

MODELAGEM COMPUTACIONAL DA RUPTURA DE BARRAGEM

Valmei Abreu Júnior, UFPR, valmeijr@gmail.com
Liliana Madalena Gramani, UFPR, l.gramani@gmail.com
Eloy Kaviski, UFPR, eloy.dhs@ufpr.br

Resumo: A Dinâmica dos Fluidos Computacional tem conseguido avanços consideráveis na modelagem de fenômenos físicos. Esses avanços podem ser contabilizados em função do aprimoramento das técnicas e esquemas numéricos e, também, do aumento da capacidade de processamento dos computadores. Dentre os fenômenos físicos que se destacam na modelagem computacional está a ruptura de barragem, pois ele pode prever os impactos causados pelo rompimento de uma barragem real e, até mesmo, validar a implementação de códigos computacionais. Partindo dessas proposições, o presente trabalho modela, computacionalmente, a ruptura de uma barragem hipotética utilizando o Método das Diferenças Finitas Explícito, associado ao esquema difusivo de Lax-Friedrichs. A fim de evitar soluções espúrias, constrói, a partir das equações de Euler, um modelo unidimensional equivalente ao de águas rasas, cuja solução, via Método das Características, serve de condições iniciais à abordagem numérica.

Palavras-chave: Ruptura de Barragem, Diferenças Finitas, Método das Características, Esquema de Lax-Friedrichs.

COMPUTER MODELING OF DAM BREAK

Abstract: Computational Fluid Dynamics has achieved considerable advances in the modeling of physical phenomena. These advances can be accounted for in terms of improved techniques and numerical schemes and also increasing processing power of computers. Among the physical phenomena that stand out in the computer modeling is the dam break, as it can predict the impacts caused by the rupture of a real dam and even validate the implementation of computer codes. From these propositions, this paper models, computationally, the break of a hypothetical dam amounts using the Finite Differences Explicit associated with the diffusive scheme of Lax-Friedrichs. In order to avoid spurious solutions, builds, from the Euler equations, a one-dimensional equivalent model to the shallow water, the solution, via method of characteristics, serves as the initial conditions to the numerical approach.

Keywords: Dam break, Finite Differences, Method of Characteristics, Lax-Friedrichs scheme.

1. INTRODUÇÃO

Os benefícios originados pela construção de uma hidrelétrica vão muito além da simples geração de eletricidade. Atividades como abastecimento de água, irrigação, navegação e controle de inundações também são atribuídas a essas obras. Mas a formação de grandes reservatórios eleva a preocupação das autoridades e das populações residentes em áreas de rios, pois incidentes envolvendo a ruptura de barragens é uma realidade mundial (SILVA, 2011).

Estudar o problema da ruptura de barragens tornou-se de grande monta para engenheiros e pesquisadores das mais variadas áreas do conhecimento, pois além de especificar a forma geométrica ideal para construir uma barragem, existe a necessidade de se preocupar com seu entorno.

Uma das ferramentas que vem se popularizando entre esses pesquisadores é a modelagem computacional. Essa ferramenta, representada pela Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC), tem proporcionado resultados cada vez mais precisos na simulação e prevenção dos danos causados pela ruptura de barragens. Além disso, a modelagem computacional da ruptura de barragens serve, também, para validar a implementação de

códigos numéricos (FELMAN; BONET, 2007) ou, então, para estudar a dinâmica de navios e plataforma *offshores* que estão em situação indesejável (CARBAJAL; WANDERLEY; NEVES, 2012).

As primeiras técnicas e esquemas numéricos utilizados na DFC se baseavam, essencialmente, na geração de malhas. Gomez-Gesteira *et al.* (2010) destacam que esses esquemas adotavam configurações Eulerianas ou Lagrangeanas. No trabalho de Hirt, Nichols e Romero (1975), os autores adotaram a configuração Euleriana para simular a ruptura de barragens utilizando, para isso, o Métodos das Diferenças Finitas (MDF).

Seguindo a mesma configuração, mas notando que muitos pesquisadores utilizavam o MDF em suas simulações, Hirt e Nichols (1981) desenvolveram um novo código para simular a ruptura de barragens usando o método *Volume of Fluid* (VOF).

Bellos, Soulis e Sakkas (1991) também adotaram a configuração Euleriana em seu estudo de ondas de inundação causadas pela ruptura de barragens, mas utilizaram o esquema explícito de *McCormack* para melhorar as características do escoamento próximos das fronteiras do seu modelo.

No trabalho de Kačeniauskas, Pacevič e Katkevičius (2010) os autores, considerando uma configuração Lagrangeana, desenvolveram uma ferramenta computacional, denominada FEMTOOL, para simular escoamento de fluidos adotando o Método dos Elementos Finitos (MEF), que foi validada ao modelar o perfil de uma coluna d'água colapsando sob os efeitos da gravidade.

Atualmente, a DFC tem apontado uma crescente evolução nos métodos sem malhas. Essa evolução pode ser notada em trabalhos como o de Koshizuka e Oka (1996), que desenvolveram o método *Moving-Particle semi-Implicite* (MPS) ou em Colagrossi e Landrini (2003), que modelaram a ruptura de barragens usando o método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) (GINGOLD; MONAGHAN, 1977), bem como no trabalho de Harada, Koshizuka e Kawaguchi (2007), que propuseram a implementação do método SPH diretamente nas Unidades de Processamento Gráfico (GPU) ou, então, em Zhang *et al* (2012), onde os autores realizaram um processamento em paralelo entre a Unidade de Processamento Central (CPU) e a GPU permitindo a simulação da ruptura de uma barragem em escada, com efeitos realísticos e em tempo real.

A importância prática e teórica da ruptura de barragens motivou a realização desse trabalho, que tem como objetivo a implementação de um código numérico que seja capaz de modelar a ruptura de uma barragem hipotética, cujo movimento da massa fluida é governado pelas equações conservativas de Euler, discretizadas por meio do Método das Diferenças Finitas Explícito (MDFE) em conjunto com o esquema difusivo de Lax-Friedrichs utilizando, como referência, os parâmetros adotados no trabalho desenvolvido por Gomez-Gesteira *et al.* (2010).

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

A análise e o tratamento de muitos problemas em mecânicas dos fluidos, como a ruptura de barragens, inclui um conjunto de leis conservativas que, tradicionalmente, advêm da mecânica clássica e governam o movimento dos fluidos (MARTINS, 1999).

2.1 Leis de conservação

A lei de conservação da massa ou continuidade define que a massa de um elemento deve ser invariante com o tempo, sendo representada na forma diferencial como

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \quad (1)$$

sendo $D\rho$ a derivada material da densidade ρ em função do tempo t e $\operatorname{div}(\vec{v})$ o divergente do vetor velocidade (\vec{v}) .

A lei de conservação do momento provém da segunda lei de Newton e define que a variação temporal do momento de um elemento fluido deve ser igual à soma de todas as forças que atuam sobre ele, ou seja,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \operatorname{div}T + \rho B, \quad (2)$$

onde $\operatorname{div}T$ representa o divergente do tensor de tensões de Cauchy e B o vetor forças de corpo por unidade de massa (LAI *et al.* 2010).

A lei de conservação da energia, proveniente da primeira lei da termodinâmica, define que a taxa de variação temporal da energia de um elemento fluido deve ser igual ao fluxo de calor para dentro do elemento, adicionado com o trabalho realizado pelas forças que atuam sobre ele. Assim, pode-se dizer que a energia não deve variar ou ser destruída, mas sim transformada. Na forma diferencial, essa lei pode ser escrita

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \operatorname{tr}(T^T \nabla \vec{v}) - \operatorname{div} q + \rho q_s, \quad (3)$$

sendo DU a derivada material da energia interna por unidade de massa em função do tempo t , tr o traço da matriz $(T^T \nabla \vec{v})$, T^T a matriz transposta do tensor de tensões de Cauchy, $\nabla \vec{v}$ gradiente do vetor velocidade \vec{v} , q o vetor fluxo de calor e q_s o suprimento de calor.

2.2 Equação hidrostática

Além das leis de conservação, o movimento de um fluido também necessita de um tratamento adicional para a pressão P . Para simular a ruptura de barragens, pode-se simplificar a modelagem considerando a distribuição de pressão como hidrostática. Dessa forma, negligenciando a taxa de variação da quantidade de movimento linear (Dv/Dt) na Equação (2), resulta a equação do equilíbrio estático

$$\operatorname{div}T + \rho B = 0. \quad (4)$$

Como o fluido está em equilíbrio estático, não haverá tensões cisalhantes e, assim, a única força de corpo atuante será a pressão. Nesse caso, a Equação (4) passa a ser escrita, em notação indicial (LAI *et al.* 2010), como

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \rho B_i. \quad (5)$$

De acordo com Pritchard (2011), muitas aplicações em engenharia consideram as forças de corpo causadas unicamente pela gravidade g . Logo, adotando o vetor gravidade como $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$, a Equação (5) resulta em

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \rho g_i, \quad (6)$$

chamada de equação hidrostática

Definindo o eixo cartesiano z como o eixo direcionado verticalmente para cima e levando em conta que, para fluidos incompressíveis, a densidade ρ é constante, então a Equação (6) torna-se

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g. \quad (7)$$

Considerando uma condição de fronteira e um nível de referência z_0 , com pressão inicial P_0 , a variação de pressão na Equação (7) será calculada por

$$\Delta P = \rho g (z - z_0) = \rho gh. \quad (8)$$

sendo z a cota da superfície livre.

2.3 Equações de Euler

Segundo Toro (2009), as equações de Euler transientes formam um sistema não linear hiperbólico de leis de conservação que governam a dinâmica de um material compressível, quando os efeitos das forças de corpo, tensões viscosas e fluxo de calor são negligenciados.

O sistema formado pode ser representado por um conjunto de variáveis físicas ou primitivas, tais como densidade (ρ), pressão (P), velocidade na direção do eixo x (u), velocidade na direção do eixo y (v) e velocidade na direção do eixo z (w). Outra forma de tratamento é considerar as funções tomando como base variáveis conservativas como densidade (ρ), momento na direção do eixo x (ρu), momento na direção do eixo y (ρv), momento na direção do eixo z (ρw) e energia total por unidade de massa (E).

Fisicamente, esse sistema de equações conservativas resulta da adoção da lei de conservação da massa, conservação do momento e conservação da energia. Dessa forma, considerando as Equações (1), (2) e (3), tem-se o sistema de equações conservativas formado pelas equações de Euler escritas como

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0, \quad (9)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + P)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = 0, \quad (10)$$

$$(\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + P)_y + (\rho vw)_z = 0, \quad (11)$$

$$(\rho w)_t + (\rho uw)_x + (\rho vw)_y + (\rho w^2 + P)_z = 0, \quad (12)$$

$$E_t + [u(E+P)]_x + [v(E+P)]_y + [w(E+P)]_z = 0, \quad (13)$$

onde $E = \rho \left[\frac{1}{2}(\vec{v})^2 + e \right]$, $\frac{1}{2}(\vec{v})^2 = \frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ é a energia cinética específica e e é a energia interna específica.

2.4 Equações de Águas Rasas

As equações de águas rasas, segundo Dutykh e Clamond (2011), podem ser consideradas como aproximações do problema de escoamentos em superfícies livres onde, na Equação (2), a componente da aceleração na direção do eixo y pode ser negligenciada. Assim, derivando parcialmente a Equação (8) em função de x e z , tem-se

$$P_x = \rho g h_x, \quad (14)$$

e

$$P_z = \rho g h_z. \quad (15)$$

Dessa forma, tanto as pressões como as demais componentes da aceleração da Equação (2) são independentes da componente y , resultando

$$u_t + uu_x + wu_x = -gh_x \quad (16)$$

e

$$w_t + uw_z + ww_z = -gh_z, \quad (17)$$

chamadas de equações de águas rasas.

Supondo o escoamento levemente compressível, pode-se definir

$$\rho \approx \rho_\infty [1 + \tau(P - P_\infty)], \quad (18)$$

sendo ρ_∞ , P_∞ a densidade e a pressão na superfície livre, respectivamente, e τ o coeficiente de compressibilidade isotérmica.

Tomando as Equações (9) e (10), considerando o escoamento somente na direção do eixo cartesiano x e adotando a hipótese da distribuição hidrostática de pressão, chega-se a um modelo unidimensional equivalente às equações de águas rasas (DUTYKH; MITSOTAKIS, 2009), escrito como

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad (19)$$

$$u_t + uu_x + gh_x = 0. \quad (20)$$

3. MÉTODOS DE SOLUÇÕES

3.1 Método das Diferenças Finitas

O Método das Diferenças Finitas (MDF) é considerado a mais antiga forma de se obter a solução numérica de equações diferenciais, sendo as primeiras aplicações atribuídas à Euler, em 1768. Baseia-se nas propriedades de expansão das séries de Taylor e nas aplicações diretas das definições de derivadas (HIRSCH, 2007).

É possível definir formas diferentes para aproximar as derivadas de uma função e estas podem ter diferentes ordem de precisão. Assim, se for adotado um conjunto de pontos x_i , $i = 1, \dots, N$, onde o domínio de interesse é subdividido em N partes de tamanhos iguais Δx e $\phi_i = (i\Delta x)$, então a derivada da função ϕ pode ser aproximada por um dos três caminhos:

$$(\phi')_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (21)$$

chamada de diferença avançada,

$$(\phi')_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{22}$$

chamada de diferença atrasada,

$$(\phi')_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \tag{23}$$

chamada de diferença central, onde $O(\Delta x)$ e $O(\Delta x^2)$ representam a ordem de precisão da aproximação. As interpretações geométricas destas diferenças podem ser vistas na Figura 1, que proporciona uma melhor compreensão do que está sendo tratado.

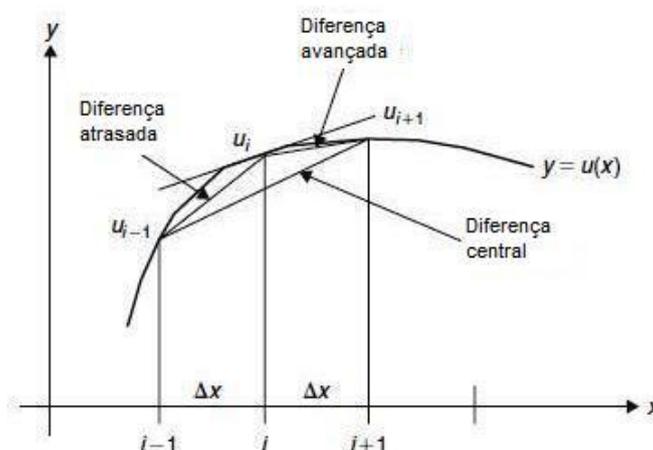


Figura 1 – Ilustração da interpretação geométrica das fórmulas das diferenças para derivadas de primeira ordem
 Fonte: Adaptado de Hirsch (2007)

Para o caso de uma função ser derivada no espaço e no tempo, a classificação da sua aproximação pode ser definida em diferença explícita ou diferença implícita. A fim de exemplificar o que está sendo afirmado, pode-se utilizar a equação diferencial linear da advecção (HIRSCH, 2007)

$$u_t + au_x = 0, \tag{24}$$

onde a é uma constante. Logo, adotando para a aproximação temporal a diferença avançada, Equação (21), e para a aproximação espacial a diferença central, Equação (23), encontra-se

$$u_i^{t+1} = u_i^t - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^t - u_{i-1}^t), \tag{25}$$

chamado de Método das Diferenças Finitas Explícito (MDFE).

Da mesma forma, porém considerando o segundo termo do lado direito da Equação (25) para o tempo $t + 1$, tem-se

$$u_i^{t+1} = u_i^t - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{t+1} - u_{i-1}^{t+1}), \tag{26}$$

chamado de Método das Diferenças Finitas Implícito (MDFI).

3.2 Esquema de Lax-Friedrichs

A forma discreta construída para a equação diferencial linear da advecção, Equação (24), serviu como exemplo de aplicação do MDFE. No entanto, esta construção gera instabilidades, uma vez que a arquitetura computacional calcula os valores da Equação (25) de forma finita, fazendo com que ocorra uma diferença entre a solução finita \tilde{u}_i^t e a solução infinita u_i^t . Essa diferença é chamada de erro de truncamento

$$\varepsilon_i^t = \tilde{u}_i^t - u_i^t. \tag{27}$$

Com o avanço no tempo ocorre o acúmulo do erro de truncamento e, segundo o Teorema da Equivalência de Lax, a Equação (25) não será convergente (HIRSCH, 2007).

Uma forma de verificar o motivo da não convergência da Equação (25) é realizando a análise de estabilidade de von Neumann, cuja proposta é de reescrever a Equação (24) em função do erro de truncamento ε_i^t e, após, aplicar a série de Fourier para esse erro, resultando

$$\xi \xi^t e^{i k t \Delta x} = \left[1 - (Co/2)(e^{i k \Delta x} - e^{-i k \Delta x}) \right] \xi^t e^{i k t \Delta x} \tag{28}$$

onde $Co = a \Delta t / \Delta x$ é o número de Courant-Friedrichs-Lewy, $i = \sqrt{-1}$, k é um número de onda espacial real e $\xi = \xi(k)$ é um número complexo dependente de k .

Observa-se na Equação (28) que o avanço do erro para o tempo $t+1$ é a mesma expressão do erro ε_i^t multiplicada por $\xi(k)$. Logo, pode-se afirmar que a propagação do erro não é nada mais do que sucessivas potências inteiras de $\xi(k)$, podendo ocasionar um aumento desse erro se $|\xi(k)| > 1$, o que tornará a Equação (25) instável. Por esse fato, o número $\xi(k)$ é chamado de fator de amplificação.

Simplificando o termo comum na Equação (28), determina-se o fator de amplificação

$$\xi(k) = 1 - i(Co) \text{sen}(k \Delta x) \tag{29}$$

cujos módulos serão sempre maior ou igual a 1 para todo k , amplificando o erro a cada passo de tempo e tornando a Equação (25) incondicionalmente instável.

Uma forma de tornar o problema estável é aplicando o esquema de Lax-Friedrichs, que propõe a substituição do termo u_i^t , da Equação (25), por uma média aritmética entre os termos adjacentes, ou seja,

$$u_i^t = \frac{1}{2}(u_{i+1}^t + u_{i-1}^t). \tag{30}$$

Dessa forma, a Equação (25) passa a ser escrita como

$$u_i^{t+1} = \frac{1}{2} \left[(u_{i+1}^t + u_{i-1}^t) - Co(u_{i+1}^t - u_{i-1}^t) \right] \tag{31}$$

que, ao ser realizado novamente a análise de estabilidade de von Neumann, verifica-se

$$\xi(k) = \cos(k \Delta x) - i(Co) \text{sen}(k \Delta x). \tag{32}$$

Se $\xi(k)$, na Equação (32), for maior do que 1, então o tratamento feito na Equação (31) será instável, mas se for considerado que $|\xi(x)|^2 \leq 1$ o tornará estável, o que só será possível se $Co \leq 1$, sendo este o critério de Courant-Friedrichs-Lewy. Assim, pode-se dizer que a Equação (31) é condicionalmente estável. No entanto, essa estabilidade é alcançada com o emprego de muita difusão numérica, prejudicando a resposta final do problema e, em algumas simulações numéricas, inviabilizando sua utilização.

4. MODELO NUMÉRICO

4.1 Barragem hipotética

Uma barragem pode ser considerada como um canal finito que, em seu interior, separa dois níveis de água que, inicialmente, estão em repouso. O nível com maior volume representa o reservatório (montante) e o de menor volume representa o leito do rio (jusante). Quando essa barragem entra em colapso dá início ao movimento da massa líquida localizada à montante, que se sobrepõem à jusante, alterando as propriedades físicas do sistema e formando fenômenos como as frentes de ondas (STANSBY; CHEGINI; BARNES, 1998).

No trabalho de Korobkin e Yilmaz (2009), os autores analisaram os estágios iniciais da ruptura de uma barragem hipotética, com o intuito de acompanhar a propagação das frentes de ondas. Definiram a ruptura de barragens como sendo uma massa líquida que, inicialmente em repouso, entra em movimento sob os efeitos da gravidade, causando uma desordem nos campos de pressões e velocidades.

A modelagem da ruptura de barragens pode ser caracterizada como "leito úmido" ou "leito seco", de acordo com o nível de água existente à jusante. Essa diferença na característica dos leitos define o comportamento das frentes de ondas que se propagam para jusante, ajustando os campos de pressão e gerando movimentos instáveis (turbulentos).

Neste trabalho optou-se por caracterizar o leito à jusante como seco, utilizando como referência o canal finito construído no trabalho desenvolvido por Gomez-Gesteira *et al.* (2010), onde autores estudaram a formulação clássica do método SPH para problemas de escoamentos em superfícies livres. Para tanto, o canal finito foi especificado com as seguintes dimensões: $h_0 = 2$ m para a altura do perfil inicial da coluna d'água, $l = -1$ m como posição da lateral esquerda do tanque e $L = 3$ m a posição da lateral direita do tanque, conforme mostrado na Figura 2

4.2 Modelo de Águas Rasas

Conforme destacam Stansby, Chegini e Barnes (1998), os estágios iniciais do movimento da massa líquida são os mais importantes em toda simulação, pois são nesses instantes que, devidos às discontinuidades nos leitos, se iniciam as formações das ondas de choques ou rarefação e muitos métodos numéricos, como o MDF, não têm um comportamento adequado para tratá-las, conduzindo a soluções espúrias.

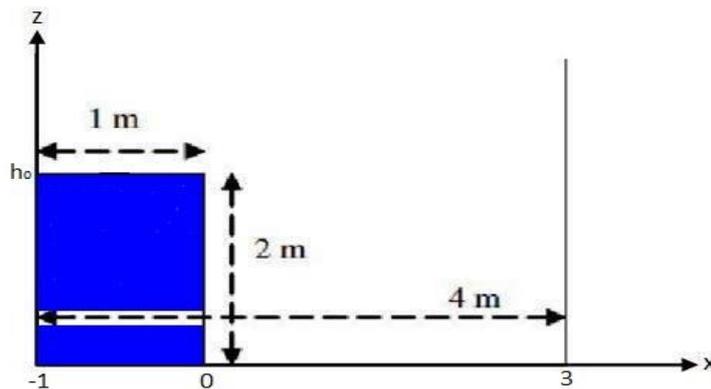


Figura 2 – Canal finito simulando uma barragem
 Fonte: Adaptado de Gomez-Gesteira *et al.* (2010)

Ritter, em 1892, obteve uma solução analítica das equações (19) e (20) para os estágios iniciais do escoamento utilizando, como hipóteses, canais infinitos (JOHNSON, 1997). Para tanto, seja $c(x,t) = \sqrt{gh}$ a velocidade de propagação da onda, onde $h \geq 0$ representa a profundidade total de superfície livre. Multiplicando a Equação (19) por g e considerando $c^2 = gh$, tem-se

$$(c^2)_t + (uc^2)_x = 0. \tag{33}$$

Derivando a Equação (33) e realizando as devidas simplificações, encontra-se

$$(2c)_t + u(2c)_x + cu_x = 0. \tag{34}$$

Se na velocidade de propagação da onda for considerado que $h = c^2/g$ e que $h_x = (2/g)cc_x$, define-se a Equação (20) como

$$u_t + uu_x + 2cc_x = 0. \tag{35}$$

As Equações (34) e (35) formam o modelo de águas rasas unidimensional baseado na velocidade do escoamento u e na velocidade de propagação da onda c . Somando e subtraindo essas equações resultará em um par de equações diferenciais parciais escritas como

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u \pm 2c) = 0. \tag{36}$$

Considerando na Equação (36) que

$$\frac{d}{dt} (u \pm 2c) = 0, \tag{37}$$

então

$$\frac{dx}{dt} = (u \pm c). \tag{38}$$

Desse resultado pode-se interpretar, por meio do Método das Características (JOHNSON, 1997), que as inclinações das linhas características C^+ são definidas como

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{C^+} = (u + c). \quad (39)$$

e que, ao longo dessas linhas, $u + 2c$ é constante.

De forma análoga, pode-se interpretar que as inclinações das linhas características C^- são determinadas por

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{C^-} = (u - c) \quad (40)$$

e que, ao longo dessas linhas, $u - 2c$ é constante.

As funções $u + 2c$ e $u - 2c$ são chamadas de invariantes de Riemann e se propagam, quer à montante ou à jusante ($\mp c$), em relação à velocidade do fluxo u .

Uma classe especial de solução, chamada de onda simples, surge quando uma das invariantes de Riemann é sempre constante no domínio de interesse. Neste caso, se for considerada a propagação da uma onda movendo-se para direita, em águas estacionárias e com profundidade constante, $z = h$, então todas as linhas características C^- surgirão da região não perturbada. Além disso, como $u_0 = 0$ e $c_0 = \sqrt{gh_0}$, então a invariante de Riemann nessa região será

$$u - 2c = u_0 - 2c = -2c_0. \quad (41)$$

Assim, $u - 2c$ será sempre constante e, como $u + 2c$ é constante nas linhas características C^+ , implicará em u e c também constantes nas linhas C^+ .

A forma de interpretar o caso da onda simples serve para compreender a estruturação da solução no caso da ruptura de barragens. Se for considerado que, para o tempo $t = 0$, ocorre o colapso da estrutura localizada na origem do sistema $x = 0$ e, nesse instante,

$$u = u_0 = 0 \quad (42)$$

e

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_0; & x < 0 \\ 0; & x > 0 \end{cases}, \quad (43)$$

sendo $h_0 > 0$ constante, todas as características virão da região não perturbada $x < 0$ e serão constantes, ou seja,

$$u + 2c = 2\sqrt{gh_0} = \text{constante}. \quad (44)$$

No momento em que se inicia o movimento da massa líquida irão surgir infinitas linhas características da origem $x = 0$, todas com inclinações diferentes, pois cada h , $0 \leq h \leq h_0$, determina uma linha característica. Então, para tratar o fenômeno, necessita-se de uma forma degenerada da solução característica.

Das linhas características C^- tem-se que suas inclinações são

$$\frac{dx}{dt} = u - c, \quad (45)$$

onde $u - 2c$ é constante. Mas, $u + 2c$ é constante e, assim, pode-se concluir que u , c , $u - c$ são constantes e C^- são linhas retas. Com isso, integrando a Equação (45) em função de t , encontra-se

$$x = (u - c)t, \tag{46}$$

o que indica que todas estas linhas características C^- irão passar pela origem $(0,0)$. Esse comportamento das linhas características é chamado de leque de expansão, como mostra a Figura 3.

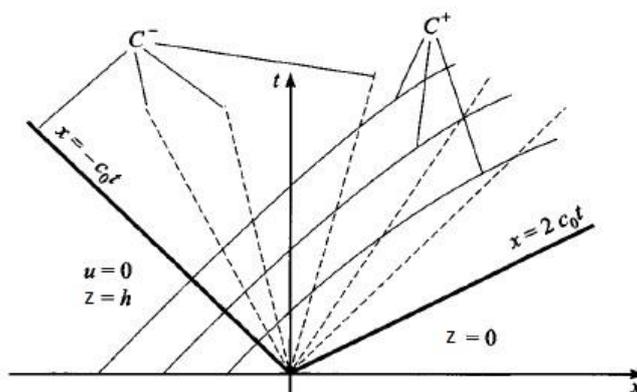


Figura 3 – As linha características C^+ e C^- para o problema da ruptura de barragens
 Fonte: Adaptado de Johnson (1997)

Da condição inicial em que $u_0 = 0$, tem-se

$$u + 2c = 2\sqrt{gh_0} = 2c_0, \tag{47}$$

ou seja,

$$u = 2c_0 - 2c. \tag{48}$$

Da hipótese de todas as linhas características C^- passarem pela origem do sistema, Equação (46), pode-se obter

$$\frac{x}{t} = u - c \tag{49}$$

que, ao substituir u pela Equação.(48), transforma-se em

$$\frac{x}{t} = 2c_0 - 3c = 2c_0 - 3\sqrt{gh}, \tag{50}$$

determinando que a profundida da superfície livre, após o início do escoamento, será obtida por

$$h(x,t) = \frac{1}{9} \left[2\sqrt{gh_0} - \frac{x}{t} \right]^2. \tag{51}$$

Se na Equação (47) for definido que

$$c = c_0 - \frac{u}{2}, \quad (52)$$

então a Equação (46) pode ser escrita na forma

$$\frac{x}{t} = u - c_0 + \frac{u}{2}, \quad (53)$$

determinando que a velocidade do escoamento será obtida por

$$u(x, t) = \frac{2}{3} \left[\frac{x}{t} + \sqrt{gh_0} \right]. \quad (54)$$

Assim, considerando a região localizada entre $h = h_0$ até $h = 0$, as Equações (51) e (54) descreverão o perfil da superfície livre, desde que $-t\sqrt{gh_0} \leq x \leq 2t\sqrt{gh_0}$, para $t > 0$, e que a Equação (50) seja satisfeita.

No entanto, conforme comentado anteriormente, esta formulação baseia-se na hipótese de o escoamento ocorrer em canais infinitos, o que não condiz com o modelo hipotético adotado, Figura 2. Assim, as Equações (51) e (54) devem ser adequadas para o caso de um canal finito, onde as soluções analíticas da altura da superfície livre $h(x, t)$ e da velocidade média do escoamento $u(x, t)$ serão determinadas por

$$h(x, t) = \frac{1}{9g} \left[2\sqrt{gh_0} - \frac{l-x}{t} \right]^2 \quad (55)$$

e

$$u(x, t) = 2 \left[\sqrt{gh_0} - \sqrt{gh} \right], \quad (56)$$

desde de que, $l - t\sqrt{gh_0} \leq x \leq l + 2t\sqrt{gh_0}$ e que $0 \leq t \leq \min \left\{ l/\sqrt{gh_0}, (L-l)/2\sqrt{gh_0} \right\}$.

As soluções (55) e (56) são válidas nos instantes anteriores a ocorrência do encontro da massa líquida com os contornos do canal. Após esses instantes, as Equações (19) e (20) são solucionada pelo MDFE em associação com o esquema difusivo de Lax-Friedrichs utilizando, como condições iniciais, os valores de $h(x, t)$ e $u(x, t)$ obtidos analiticamente, resultando na construção de um modelo híbrido para simular a ruptura de uma barragem.

3. RESULTADOS

O modelo híbrido implementado para simular a ruptura da barragem hipotética, Figura 2, mostrou-se eficiente, apresentando resultados muito próximos aos encontrados em simulações realizadas por outros pesquisadores.

A estratégia utilizada para a obtenção dos resultados consistiu em determinar valores médios para as velocidades e as alturas atingidas pelo perfil da coluna d'água. Para tanto, optou-se em dividir os tempos modelados em intervalos $t = 0,05$ s e o comprimento total do tanque em intervalos $x = 0,2$ m, permitindo a visualização dos perfis em diversos pontos do canal finito e em todos os tempos de simulação, até o escoamento atingir um estado de regime permanente. Para satisfazer o critério de Courant-Friedrichs-Lewy, os intervalos temporais foram discretizados em $\Delta t = 0,0001$ s e as divisões espaciais discretizadas em $\Delta x = 0,01$ m.

O primeiro ponto adotado para visualizar o escoamento foi $x = 0,2 \text{ m}$, com um tempo total de simulação $t \approx 7 \text{ s}$, momento em que as velocidades e as alturas iniciam um estado de regime permanente, Figura 4. Destaca-se por apresentar valores nulos para as velocidades e alturas iguais a $h = 2 \text{ m}$ nos instantes iniciais do escoamento, representando o perfil da barragem. Após, nota-se o aumento das velocidades, conjuntamente com a diminuição das alturas, no exato momento em que se inicia o movimento da coluna d'água representando, com boa fidelidade, a ruptura da barragem. Logo após, as velocidades, bem como as alturas, tendem a se estabilizarem, indicando que a coluna d'água está percorrendo a extensão do canal. Em seguida, há uma acentuada queda nas velocidades, acompanhada por uma elevação no perfil da coluna d'água, o que confere com o momento em que o fluido colide com o muro localizado no lado direito do canal, $L = 3 \text{ m}$, formando o *sloshing*, fenômeno esse que pode ser visto em detalhes no trabalho de Carbajal, Wanderley e Neves (2012). Após isso, tanto as velocidades como as alturas tendem a oscilar, devido às colisões, em menores escalas, com os muros laterais, até atingirem o estado, aparentemente, estacionário.

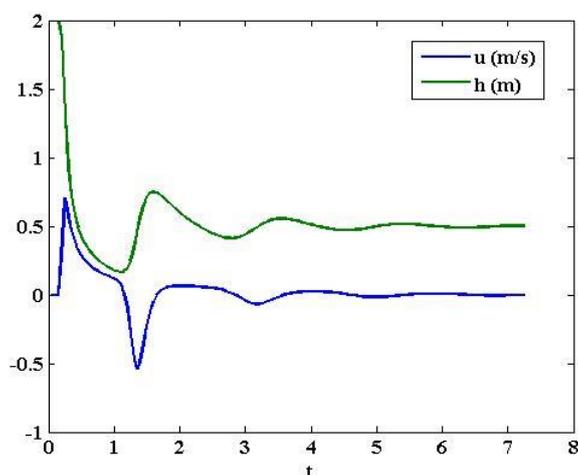


Figura 4 – Perfil da velocidade média u e altura da coluna d'água h para o ponto $x = 0,2 \text{ m}$

Fonte: Desenvolvido pelos autores

A análise semelhante ao que foi feito anteriormente pode ser realizada na Figura 5. No entanto, percebe-se que as velocidades são maiores, já que o ponto adotado para visualizar o escoamento é agora $x = 0,4 \text{ m}$ da barragem. Isso faz com que diferentes valores passem a compor as médias. Assim, é possível notar os impactos sofridos pelo escoamento quando ocorrem as colisões com os muros e durante a formação do *sloshing*.

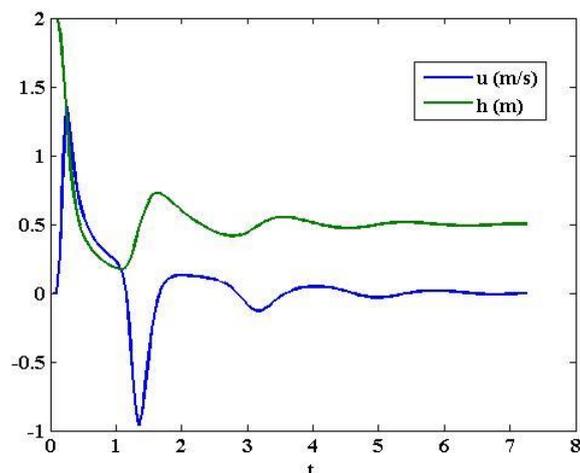


Figura 5 – Perfil da velocidade média u e altura da coluna d'água h para o ponto $x = 0,4\text{m}$

Fonte: Desenvolvido pelos autores

Visualizando o escoamento para certos tempos de simulação, pode-se destacar, por exemplo, os tempos iniciais do movimento da massa líquida, Figura 6. Nota-se nessa figura que a altura inicial coluna d'água, $h_0 = 2\text{m}$, já começa a perder sua forma a medida que o tempo avança, diminuindo na região do reservatório ao mesmo tempo em que se eleva no canal. Isso indica que a massa líquida, que era contida pela barragem antes da sua ruptura, está escoando pelo canal causando um rebaixamento no reservatório, como normalmente ocorre numa situação real. Observa-se que esse rebaixamento é mais acentuado entre os tempo $t = 0,2\text{s}$ e $t = 0,25\text{s}$, com uma variação de aproximadamente $\Delta h \approx 0,8\text{m}$, uma vez que o fluido adquiriu velocidade ao percorrer o canal e ainda não atingiu o muro lateral direito, $L = 3\text{m}$. No tempo $t = 0,3\text{s}$ a massa líquida atinge o muro lateral direito, elevando a altura da superfície livre no canal para aproximadamente $h \approx 0,2\text{m}$ e retendo o rebaixamento do reservatório. Em seguida, continuando o movimento, a coluna d'água começa a se elevar junto ao muro lateral direito, $h \approx 0,38\text{m}$ no tempo $t = 0,35\text{s}$, iniciando a formação do *sloshing*. A partir desse instante, com o avanço no tempo, a coluna d'água tende a oscilar dentro do tanque, reduzindo sua velocidade, até atingir o estado estacionário.

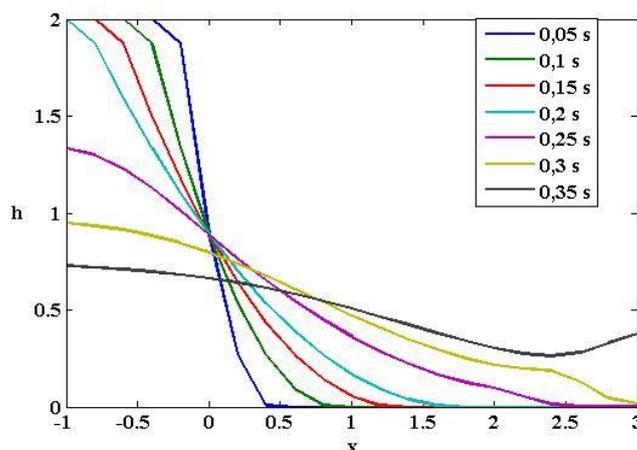


Figura 6 – Perfil da altura da coluna d'água h para os instantes iniciais do escoamento

Fonte: Desenvolvido pelos autores

4. CONCLUSÕES

A proposta deste trabalho foi de desenvolver um modelo numérico capaz de simular, computacionalmente, a ruptura de uma barragem hipotética, cujo movimento da massa líquida era governado por um sistema de equações diferenciais formado pelas equações de Euler. Para tanto, objetivava-se utilizar uma abordagem numérica que aproximasse as equações de Euler por meio do Método das Diferenças Finitas Explícito em associação ao esquema difusivo de Lax-Friedrichs. No entanto, de acordo com a literatura pesquisada, essa abordagem numérica mostrava-se incapaz de contornar as descontinuidades formadas pelas diferentes profundidades dos leitos, podendo conduzir o modelo à resultados não realísticos.

Para contornar essa dificuldade, obteve-se, a partir das equações de Euler, um modelo equivalente às equações de águas rasas, adotando as hipóteses da distribuição hidrostática de pressão e de o escoamento ser levemente compressível, que foi solucionado, analiticamente, pelo Método das Características, evitando resultados espúrios causados pelas ondas de choque ou rarefação que surgem nos estágios iniciais do movimento.

Passados os estágios iniciais do escoamento, o modelo equivalente construído foi tratado considerando a abordagem numérica proposta adotando, como condições iniciais, os resultados analíticos obtidos, formando um modelo híbrido que associou soluções analíticas e numéricas.

As análises finais consideraram o modelo híbrido como satisfatórios, pois foi possível observar, entre outros fenômenos, o aumento das velocidades no início do escoamento, em conjunção com o rebaixamento do reservatório, e a formação do *sloshing* nos momentos em que o fluido colidia com as laterais do canal. Com isso, comprovou-se a boa funcionalidade do modelo, mesmo tendo sido adotadas tantas hipóteses simplificadoras.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o CEASB (Centro de Estudos Avançados em Segurança de Barragens - <http://www.pti.org.br/ceasb>) e ao PPGMNE-UFPR (Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná) pelo suporte no desenvolvimento desse trabalho.

REFERÊNCIAS

BELLOS, C. V.; SOULIS, J. V.; SAKKAS, J. G. *Computation of two-dimensional dam-break-induced flows*. *Advances in Water Resources*, v.14, n.1, p.31-41, 1991.

CARBAJAL, M. A. C.; WANDERLEY, J. B. V.; NEVES, M. A. S. *Simulação numérica da quebra de barragem em 2D*. In: Anais do 24º Congresso Nacional de Transporte Aquaviário, Construção Naval e Offshore, Rio de Janeiro, 2010. Disponível em <http://www.sobena.org.br/publicacoes.asp>. Acesso em: 01/03/2014.

COLAGROSSI, A.; LANDRINI, M. *Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics*. *Journal of Computational Physics*, v. 191, n. 2, p. 448– 475, 2003.

DUTYKH, D.; CLAMOND, D. *Shallow water equations for large bathymetry variations*. *Journal Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 44, n. 33, 2011.

DUTYKH, D.; MITSOTAKIS, D. *On the relevance of the dam break problem in the context of nonlinear shallow water equations*. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series Bar*, v. 13, n. 4, p. 799-818, 2009.

- FELDMAN, J.; BONET, J.** *Dynamic refinement and boundary contact forces in sph with applications in fluid flow problems. International journal for numerical methods in engineering*, v. 72, n. 3, p. 295–324, 2007.
- GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J.** *Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to non-spherical stars. Monthly notices of the royal astronomical society*, v. 181, p. 375–389, 1977.
- GOMEZ-GESTEIRA, M. et al.** *State-of-the-art of classical sph for free-surface flows. Journal of Hydraulic Research*, v. 48, n. S1, p. 6–27, 2010.
- HARADA, T.; KOSHIZUKA, S.; KAWAGUCHI, Y.** *Smoothed particle hydrodynamics on gpus. Computer Graphics International, S.l, s.n., p. 63-70, 2007.*
- HIRSCH, C.** *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. Elsevier Science, 2007.*
- HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D.; ROMERO, N. C.** *Sola: A numerical solution algorithm for transient fluid flows. NASA STI/Recon Technical Report N, v. 75, 1975.*
- HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D.** *Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. Journal of Computational Physics*, v. 39, n. 1, p. 201 – 225, 1981.
- JOHNSON, R. S.** *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves. Cambridge University Press, 1997.*
- KAČENIAUSKAS, A.; PACEVIČ, R.; KATKEVIČIUS, T.** *Dam break flow simulation on grid. Materials physics and mechanics*, v. 9, p. 96–104, 2010.
- KOROBKIN, A.; YILMAZ, O.** *The initial stage of dam-break flow. Journal of Engineering Mathematics, Springer Netherlands*, v. 63, n. 2-4, p. 293–308, 2009.
- KOSHIZUKA, S.; OKA, Y.** *Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. Nuclear science and engineering*, v. 123, n. 3, p. 421–434, 1996.
- LAI, W. et al.** *Introduction to Continuum Mechanics. Elsevier Science, 2009.*
- MARTINS, A. S.** *Simetrias e Leis de Conservação na Mecânica Clássica. Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 21, n. 1, p. 33-39, 1999.
- PRITCHARD, P.** *Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics. Wiley, 2011.*
- SILVA, L. R. C. M.** *Estudo sobre o rompimento do barramento da contenção de cheias de Itajubá. Eixo 3A. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Itajubá, Itajubá-MG, Maio 2011.*
- STANSBY, P. K.; CHEGINI, A.; BARNES, T. C. D.** *The initial stages of dam-break flow. Journal of Fluid Mechanics*, v. 374, p. 407–424, 11 1998.
- TORO, E.** *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. Springer, 2009.*
- ZHANG, F. et al.** *Real-time particle fluid simulation with wcsph. In: Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, Hong Kong, 2012. Disponível em <http://diglib.eg.org/EG/DL/PE/PG/PG2012short/029-034.pdf>. Acesso em 20/01/2014.*