

# MODELAGEM TÉRMICA DE UM BLOCO DE CONTRAFORTES ATRAVÉS DE DADOS DE TERMÔMETROS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Tasia Hickmann (UTFPR) hickmann@utfpr.edu.br  
Liliana Madalena Gramani (UFPR) l.gramani@gmail.com  
Eloy Kaviski (UFPR) eloy.dhs@ufpr.br  
Luis Antonio Sucapuca Aracayo (UNILA) kasu.suca@gmail.com  
Everton Luis Garcia (PTI) everton@pti.org.br

**Resumo:** Este trabalho consiste em um estudo de caso que aborda o tema transferência de calor por condução em um bloco de uma barragem do tipo contrafortes com o objetivo de propiciar um método para aproximar os valores dos coeficientes térmicos do concreto: condutividade térmica, massa específica e calor específico, no caso de não existirem informações reais desses valores através de ensaios em laboratório. Para que tais coeficientes sejam representativos, inicialmente aproximações dos dados observados dos termômetros inseridos no bloco são realizadas por meio de séries de Fourier graças a sazonalidade da variável temperatura no bloco. Os dados ajustados de três termômetros são utilizados como condições de contorno para obter a solução da equação da difusão do calor e o modelo é calibrado e validado a partir de dados de outros quatro termômetros. Os processos de calibração e validação são executados através do método dos elementos finitos implementado no software Ansys.

**Palavras-chave:** Barragem de concreto, equação do calor, série de Fourier, Ansys.

## THERMAL MODELING OF A BLOCK OF BUTTRESS THROUGH THERMOMETERS DATA AND THE FINITE ELEMENT METHOD

**Abstract:** This work is a case study that approaches the issue heat transfer by conduction in a block of a dam buttress with the objective of providing a method to approximate the values of the thermal coefficients of concrete: thermal conductivity, density and specific heat, if there are no real information of these values through laboratory tests. So that these coefficients are representative, in the first time approximations of observed data of thermometers inserted in the block are held by means of Fourier series due to seasonality of the temperature variable in the block. The adjusted data from three thermometers are used as boundary conditions for the solution of the heat diffusion equation and the model is calibrated and validated using data from four other thermometers. The calibration and validation processes are executed by the finite element method implemented in Ansys software.

**Keywords:** Concrete dam, heat equation, Fourier series, Ansys.

### 1. INTRODUÇÃO

Altos índices de variação de temperatura podem afetar o desempenho, resistência e durabilidade das estruturas, de modo que a correta avaliação do campo de temperaturas é essencial para a determinação das tensões de origem térmica. Diversos trabalhos presentes na literatura destacam a importância de se analisar os efeitos da temperatura no desempenho estrutural de barragens. ((ANSELL, A.; MALM, R., 2008), (LÉGER; LECLERC, 2007), (MIRZABOZORG, *et al.*, 2014) e (SILVA, 2014))

As barragens, por sua vez, podem ser classificadas em dois grandes grupos, de acordo com o material utilizado na sua construção: barragens de concreto, que podem ser do tipo a gravidade, a arco e contrafortes e barragens convencionais de terra e/ou enrocamento.

A transferência de calor por condução em um bloco de uma barragem do tipo contrafortes é abordada neste trabalho, com o objetivo de propiciar um método para aproximar os valores dos coeficientes térmicos do concreto: condutividade térmica, massa

específica e calor específico, no caso de não existirem informações reais desses valores através de ensaios em laboratório. Os registros de temperaturas entre os anos 1985 e 2014 dos termômetros instalados à superfície e no interior do bloco em estudo proporcionaram a calibração e validação do modelo térmico descrito pela equação da difusão do calor. A Figura 1 trata da geometria do bloco e a localização dos termômetros, sendo \$4\$ superficiais (TS-D-903, TS-D-904, TS-E-1 e TS-D-5) e \$3\$ internos (TI-E-1, TI-E-2 e TI-E-3).

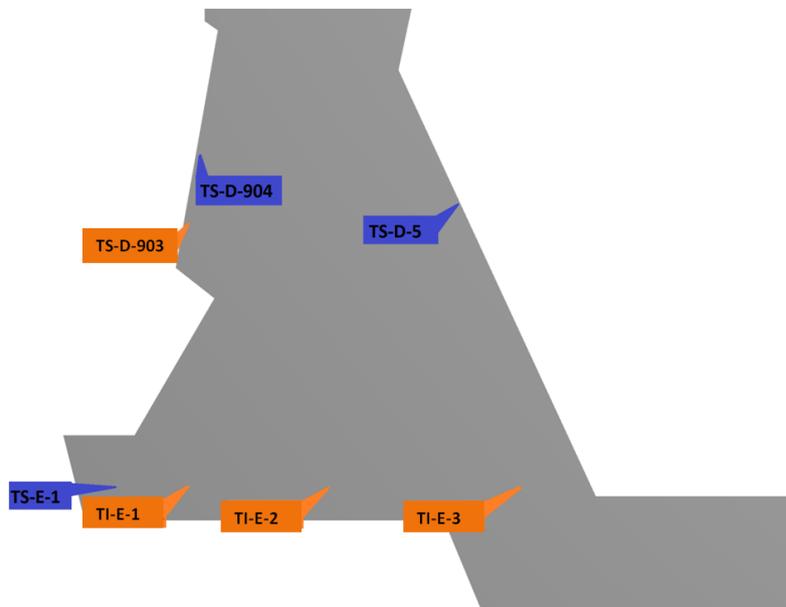


Figura 1 - Geometria do bloco de contrafortes e a localização dos termômetros.

Inicialmente tomou-se os 20 primeiros anos (1985-2004) de dados de temperaturas de 7 termômetros e uma vez que estes registros não eram diários, no início semanais, depois quinzenais e por fim mensais, e considerando o caráter sazonal da temperatura, construiu-se uma série de Fourier com período de 365,25 dias que forneceu a temperatura em qualquer instante do tempo para cada um dos termômetros presentes no bloco.

A distribuição bidimensional da temperatura transiente no interior do bloco para o 'ano médio', o qual representou o período de 1985 a 2004, descrita pela equação da difusão do calor, foi obtida através do método dos elementos finitos implementado no software Ansys. As condições inicial e de contorno necessárias para solução da equação consistiram das temperaturas do 'ano médio' ajustadas pela série de Fourier para 3 termômetros presentes na superfície do bloco (TS-D-904, TS-E-1 e TS-D-5) e os parâmetros térmicos do concreto foram estabelecidos após feita a calibração do modelo por meio das temperaturas de \$1\$ termômetro superficial (TS-D-903) e os 3 termômetros internos (TI-E-1, TI-E-2 e TI-E-3) deste mesmo 'ano médio'.

O modelo foi considerado calibrado quando, para fixados valores dos coeficientes térmicos, o MAPE (Erro Percentual Absoluto Médio) obtido entre os dados de temperaturas via série de Fourier e aqueles obtidos através da solução numérica da equação do calor (via Ansys) foi menor que 20% nos pontos onde se localizam os termômetros TS-D-903, TI-E-1, TI-E-2 e TI-E-3.

A última etapa consistiu na validação do modelo térmico, onde foram tomados dados dos últimos 10 anos (2005-2014). Tal processo ocorreu de modo similar ao processo de calibração, apenas diferenciando no fato que os coeficientes térmicos já foram determinados na fase de calibração, sendo apenas feito nesta etapa a comparação entre os dados de

temperatura obtidos via séries de Fourier e via Ansys para os mesmos termômetros utilizados na fase anterior.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: A primeira seção trata da formulação matemática da equação da difusão. Na seção seguinte é introduzida a formulação em elementos finitos implementada no software Ansys. A terceira seção apresenta um estudo de caso de um bloco de uma barragem de contrafortes, onde serão definidas as séries de Fourier dos termômetros, a determinação dos coeficientes térmicos do concreto através da calibração e validação do modelo térmico.

## 2. EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DO CALOR

A base para a análise térmica no Ansys é a equação do balanço de calor, obtida a partir do princípio de conservação da energia ou a primeira lei da termodinâmica, que pode ser escrita como:

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \{\mathbf{v}\}^T \{\mathbf{L}\} T \right) + \{\mathbf{L}\}^T \{\mathbf{q}\} = \ddot{q}, \quad (1)$$

onde:

$\rho$  = densidade,

$c$  = calor específico,

$T$  = Temperatura,

$$\{\mathbf{L}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T,$$

$\{\mathbf{v}\} = \{v_x \quad v_y \quad v_z\}^T$  = vetor velocidade para transporte de massa de calor,

$\{\mathbf{q}\}$  = vetor fluxo de calor,

$\ddot{q}$  = taxa de geração de calor por unidade de volume.

A lei de Fourier é utilizada para relacionar fluxo de calor e gradientes térmicos:

$$\{\mathbf{q}\} = -[\mathbf{D}]\{\mathbf{L}\} T, \quad (2)$$

onde:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix} = \text{matriz de condutividade, com } k_{xx}, k_{yy} \text{ e } k_{zz} \text{ condutividades do}$$

material nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Combinando as Equações (1) e (2), obtém-se a equação de conservação da energia em coordenadas cartesianas:

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \{v\}^T \{L\} T \right) + \left( \{L\}^T [D] \{L\} \right) T = \ddot{q}. \quad (3)$$

Como é de conhecimento comum, soluções analíticas para problemas de condução de calor são restritas a casos onde o grau de complexidade da geometria e das condições de contorno são relativamente baixas. Sugere-se assim o estudo de soluções através de métodos aproximados, um deles é o Método dos Elementos Finitos, que será brevemente abordado na seguinte seção.

### 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma metodologia numérica para obtenção de solução numérica de equações na forma diferencial ou integral. Geralmente o MEF permite aos utilizadores obter a evolução no espaço e/ou tempo das variáveis que representam o comportamento de um sistema físico. O fluxograma adaptado de (LEWIS, *et al.*, 2004) apresentado através da Figura 2 traz resumidamente os passos a serem executados numa análise numérica através do MEF.

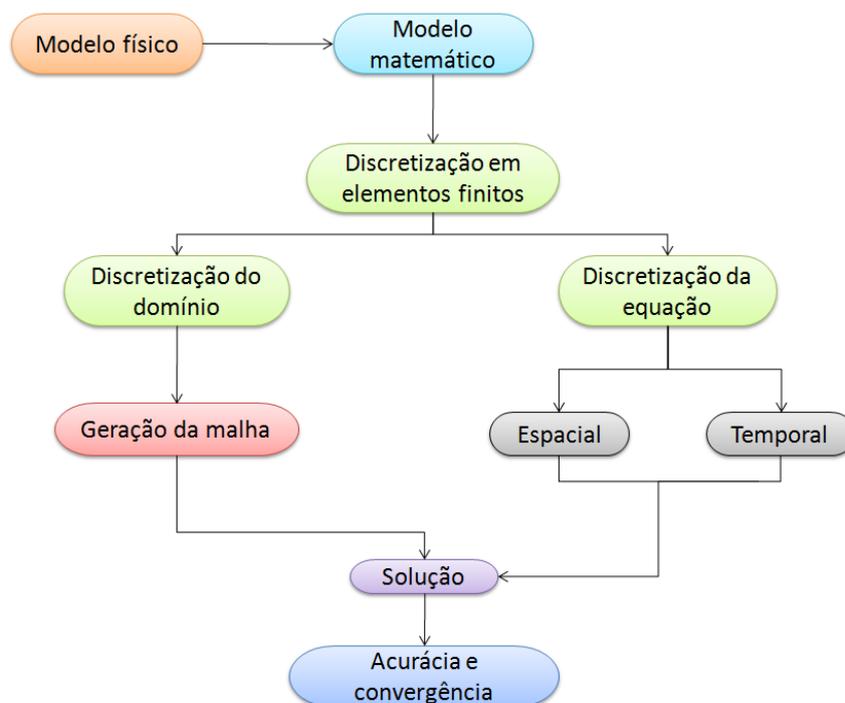


Figura 2 - Esquema para análise numérica através do MEF.

Após realizada a geração da malha da geometria em estudo e feita a discretização da Equação (3) no domínio temporal e espacial, o processo a determinação do campo de temperatura e outras variáveis secundárias, como o fluxo de calor, só pode ser completa através do MEF se forem inseridas condições iniciais e de contorno, estas são descritas na seção que segue.

#### 3.1 Condições Iniciais e de Contorno

Considere uma região  $\Omega$  cuja superfície de contorno é denotada por  $S$ , conforme a Figura 3. A fim de definir um problema da transferência de calor, além da formulação das equações no domínio de estudo, é necessário especificar as condições iniciais e de fronteira. Relativamente

às condições iniciais, deve ser definida a temperatura no instante inicial,  $t = t_0$ , no domínio  $\Omega$ , ou seja,  $T(x,y,z,t_0) = T_0(x,y,z)$ .

As condições de contorno sobre a superfície da região em análise  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  para problemas desta natureza podem ser de três tipos e estão ilustradas, conforme \cite{SI}, na Figura 3, e são como:

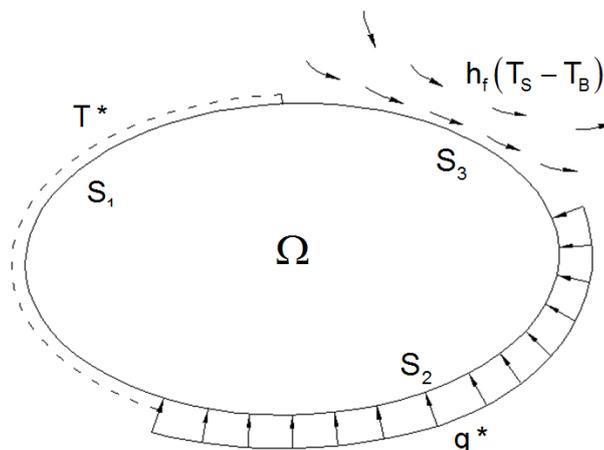


Figura 3 - Domínio e fronteiras de Newmann, Dirichlet e Robin convectiva.

1. Temperatura especificada atuando na superfície  $S_1$ , e neste caso é dito que a condição de fronteira é do tipo Dirichlet ou essencial:

$$T = T^* \tag{4}$$

2. Fluxo de calor específico atuando na superfície  $S_2$ , conhecida como condição de fronteira de Neumann ou natural onde  $\{n\}$  é o vetor unitário normal à superfície e  $q^*$  é o fluxo de calor específico:

$$\{q\}^T \{n\} = -q^* \tag{5}$$

3. Superfícies de convecção especificadas atuando sobre a superfície  $S_3$ , chamada de condição de fronteira de Robin convectiva, onde  $h_f$  é o coeficiente de convecção,  $T_s$  é a temperatura na superfície e  $T_B$  é a temperatura de um fluido adjacente à superfície:

$$\{q\}^T \{n\} = h_f (T_s - T_B) \tag{6}$$

Combinando as Equações (2), (5) e (6), obtêm-se:

$$\{n\}^T [D] \{L\} T = q^* \tag{7}$$

$$\{n\}^T [D] \{L\} T = h_f (T_B - T_s) \tag{8}$$

Pré-multiplicando a Equação (3) por uma variação na temperatura, integrando sobre o volume do elemento e combinando com as Equações (7) e (8), com algumas manipulações algébricas, chega-se à seguinte equação:

$$\int_{vol} \left( \rho c \delta T \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \{v\}^T \{L\} T \right) + \{L\}^T (\delta T) ([D] \{L\} T) \right) d(vol) \tag{9}$$

$$= \int_{S_2} \delta T q^* d(S_2) + \int_{S_3} \delta T h_f (T_B - T_S) d(S_3) + \int_{vol} \delta T \ddot{q} d(vol),$$

onde:

$$\delta T = \delta T(x, y, z, t),$$

vol = volume do elemento.

### 3.2 Formulação Matricial

A temperatura para cada elemento,  $\Omega^e$ , pode ser representada como:

$$T = \{N\}^T \{T_e\}, \tag{10}$$

onde:

$$T = T(x, y, z, t) = \text{temperatura},$$

$$\{N\} = \{N(x, y, z)\} = \text{funções base do elemento},$$

$$\{T_e\} = \{T_e(t)\} = \text{vetor de temperaturas nodais do elemento}.$$

Derivando em relação ao tempo a Equação (10), a expressão para  $\delta T$  e  $\{L\}T$  ficam, respectivamente:

$$\delta T = \{\delta T_e\}^T \{N\}, \tag{11}$$

$$\{L\}T = [B] \{T_e\}, \tag{12}$$

onde  $[B] = \{L\} \{N\} T$ .

Como as quantidades  $\{T_e\}$ ,  $\{\dot{T}_e\}$  e  $\{\delta T_e\}$  não variam sobre o elemento, ao tomar-se a Equação (9) combinada com as Equações (10)-(12) conclui-se que:

$$[C_e^t] \{\dot{T}_e\} + ([K_e^{tm}] + [K_e^{tb}] + [K_e^{tc}]) \{T_e\} = \{Q_e^f\} + \{Q_e^c\} + \{Q_e^g\}, \tag{13}$$

onde:

$$[C_e^t] = \rho \int_{vol} \rho c \{N\} \{N\}^T d(vol),$$

$$[K_e^{tm}] = \rho \int_{vol} c \{N\} \{v\}^T [B] d(vol),$$

$$[K_e^{tb}] = \int_{vol} [B]^T [D][B] d(vol),$$

$$[K_e^{tc}] = \int_{S_3} h_f \{N\} \{N\}^T d(S_3),$$

$$\{Q_e^f\} = \int_{S_2} \{N\} \bar{q} d(S_2),$$

$$\{Q_e^c\} = \int_{S_3} T_B h_f \{N\} d(S_3),$$

$$\{Q_e^g\} = \int_{vol} \bar{q} \{N\} d(vol).$$

## 4. ESTUDO DE CASO

### 4.1 Série de Fourier

A calibração e validação do modelo térmico para o bloco, representado através da Figura 1, teve como primeiro passo o ajuste de uma série de Fourier sobre os dados dos 7 termômetros também visualizados na mesma figura, tal série pode ser representada como na Equação (14):

$$T(t) = y_0 + \sum_{k=1}^N a_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{P}t\right) + b_k \text{cos}\left(\frac{2k\pi}{P}t\right), \quad (14)$$

onde  $t$  é a variável tempo,  $P = 365,25$  dias o período da série,  $T(t)$  a temperatura em um instante  $t$ ,  $N$  o número de harmônicos e os  $2N+1$  coeficientes  $y_0$ ,  $a_k$  e  $b_k$  a serem ajustados através do Método dos Mínimos Quadrados em um código implementado no Matlab.

Já o MAPE é dado pela seguinte expressão:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{T_i - \hat{T}_i}{T_i} \right|}{n}, \quad (15)$$

onde  $n$  é o número de dados observados,  $T_i$  a  $i$ -ésima temperatura observada,  $\hat{T}_i$  o valor aproximado da  $i$ -ésima temperatura determinada através da série (14).

O número de harmônicos e o MAPE para cada um dos 7 termômetros está descrito através das Tabelas 1 e 2:

Tabela 1 - Número de Harmônicos e o respectivo MAPE para o ajuste da série de Fourier dos dados de 1985 a 2004.

	Harmônicos	MAPE (em %)
TS-D-5	45	9.76
TS-D-903	10	2.52
TS-D-904	10	2.55
TS-E-1	10	2.25
TI-E-1	5	1.15
TI-E-2	5	1.38
TI-E-3	5	1.21

Tabela 2 - Número de Harmônicos e o respectivo MAPE para o ajuste da série de Fourier dos dados de 2005 a 2014.

	Harmônicos	MAPE (em %)
TS-D-5	15	9.55
TS-D-903	5	2.6
TS-D-904	5	2.7
TS-E-1	5	1.36
TI-E-1	5	0.71
TI-E-2	5	1.39
TI-E-3	5	0.64

#### 4.2 Generalidades e Hipóteses da Simulação via Ansys

As simulações foram realizadas no ambiente Ansys - Workbench V16.1 e os gráficos no ambiente Thermal Transient - V16.1. A Figura 4 destaca o esquema da análise tem a seguinte configuração:

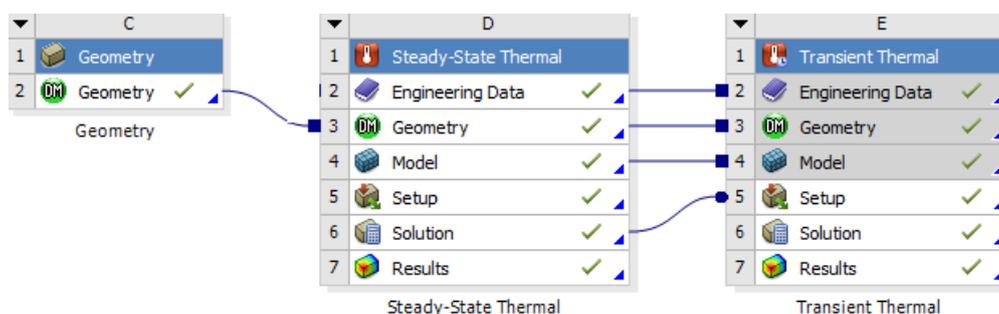


Figura 4 - Esquema da análise transiente no software Ansys.

Algumas simplificações foram consideradas no processo de geração do modelo térmico: homogeneidade do material, comportamento isotrópico e elástico linear do material e simplificações na geometria (chanfros, drenagem, suportes, vigas, e outros) e o coeficiente de Poisson utilizado foi de 0.16.

No problema têm-se 365 valores de temperatura, um para cada dia do ano médio, que equivale a  $3.1536 \times 10^7$  s, esse valor é dividido em 365 steps, ou seja, 1 step equivale a 86400s. Cada step foi dividido em 24 substeps, de modo que cada substep teve 3600s.

### 4.3 Análise Transiente: Fase de Calibração

Inicialmente uma simulação estacionária com os dados do primeiro dia do ano médio, que correspondeu do ano 1985 a 2004, foi realizada com a finalidade do bloco estar com um campo de temperatura em equilíbrio e que seja a temperatura inicial para a análise transiente (veja a Figura 5):

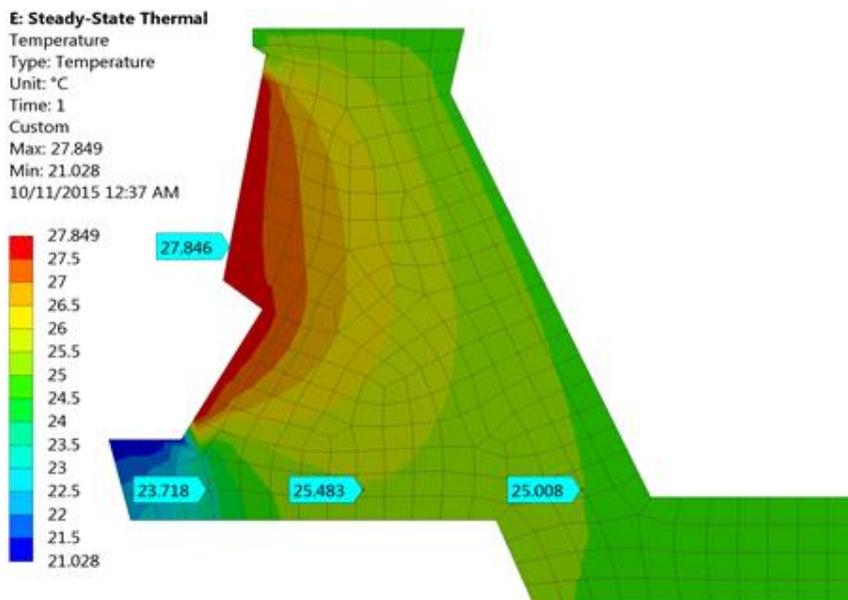


Figura 5 - Campo de Temperatura do primeiro dia do ano médio como condição inicial para a análise transiente na fase de calibração.

As condições de contorno, que são as temperaturas dos termômetros TS-D-5, TS-D-904 e TS-E-1 referentes ao ano médio de 1985 a 2004, são representadas através da Figura 6:

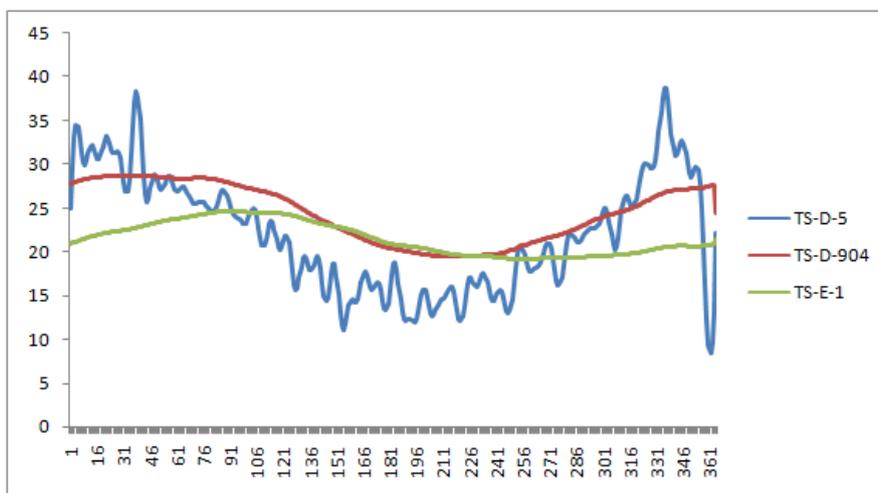


Figura 6 - Gráfico das temperaturas dos termômetros TS-D-5, TS-D-904 e TS-E-1 do ano médio de 1985 a 2004.

Após aplicada as condições inicial e de contorno, variou-se os parâmetros térmicos (condutividade térmica, massa específica e calor específico) de modo a se alcançar um MAPE inferior a 20%. Tais parâmetros encontrados foram: condutividade térmica  $1.2W(mK)^{-1}$ , calor específico  $895.38J(kgK)^{-1}$  e massa específica  $2550kgm^{-3}$ .

A figura 7 apresenta o campo de temperatura após realizada a análise transiente, via Ansys, para o último dia do ano médio. O MAPE determinado pelos valores dos termômetros TS-D-903, TI-E-1, TI-E-2 e TI-E-3 e os obtidos pelo Ansys nos pontos onde estes se localizam foram respectivamente 1.78%, 9.32%, 16.21% e 10.86%, todos abaixo do percentual estipulado de 20%.

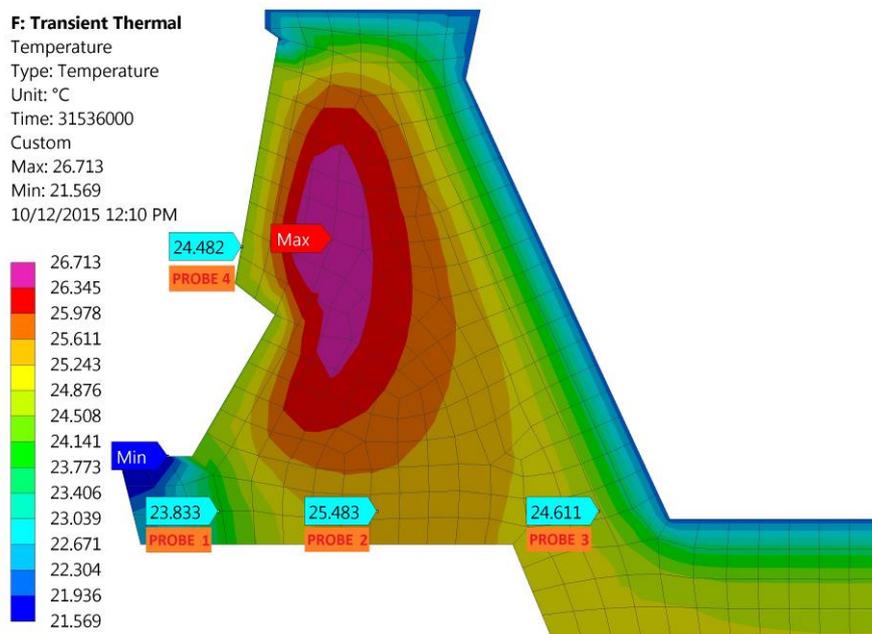


Figura 7 - Campo de temperatura para o último dia do ano médio de 1985 a 2004 após realizada a análise transiente na fase de calibração.

#### 4.4 Análise Transiente: Fase de Validação

Com os parâmetros térmicos calibrados segue-se para a fase da validação do modelo. Novamente uma simulação estacionária com os dados do primeiro dia do ano médio do ano 2005 a 2014 foi realizada para se obter temperatura inicial do bloco para a análise transiente (veja a Figura 8):

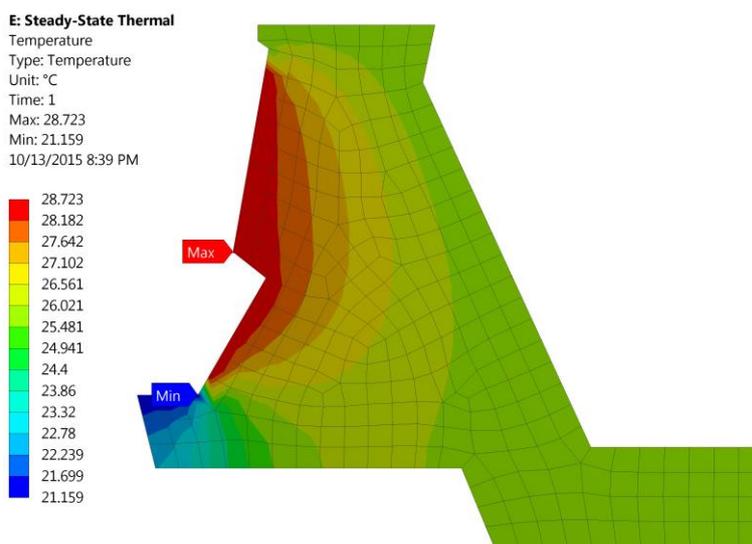


Figura 8 - Campo de Temperatura do primeiro dia do ano médio como condição inicial para a análise transiente na fase de validação.

As condições de contorno, que são as temperaturas dos termômetros TS-D-5, TS-D-904 e TS-E-1 referentes ao ano médio de 2005 a 2014, são representadas através da Figura 9:

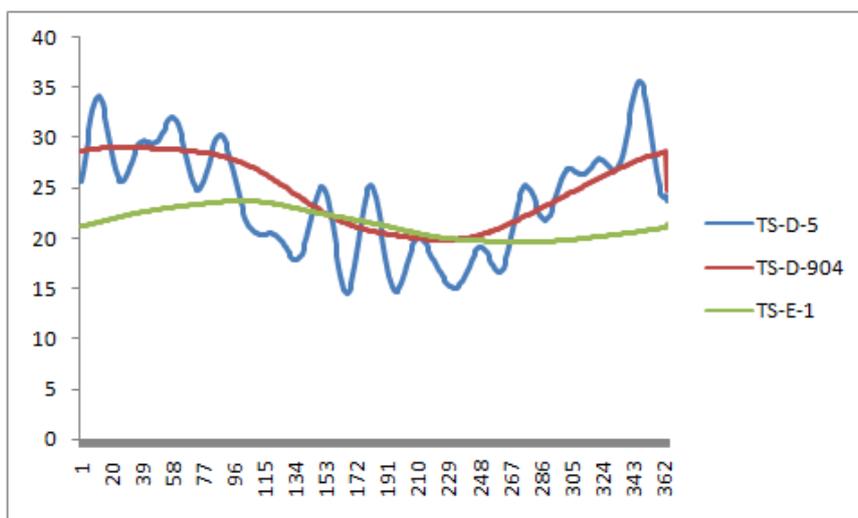


Figura 9 - Gráfico das temperaturas dos termômetros TS-D-5, TS-D-904 e TS-E-1 do ano médio de 2005 a 2014.

A Figura 10 apresenta o campo de temperatura após realizada a análise transiente, via Ansys, para o último dia do ano médio. O MAPE determinado pelos valores dos termômetros TS-D-903, TI-E-1, TI-E-2 e TI-E-3 e os obtidos pelo Ansys nos pontos onde estes se localizam foram respectivamente 1.82%, 11.82%, 13.52% e 14.36%, todos abaixo do percentual estipulado de 20%.

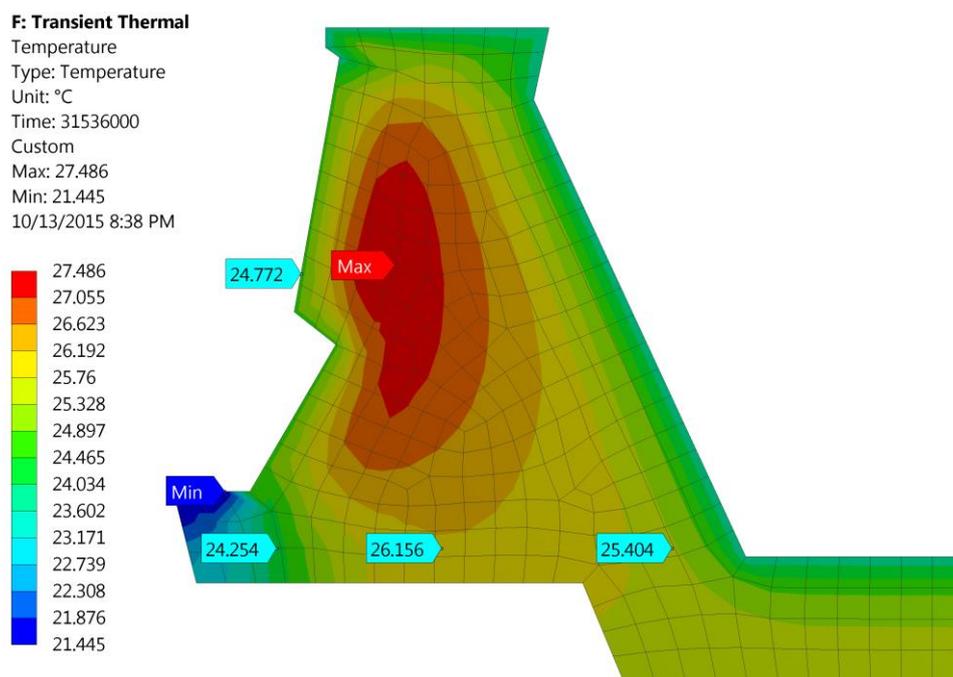


Figura 10 - Campo de temperatura para o último dia do ano médio de 2005 a 2014 após realizada a análise transiente na fase de validação.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um método para determinação dos parâmetros térmicos (condutividade térmica, massa específica e calor específico) presentes na equação do calor, foi apresentado neste trabalho. Dados observados de 7 termômetros instalados no bloco foram utilizados, ajustou-se para cada um deles uma curva (série de Fourier) e tomou-se 3 deles para condição de contorno para resolução do modelo térmicos e outros 4 para calibração e validação dos parâmetros. Dentro de uma tolerância de 20% para o MAPE o método foi eficiente.

## REFERÊNCIAS

**ANSELL, A.; MALM, R.** *Modelling of Thermally Induced Cracking of a Concrete Buttress Dam*. Nordic Concrete Research, v. 38, p. 69-88, 2008.

**LÉGER, P.; LECLERC, M.** *Hydrostatic, Temperature, Time-Displacement Model for Concrete Dams*. Journal of engineering mechanics, American Society of Civil Engineers, v.133, n.3, p. 267-277, 2007.

**LEWIS, R.W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K.N.** *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. John Wiley & Sons, 2004.

**MIRZABOZORG, H.; HARIRI-ARDEBILI, M.A.; SHIRKHAN, M.; SEYED-KOLBADI, S.M.** *Mathematical Modeling and Numerical Analysis of Thermal Distribution in Arch Dams Considering Solar Radiation Effect*. The Scientific World Journal, Hindawi Publishing Corporation, v.2014, 2014.

**SILVA, C.R.S.** *Desenvolvimento de Formulações de Elementos Finitos para Problemas de Transferência de Calor*. Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2014.