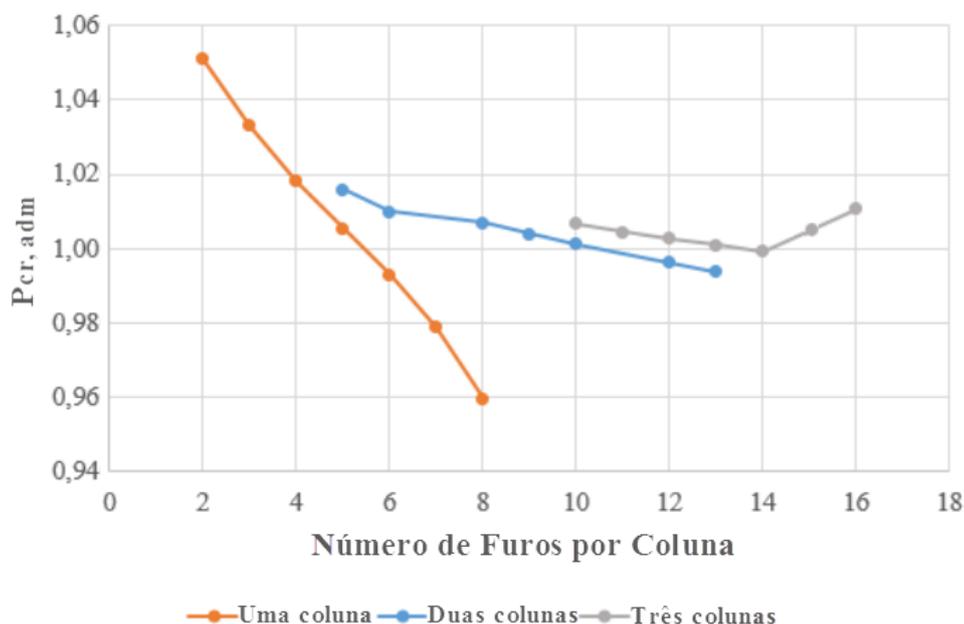


Figura 9 - Resultados para $\phi = 0,15$ e vinculação birrotulada.

5. CONCLUSÕES

A grande utilização de perfis metálicos nos mais diversos setores da engenharia, principalmente em aplicações navais e oceânicas, associada à constante necessidade de otimização de espaço e de peso em uma estrutura, serviu como motivação para avaliar a influência causada pela remoção de material ao longo da alma do perfil em sua carga crítica de flambagem.

Observou-se que a retirada de uma quantidade referente à 15% do volume total de material do perfil, realizada através de perfurações de formato circular dispostas em sua alma, de um modo geral, não causou uma redução significativa na carga crítica do mesmo. Isso ocorreu tanto para a vinculação engastada-livre como na birrotulada. Além disso, na vinculação birrotulada foi obtido um valor de carga crítica superior ao da placa sem perfurações e, sem retirada de material, em vários dos casos propostos.

Notou-se, também, a importância de avaliar a geometria de um problema de engenharia: no caso com vinculação birrotulada, considerando as perfurações circulares dispostas em uma única coluna, foi alcançada uma diferença de mais de 11 % na carga crítica do perfil, quando comparados o melhor e o pior caso, apenas variando o número de furos na alma do perfil.

De uma maneira geral, com base nos casos estudados, ficou constatado que o aumento do número de perfurações em cada coluna conduz a uma diminuição da capacidade do elemento estrutural de resistir à flambagem elástica, ou seja, uma diminuição da carga crítica.

REFERÊNCIAS

ANSYS. *Ansys User's Manual* (version 10.0), Swanson Analysis System Inc, Houston, 2005.

BEER, F.P. E JOHNSTON, E.R. *Resistência dos Materiais*. Pearson Makron Books, São Paulo, 1995.

CHAJES, A. *Principles of Structural Stability Theory*. Prentice Hall, New Jersey, 1994.

GALAMBOS, T.V. *Structural Stability of Steel: Concepts and Applications for Structural Engineers*. John Wiley & Sons, New York, 2008.

GERE, J.M. *Mecânica dos Materiais*. Cengage Learning, São Paulo, 2009.

HIBBELER, R.C. *Resistência dos Materiais*. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2010.

ISOLDI, L.A.; REAL, M.V.; CORREIA, A.L.G.; VAZ, J.; SANTOS, E.D. DOS E ROCHA, L.A.O. "Flow of Stresses: Constructal Design of Perforated Plates Subjected to Tension or Buckling". In: *Constructal Law and the Unifying Principle of Design* - Rocha, L. A.O.; Lorente, S.; Bejan, A.. (Org.). Understanding Complex Systems. Springer, New York, v. 1, p. 195-217, 2013.

MADENCI, E. E GUVEN, I. *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®*. Springer, New York, 2006.

REAL, M.V. E ISOLDI, L.A. "Effect of Circular Holes Dimension and Location on the Elastic Buckling Load of Rectangular Plates". In Proceedings of 21st COBEM - Brazilian Congress of Mechanical Engineering. UFRN, Natal, Brasil, 2011.

ROCHA, L.A.O.; REAL, M.V.; CRREAIA, A.L.G.; VAZ, J.; DOS SANTOS, E.D.; ISOLDI, L.A. "Geometric Optimization Based on the Constructal Design of Perforated Thin Plates Subject to Buckling". *Computational Thermal Sciences*, Vol. 4, pp. 119-129, 2012.

ROCHA, L.A.O.; ISOLDI, L.A.; REAL, M.V.; DOS SANTOS, E.D.; CORREIA, A.L.G.; BISERNI, C.; LORENZINI, G. "Constructal Design Applied to the Elastic Buckling of Thin Plates with Holes. *Central European Journal of Engineering*", Vol. 3, pp. 475-483, 2013.