

ANÁLISE NUMÉRICA DE TRELIÇAS PLANAS CONSIDERANDO AS NÃO LINEARIDADES FÍSICA E GEOMÉTRICA

Luiz Antonio Farani de Souza (UTFPR) lafarani@yahoo.com.br

Resumo: As treliças possuem um vasto campo de aplicação na Engenharia de Estruturas, sendo muito utilizadas na construção de pontes - rodoviárias e ferroviárias, em estruturas de cobertura de edificações, em torres de transmissão de energia, entre diversos outros usos. Em geral são relativamente leves e especialmente indicadas para superar grandes vãos ou suportar carregamentos elevados. Nesse contexto, as treliças tornam-se uma solução econômica e prática. O objetivo deste artigo é desenvolver um modelo numérico para a análise estática de treliças planas via o Método dos Elementos Finitos considerando as não linearidades física e geométrica. O conhecimento do comportamento estático de uma estrutura é essencial para a concepção de estruturas mais leves e esbeltas sem afetar o seu padrão de segurança e de qualidade. A relação constitutiva do material é descrita por um modelo fundamentado na teoria da Mecânica do Dano Contínuo. O critério de falha da Máxima Tensão é incorporado ao modelo. Para realizar as análises não lineares das estruturas, emprega-se o método de Newton Raphson associado à técnica de iteração Controle de Deslocamento Generalizado. Os resultados numéricos apontam que há diferenças na resposta mecânica da estrutura (quanto ao carregamento de colapso e deformação correspondente) quando se consideram os efeitos dessas não linearidades.

Palavras-chave: Treliça plana. Elementos Finitos. Mecânica do Dano. Não linearidades física e geométrica.

NUMERICAL ANALYSIS OF PLANE TRUSSES CONSIDERING THE GEOMETRIC AND PHYSICS NONLINEARITIES

Abstract: The trusses have a wide application in Structural Engineering, being heavily used in the construction of bridges (highway and railway), in roof structures of buildings, towers of energy transmission, among many other uses. Usually they are relatively light weight and especially indicated to overcoming large spans or support high loadings. In this context, the trusses become an economical and practical solution. The aim of this paper is to develop a numerical model for static analysis of plane trusses using the Finite Element Method considering material and geometric nonlinearities. The knowledge of static behavior of a structure is essential for the design of more lightweight and slender structures without affecting their safety and quality standards. The material constitutive relation is described by a model based on the Continuum Damage Mechanics theory. It is incorporated to model the Maximum Stress failure criterion. To perform the nonlinear analysis of structures, it uses the Newton-Raphson method associated with the Generalized Displacement Control iteration technique. Numerical results show that there are differences in structure mechanical response (as collapse load and the corresponding deformation) when one considers the effects of these nonlinearities.

Keywords: Plane truss. Finite Element. Damage Mechanics. Physical and geometric nonlinearities.

1. INTRODUÇÃO

A treliça é uma estrutura constituída por elementos lineares (barras) que podem estar dispostos em diversos planos - estruturas bidimensionais ou tridimensionais. Esse tipo de estrutura é muito utilizado na construção de pontes (rodoviárias e ferroviárias), em estruturas de cobertura de edificações, em torres de transmissão de energia, entre diversos outros usos. Usualmente são construídas em madeira ou aço, sendo relativamente leves e indicadas para superar grandes vãos ou suportar carregamentos elevados. Nesse contexto, as treliças tornam-se uma solução econômica e prática (KRIPKA et al., 2013).

As estruturas treliçadas têm grande aplicação na Engenharia Estrutural, sendo que os métodos de análises lineares destes tipos de estruturas já estão bastante consolidados. Atualmente sistemas em treliças de dimensões e complexidade cada vez maiores têm sido usados numa grande variedade de aplicações práticas da engenharia. A capacidade de cobrir

grandes vãos e áreas com relações resistência/peso eficientes, frequentemente fazem das estruturas treliçadas as mais econômicas em termos de materiais e custo global. O advento do uso de sistemas treliçados em estruturas de grande complexidade, tais como, torres de linhas de transmissão, pontes e mesmo estruturas aeroespaciais, tem exigido o uso intensivo de computadores e técnicas apuradas de análise matricial (LEITE, 2000).

Para efeito de projeto deseja-se conhecer o carregamento último de colapso e sua resposta força aplicada *versus* deslocamento. Dependendo das características da estrutura, esta resposta pode ser linear ou não linear. No comportamento não linear não há proporcionalidade entre o carregamento aplicado e as deformações e/ou deslocamentos (SANTOS et al., 2010). Há dois tipos básicos de não linearidade que ocorrem na análise estrutural - o primeiro tipo é conhecido por não linearidade física e é causada por um comportamento elástico não linear, plástico ou viscoso do material que compõe a estrutura; o segundo é a não linearidade geométrica e ocorre quando as deformações são suficientemente grandes para causar mudanças significativas na estrutura, fazendo com que as equações de equilíbrio sejam formuladas na configuração deformada da mesma (LACERDA, 2014).

Treliças quando submetidas a grandes carregamentos apresentam não linearidades geométricas, e estas frequentemente contém certos pontos críticos chamados de *snap-through* (ponto crítico em relação à força) e *snap-back* (ponto crítico em relação ao deslocamento) que estão relacionados à instabilidade da estrutura. Obter os pontos críticos e o caminho de equilíbrio dessas treliças requer estratégias numéricas especiais. Uma das estratégias é o método de iteração Controle de Deslocamento Generalizado - GDCM.

Em treliças planas ou espaciais é comum tratar-se da relação constitutiva para a barra ao invés de relação constitutiva para o material. Nesse caso, há uma diferenciação de tratamento ou de comportamento entre barras tracionadas e comprimidas. As barras tracionadas podem atingir o escoamento, enquanto as comprimidas podem apresentar instabilidade para tensões inferiores ao escoamento; estas características devem estar inclusas na relação constitutiva da barra.

Devido ao avanço tecnológico e à utilização de materiais mais resistentes, estruturas mais complexas e esbeltas vêm sendo desenvolvidas, necessitando de métodos computacionais para a sua análise, tendo em vista a dificuldade de se modelar o comportamento real das mesmas com maior precisão. Dessa forma, este artigo apresenta uma metodologia para a análise não linear de estruturas do tipo treliça, por meio do Método dos Elementos Finitos, levando em consideração os efeitos das não linearidades física e geométrica. O comportamento do material é descrito por um modelo constitutivo baseado na Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998). Ao modelo é incorporado o critério de falha da Máxima Tensão.

As análises não lineares estáticas são efetuadas considerando o método de Newton - Raphson associado à técnica de iteração Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM). As simulações computacionais são realizadas com o programa gratuito Scilab. Os resultados numéricos apontam que há diferenças na resposta mecânica da estrutura (força última e deslocamento máximo) quanto à consideração do efeito da não linearidade física e/ou geométrica.

2. MODELO DE ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA PLANA

Neste trabalho, optou-se pela formulação Lagrangeana para descrever a posição de equilíbrio do sistema estrutural ao longo do processo de resolução numérica. Neste esquema de solução todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas à configuração inicial no tempo zero. A

matriz de rigidez (\mathbf{k}_e) e o vetor de força interna (\mathbf{f}_e) no sistema de coordenadas locais são escritos por, respectivamente:

$$\mathbf{k}_e = \frac{(1-d)E_0A_0}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sigma A_0}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{f}_e = \frac{(1-d)E_0A_0}{L_0} \begin{bmatrix} u_{xi} - u_{xj} \\ 0 \\ -u_{xi} + u_{xj} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde L_0 é o comprimento indeformado da barra, d é o dano, E_0 é o módulo de elasticidade longitudinal inicial do material (não danificado), A_0 é a área da seção transversal indeformada, e u_{xi} e u_{xj} são os deslocamentos nos nós i e j do elemento, respectivamente. A tensão normal (σ) é calculada por:

$$\sigma = (1-d)E_0\varepsilon \quad (3)$$

onde ε é a deformação de engenharia determinada pela seguinte equação:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (4)$$

onde L é o comprimento deformado da barra. Na Figura 1 é apresentado um desenho esquemático de elemento finito de treliça plana.

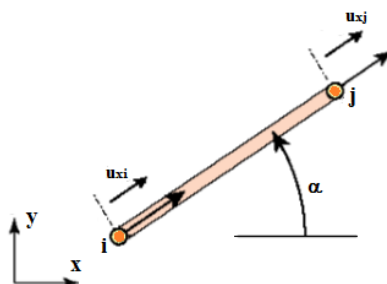


Figura 1 – Elemento finito de treliça plana.

No sistema de coordenadas globais a matriz \mathbf{K}_e e o vetor \mathbf{F}_e são determinados por, respectivamente:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T} \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_e \quad (6)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de rotação dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \quad (7)$$

Na matriz \mathbf{T} , $C = \cos(\alpha)$ e $S = \sin(\alpha)$, sendo que o ângulo α é atualizado a cada iteração em função das coordenadas x, y na configuração deformada da estrutura.

Em adição, é incorporada a variável escalar dano $d \in [0,1]$ na rigidez axial do elemento de barra. Para descrever o comportamento do material, utiliza-se um modelo baseado na Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998). Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial, a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ é expressa por:

$$\bar{\sigma} = E_0 \varepsilon \tag{8}$$

O limite de dano inicial r_0 é uma propriedade do material e pode ser relacionado à tensão limite de proporcionalidade f_0 da seguinte forma:

$$r_0 = B_1 \frac{f_0}{\sqrt{E_0}} \tag{9}$$

onde B_1 é um parâmetro do modelo. Define-se a norma da tensão efetiva $\tau(\bar{\sigma})$ por:

$$\tau(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{E_0}} \tag{10}$$

A partir das relações de Kuhn - Tucker, o limite de dano é dado pelo máximo valor da variável τ durante o processo de carregamento, tal que:

$$r = \text{máx}(r_0, \tau) \tag{11}$$

A partir das Equações (8) e (10), τ pode ser expresso em termos da deformação ε por:

$$\tau(\varepsilon) = \sqrt{E_0} \varepsilon \tag{12}$$

A variável dano d é escrita em função do módulo H e do limite de dano r por:

$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)} \tag{13}$$

Variando-se a função que descreve o módulo H , tem-se na Figura 2 em (a) o regime elastodegradável perfeito (perfeitamente plástico), em (b) o encruamento linear positivo (endurecimento), em (c) o encruamento linear negativo (abrandamento), e em (d) o abrandamento exponencial.

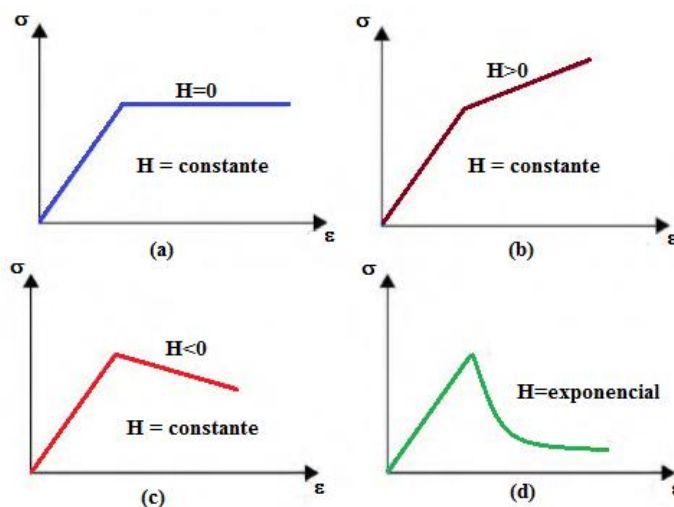


Figura 2 – Comportamentos distintos de endurecimento/abrandamento.

Para o caso de um procedimento incremental, o dano d no passo de força $t+\Delta t$ pode ser obtido a partir das deformações na barra (ϵ), a cada iteração k , pelo algoritmo do modelo constitutivo de dano diferenciado à tração e à compressão apresentado na Figura 3. No algoritmo, os limites de dano inicial r_{0c} e r_{0t} são referentes à compressão e à tração, respectivamente, e os módulos H_c e H_t referem-se à compressão e à tração, respectivamente.

Ao modelo é incorporado o critério de falha da Máxima Tensão. A falha da barra ocorre quando a seguinte inequação for satisfeita:

$$B_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{últ}}} \right)^2 \geq 1 \tag{14}$$

onde σ_1 é a tensão principal na direção 1, $\sigma_{\text{últ}}$ é a tensão última à tração ou à compressão na direção 1, e B_2 é uma constante.

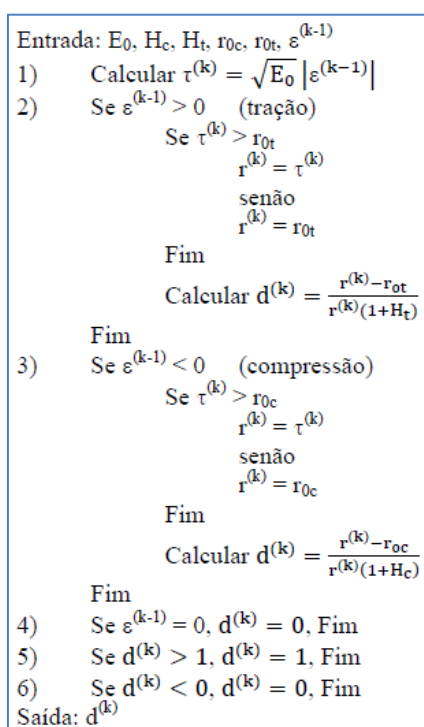


Figura 3 – Algoritmo para o modelo de dano diferenciado à tração e à compressão.

3. MÉTODO DE SOLUÇÃO

Algoritmos existentes de métodos de solução apresentam como passo fundamental a avaliação do vetor de força residual ${}^{t+\Delta t}\mathbf{g}^{(k-1)}$, e uma nova estimativa para os deslocamentos é obtida por meio do sistema de equações:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(k)} \mathbf{F}_r - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{(k-1)} \tag{15}$$

onde ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(k-1)}$ é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural, $\delta \mathbf{u}^{(k)}$ é o vetor de deslocamentos residuais, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$ é o vetor de forças internas, e ${}^{t+\Delta t}\lambda^{(k)}$ é o parâmetro de força total. No sistema de equações dado em (15) o superíndice direito refere-se à iteração e o superíndice esquerdo ao passo de incremento de força. Para a determinação do parâmetro de força iterativo utiliza-se a estratégia Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM). O

parâmetro de força total λ e o vetor de deslocamentos totais \mathbf{u} são obtidos pelas seguintes equações no passo $t+\Delta t$ e iteração k , respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\lambda^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(k-1)} + {}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} \tag{16}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k-1)} + {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k)} \tag{17}$$

A técnica GDCM foi apresentada por Yang e Shieh (1990) e consiste na utilização de um parâmetro geral de rigidez (GSP), que é definido pela seguinte equação (RODRIGUES et al., 2008):

$$GSP = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}} \tag{18}$$

onde ${}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ é o vetor de deslocamentos da primeira iteração referente ao primeiro passo de força. O parâmetro do incremento de força ${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)}$ é calculado por:

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} = -\frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}} \tag{19}$$

O sinal do incremento inicial de força (${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)}$) pode ser positivo ou negativo. A escolha do sinal correto é de suma importância na definição de sequências de soluções que permitam o avanço na resposta força - deslocamento. O parâmetro de rigidez generalizado (GSP) depende exclusivamente dos vetores ${}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ (passo de força anterior) e ${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ (passo de força corrente). A mudança de sinal do parâmetro GSP serve como um indicador para a mudança do sentido de crescimento da força, uma vez que o mesmo torna-se negativo somente nos incrementos da força imediatamente após a passagem por pontos limites.

Há possibilidade de que o deslocamento tangente tenda ao infinito em pontos próximos a um ponto limite da trajetória de equilíbrio. Para evitar que isso ocorra, limitou-se esse deslocamento a um valor máximo $\delta u_{m\acute{a}x}$, de forma que se $\|\delta\mathbf{u}\| > \delta u_{m\acute{a}x}$, então (KRENK, 1995):

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} = \frac{\delta u_{m\acute{a}x}}{\|\delta\mathbf{u}_r^{(k)}\|} {}^1\delta\lambda^{(1)} \tag{20}$$

Uma estratégia adaptativa que pode ser muito útil no emprego da técnica de controle de força é a determinação automática da variação do parâmetro de força inicial (${}^1\delta\lambda^{(1)}$) para a definição do valor do parâmetro de força para a primeira iteração (${}^{t+\Delta t}\lambda^{(1)}$), que consiste em, ao final de cada passo da análise, monitorar o número de iterações requeridas para a convergência (N_{it}) da técnica iterativa e comparar esse número com um valor ótimo (N_{ot}). Por meio desta monitoração, calcula-se ${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)}$ para o passo de força seguinte por (RAMM, 1981; CRISFIELD, 1991):

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)} = \pm \sqrt{\frac{N_{ot}}{N_{it}}} {}^1\delta\lambda^{(1)} \sqrt{|GSP|} \tag{21}$$

Na Figura 4 é apresentado o algoritmo implementado referente ao método de Newton - Raphson associado à estratégia GDCM.

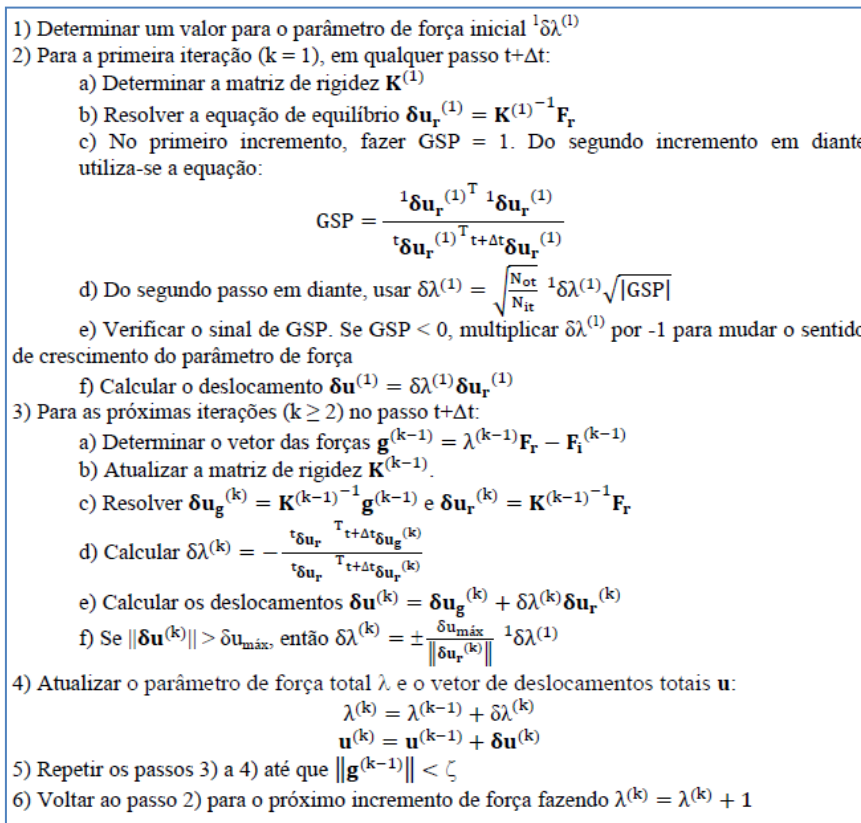


Figura 4 – Algoritmo para o método de Newton-Raphson associado à técnica GDCM.

4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas de treliças planas encontrados na literatura levando-se em conta na análise estática por Elementos Finitos as não linearidades física e/ou geométrica, com o objetivo de verificar o modelo implementado com o programa gratuito Scilab. Em todas as análises estruturais considerou-se a tolerância (ζ) para a verificação da convergência a cada iteração (k) igual a 10^{-5} , o número de iterações desejadas (N_{ot}) igual a 5 e o deslocamento máximo ($\delta u_{máx}$) igual a $\|{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}\|$. Em todos os problemas é desprezado o peso próprio das estruturas.

4.1 Problema de uma barra com não linearidade geométrica

Este problema objetiva avaliar o modelo implementado quanto à análise não linear geométrica. Na Figura 5 é apresentada uma treliça constituída de uma barra e sujeita a uma força concentrada P aplicada no nó 2 de tal forma que ocasiona um deslocamento vertical v para baixo. Consideram-se as seguintes propriedades materiais e geométricas para a estrutura: $E_0A_0 = 5 \cdot 10^7$ N, $L = 2500$ cm e $z = 25$ cm. Este problema foi estudado, entre outros autores, por Pecknold et al. (1985), Crisfield (1991) e Rodrigues (2000).

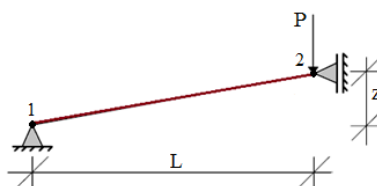


Figura 5 – Esquema estrutural da treliça constituída por uma barra.

Para a simulação com a estratégia de solução GDCM foi adotado o incremento inicial do parâmetro de força ${}^1\delta\lambda^{(1)} = 3,1$, o número de incrementos de força $N = 28$, e o incremento de força $\Delta P = 1,0$ N. As curvas numéricas deslocamento vertical no nó 2 *versus* força são mostradas na Figura 6. Observa-se, nessa figura, que a resposta predita pelo modelo implementado obteve boa concordância com o resultado obtido por Rodrigues (2000), apresentando dois pontos limites de força na trajetória de equilíbrio.

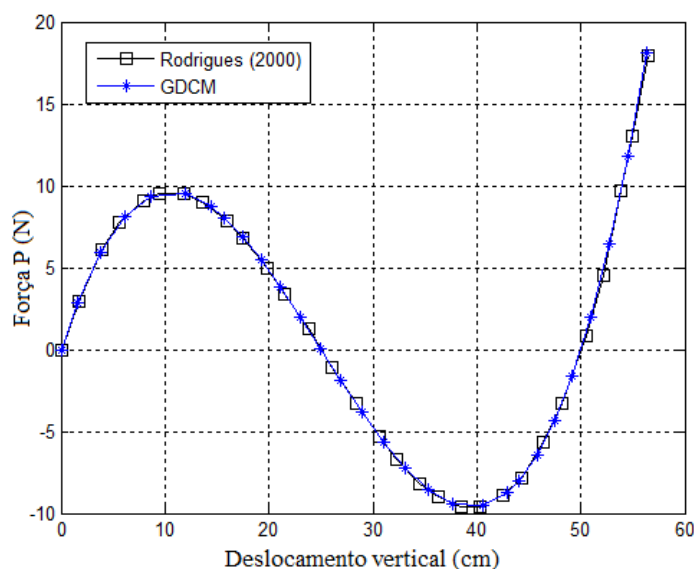


Figura 6 – Curvas numéricas deslocamento vertical no nó 2 *versus* força.

4.2 Problema de treliça hiperestática com não linearidade física

Na Figura 7 é mostrada uma estrutura de treliça plana estaticamente indeterminada com duas forças concentradas P aplicadas simetricamente. As propriedades do material e do modelo de dano são apresentadas na Tabela 1. Esta estrutura foi analisada por Powell e Simons (1981) e Gutiérrez (2014). Na análise estática assume-se a hipótese de pequenas deformações. Para as simulações com a estratégia de solução GDCM, adotam-se o incremento inicial do parâmetro de força ${}^1\delta\lambda^{(1)} = 3,0$ e o incremento de força $\Delta P = 1,0$ kN.

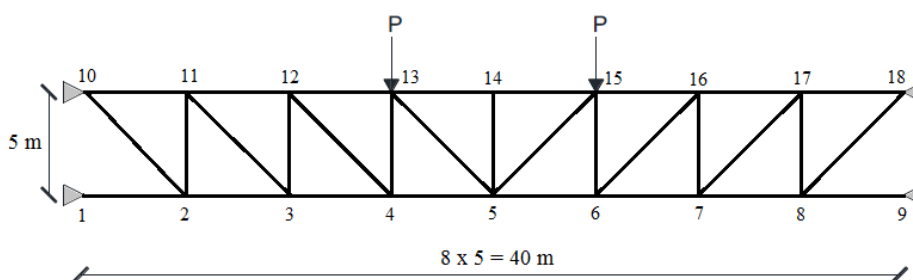


Figura 7 – Treliça hiperestática sujeita a duas forças concentradas.

Na Figura 8 apresentam-se as respostas do deslocamento vertical no nó 5 *versus* a força concentrada P , considerando dois comportamentos materiais distintos: perfeitamente plástico ($H_c = H_t = 0,00$); e encruamento linear ou endurecimento ($H_c = H_t = 0,02$). Fazendo a análise dessa figura, vê-se que os resultados numéricos obtidos com o modelo de dano implementado ficaram bastante próximos aos apresentados por Gutiérrez (2014). Comparando

as trajetórias de equilíbrio quanta às análises com os dois comportamentos materiais, as mesmas são coincidentes até a força P igual a 40,7333 kN, aproximadamente. As barras 1-2, 4-5, 5-6 e 8-9 atingem a tensão de escoamento em primeiro, apresentando comportamento plástico. No entanto, considerando a análise com o endurecimento do material, vê-se que a treliça ficou mais rígida aumentando assim a sua capacidade resistente. Na simulação com comportamento perfeitamente plástico considerou-se o número de passos de força $N = 123$, e na simulação com endurecimento $N = 269$.

Tabela 1 – Parâmetros do material e do modelo de dano.

Parâmetro	Valor
$E_0 A_0$	10^5 kN
$f_{0c} = f_{0t}$	65,0 MPa (diagonais) 61,1 MPa (demais barras)
$H_c = H_t$	0,0 (perfeitamente plástico) 0,02 (endurecimento)
B_1	1,00

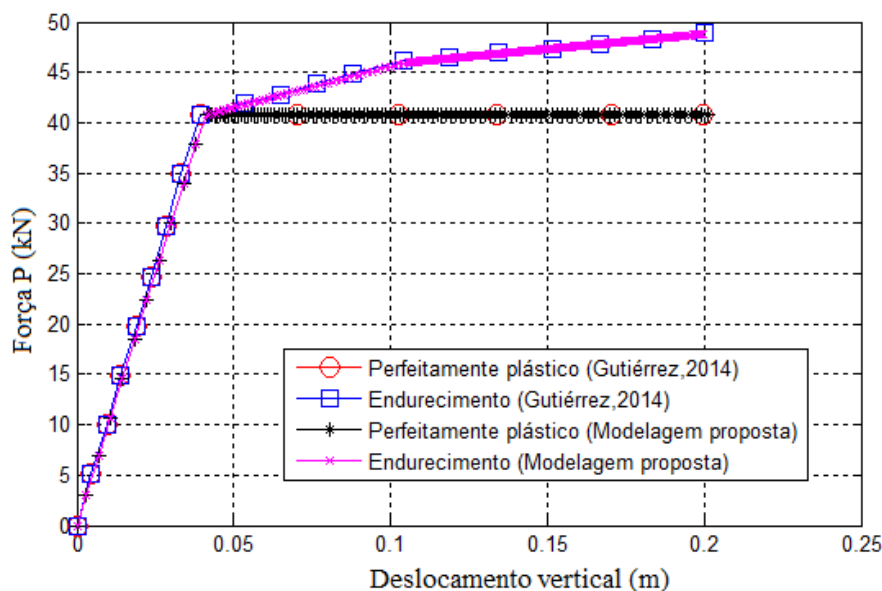


Figura 8 – Curvas numéricas deslocamento vertical no nó 5 versus força P .

4.3 Problema de uma grua com não linearidade geométrica e física

A estrutura consiste de uma treliça do tipo grua cujas barras têm mesmo módulo de elasticidade inicial ($E_0 = 210$ GPa) e mesma área da seção transversal ($A_0 = 0,002$ m²). A treliça está submetida às forças concentradas P_1 e P_2 conforme o desenho esquemático apresentado na Figura 9. Este problema foi estudado por Segnini (2000) quanto à não linearidade geométrica. Nas análises, consideraram-se os incrementos de força $\Delta P_1 = 10$ kN e $\Delta P_2 = 5$ kN.

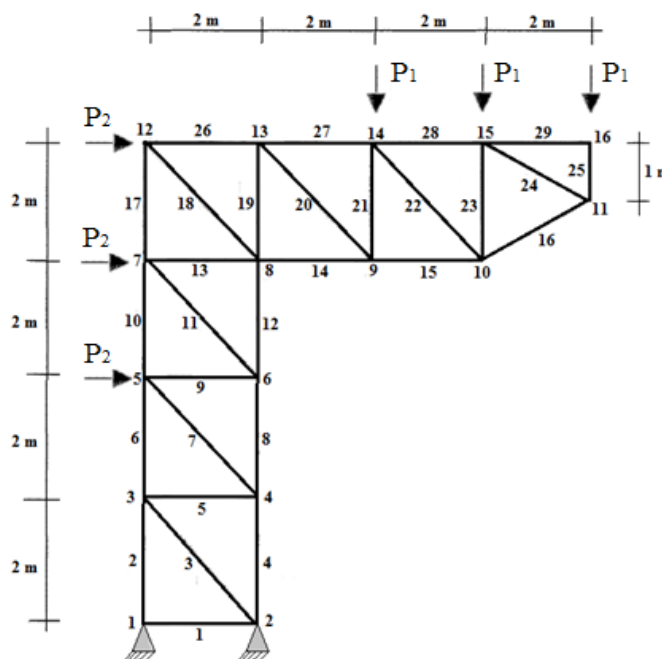


Figura 9 – Esquema estrutural da treliça plana tipo grua.

Na Figura 10 é apresentada a evolução do deslocamento vertical no nó 11 da malha *versus* a força P_1 considerando a não linearidade geométrica (NLG). Vê-se que a trajetória de equilíbrio obtida com o modelo implementado ficou bastante próxima às obtidas pelo programa computacional desenvolvido por Segnini (2000) e pelo programa Ansys (Segnini, 2000). Na simulação, adotou-se o incremento inicial do parâmetro de força ${}^1\delta\lambda^{(1)} = 0,5$.

As curvas numéricas deslocamento vertical x força P_1 para as análises considerando a não linearidade física (NLF) e as não linearidades física e geométrica (NLFG) são comparadas na Figura 11. As simulações foram conduzidas até o colapso global da estrutura (no momento em que a barra 2-4 falha, isto é, quando a relação $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{ult}}}\right)^2 \geq 1$ é satisfeita na verificação do critério de resistência para o elemento). No que concerne aos parâmetros adotados para o modelo de dano e o critério de resistência, esses são apresentados na Tabela 2. Adotou-se o incremento inicial do parâmetro de força ${}^1\delta\lambda^{(1)} = 2,0$ nas simulações.

Tabela 2 – Parâmetros do modelo de dano e do critério de resistência.

Parâmetro	Valor
$f_{0c} = f_{0t}$	250,0 MPa
$H_c = H_t$	0,02 (endurecimento)
σ_{ult}	402,0 MPa
B_1	1,00
B_2	1,00

Observa-se na Figura 11 que na análise considerando a NLFG o sistema torna-se menos rígido a partir de certo incremento de força em comparação com a NLF, ocorrendo o colapso da estrutura para uma intensidade da força P_1 menor (cerca de 4,743 %), conforme os valores apresentados na Tabela 3, evidenciando a importância de se considerar na análise os efeitos simultâneos de ambas as não linearidades.

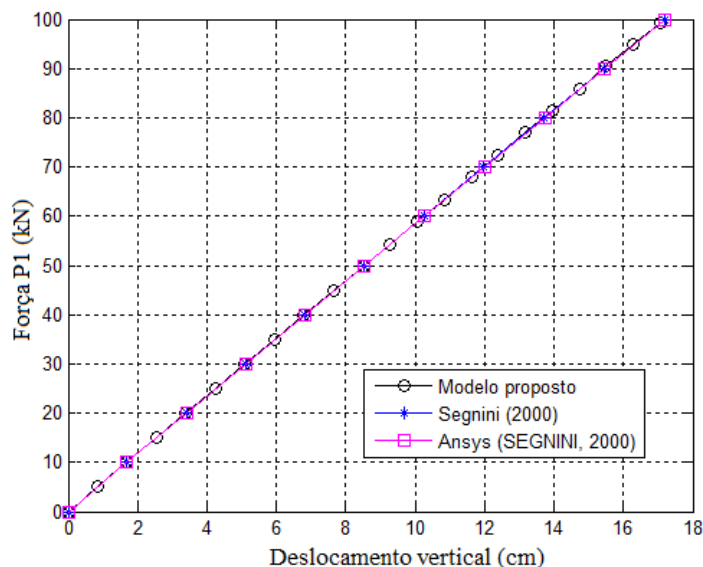


Figura 10 – Curvas numéricas deslocamento vertical no nó 11 versus força P₁.

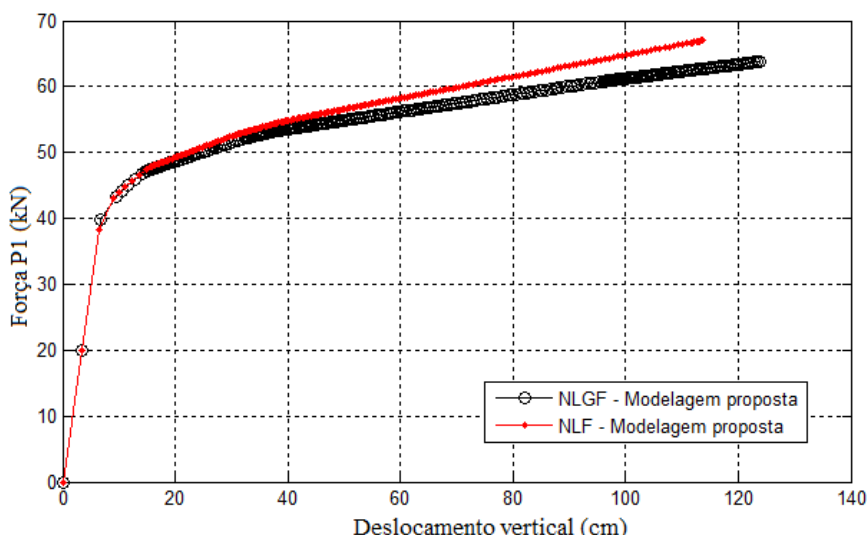


Figura 11 – Curvas numéricas deslocamento vertical no nó 11 versus força P₁.

Tabela 3 – Valores da força última P₁ para cada tipo de análise.

Tipo de análise	Valor (kN)
Não linear - NLF	66,9991
Não linear - NLGF	63,8209

5. CONCLUSÕES

A partir dos resultados obtidos do estudo de problemas encontrados na literatura, o programa desenvolvido neste trabalho, baseado em um processo incremental-iterativo, apresenta potencialidade na análise estrutural de treliças planas considerando as não linearidades física e geométrica, possibilitando ao projetista estimar a capacidade resistente última das mesmas (carregamento último e deslocamento máximo correspondente).

A análise com modelos constitutivos baseados na Mecânica do Dano Contínuo constitui uma válida alternativa para o estudo do comportamento estrutural. No entanto, a

aplicação de tais modelos em situações práticas fica prejudicada pela identificação experimental dos parâmetros contidos nas leis de evolução das variáveis de dano.

O uso corrente de modelos não lineares na análise estrutural está relacionada a problemas numéricos e instabilidades na convergência; a inclusão da técnica de iteração baseada no Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM) em associação com o método de Newton-Raphson para a solução do problema mostrou-se eficiente na obtenção das trajetórias de equilíbrio passando por pontos limites (pontos críticos).

Para desenvolvimentos futuros, sugere-se a implementação de algoritmos que permitam efetuar ciclos de carregamento e descarregamento, a consideração da flambagem nas análises e, também, adequar o código implementado para estudos em análise dinâmica.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece à UTFPR pelo apoio financeiro para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

BATHE, K.; DVORKIN, E. N. *On the automatic solution of nonlinear finite element equations. Computers & Structures* 17, p. 871-879, 1983.

CRISFIELD, M. A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol. 1. Essentials, Chichester, John Wiley & Sons, Inc., 1991.*

GUTIÉRREZ, M. P. D. *Análise elastoplástica de estruturas metálicas usando o conceito de rótulas plásticas e o algoritmo de retorno radial. Dissertação (mestrado), Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Brasília, Brasil, 2014.*

KRENK, S. *An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations. Int. J. Numer. Methods Eng. v. 38, p. 823-839, 1995.*

KRIPKA, M.; PRAVIA, Z. M. C.; DIAS, M. M.; MEDEIROS G. F. *Minimização do peso de treliças de alumínio pela otimização simultânea da seção transversal dos elementos e da geometria: análise numérica e validação experimental. Revista Eletrônica de Engenharia Civil - REEC, v. 7, n. 2, p. 19-26, 2013.*

LACERDA, E. G. M. *Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.*

LEITE, F. N. *Uma formulação teórica consistente para análise não linear de estruturas treliçadas espaciais. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2000.*

MANZOLI, O. L. *Um modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes em la mecânica de sólidos. Tese (Doutorado), Escola Técnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1998.*

PECKNOLD, D. A.; GHABOUSSI, J.; HEALEY, T. J. *Snap-through and Bifurcation in a Simple Structure. Journal of Engineering Mechanics, v. 111, n. 7, p. 909-922, 1985.*

POWELL, G.; SIMONS, J. *Improved iteration strategy for nonlinear structures. International Journal for Numerical Methods in Engineering* 17, p. 1455-1467, 1981.

RAMM, E. *Strategies for tracing the Non-linear Response Near Limit Points. Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Wunderlich, W., Stein, E. and Bathe, K. -J. (eds), New York, Springer-Verlag, p. 63-89, 1981.*

RODRIGUES, P. F. N. *Ferramentas Numéricas para a Análise Não-Linear Física e Geométrica de Estruturas Reticuladas na Exploração de Petróleo Offshore. Tese (Doutorado), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.*

RODRIGUES, P. F. N.; VARELA, W. D.; SOUZA, R. A. *Análise de estratégias de solução do problema não linear. Revista de Ciência & Tecnologia, v. 8, n. 2, p. 36-48, 2008.*

SANTOS, G. F.; SILVA, J. G. S.; SOEIRO, F. J. C. P.; NETO, A. J. S. N. *Identificação de dano e análise de sensibilidade em treliças de aço. In: Mecânica Computacional, Vol. XXIX, 2010, Buenos Aires. Anais... Buenos Aires: Mecânica Computacional, Vol. XXIX, 2010.*

SEGNINI, S. C. A. *Estudo comparativo de formulações para a análise não linear geométrica de treliças. Mestrado (Dissertação), Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.*

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. *Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. AIAA Journal, v. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.*