

A ANALOGIA DE GRELHA NO CÁLCULO DE LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO

Leticia Barizon Col Debella (Mestranda, UFPR) E-mail: leticiacoldebella@hotmail.com

Rodrigo Villaca Santos (Professor, UTFPR) Email: rodrigov@utfpr.edu.br

Resumo: Para o estudo do comportamento das lajes maciças, diversos modelos matemáticos têm sido propostos. Dentre os processos que possibilitam a consideração da estrutura no seu aspecto tridimensional, destaca-se o processo da analogia de grelha que tem como ideia principal a divisão das lajes em um número adequado de barras, onde as rigidezes à torção e à flexão da laje são concentradas nessas barras. Diferentemente da analogia de grelha, o método analítico através das tabelas de Bares adota a decomposição da estrutura em lajes e vigas para a análise individual de cada elemento, e essa simplificação nem sempre traduz o comportamento real da estrutura. Para avaliar a utilização dos métodos, foram comparados em dois modelos de laje maciça, os valores dos momentos fletores obtidos pela analogia de grelha utilizando o software SAP2000, com aqueles obtidos empregando as tabelas de Bares. Ainda, através da analogia de grelha, foram testadas hipóteses a respeito da influência do refinamento da malha e da redução da rigidez a torção das barras. Assim, por meio desses comparativos, pode-se observar mudanças significativas nos valores dos momentos fletores, reforçando a validação e a importância desse estudo.

Palavras-chave: laje maciça; momentos fletores; analogia de grelha; tabelas de Bares.

THE GRILLAGE ANALOGY IN MASSIVE SLABS OF CONCRETE

Abstract: For the study of the behaviour of massive slabs, several mathematical models have been proposed. Among the processes that allow the consideration of the structure in its three-dimensional aspect, we highlight the process of grillage analogy that has as main idea the division of the slabs that make up the pavement in an appropriate number of bars, where the torsional and flexural rigidities of the slab are concentrated in these bars. Unlike the grillage analogy, the analytical method through the tables of Bares adopts the structure decomposition into slabs and beams for the individual analysis of each element, and that simplification is not always translates the actual behavior of the structure. To evaluate the use of the methods, were compared in a model of slab bending moment values obtained by the grillage analogy using SAP2000 software, with those obtained using the tables of Bares. Further, by using the grillage analogy hypotheses were tested concerning the influence of mesh refinement and reduction of stiffness of the torsion bars. Thus, through these comparisons, we can observe significant changes in the values of the bending moments, increasing the validation and importance of the study.

Keywords: Massive Slabs; Bending Moments; Tables of Bares; Grillage Analogy.

1. INTRODUÇÃO

Durante muitos anos, o cálculo de pavimentos de edifícios com a estrutura composta por lajes e vigas foi feito com a utilização de tabelas originadas da teoria das placas de Kirchhoff (Timoshenko, Woinowsky, 1959), considerando as lajes como elementos isolados e apoiados em vigas indeformáveis. Com o avanço tecnológico, foram desenvolvidos *softwares* que utilizam modelos matemáticos para analisar a estrutura tridimensionalmente, permitindo analisar o pavimento, lajes e vigas, como um todo. Dessa forma, essa análise aproxima-se do comportamento real da estrutura.

Nesse contexto, dentre os vários modelos existentes (Wang, Reddy, Lee, 2000; Bares, 1972; Cook, Malkus, Plesha, 1989) pode-se destacar a analogia de grelha como sendo um

modelo eficiente para a obtenção dos esforços nas lajes, pois permite uma análise global da estrutura. Stramandinoli (2003) afirma que esse método é muito utilizado na análise de lajes, principalmente devido a sua facilidade de compreensão e utilização.

A analogia de grelha consiste em representar a laje através de barras perpendiculares entre si, e ligadas por nós. Existem quatro esforços principais a serem considerados no cálculo pela analogia de grelha, sendo dois momentos (um torsor e um fletor) e dois esforços cortantes. Também, nesse caso, são considerados na análise alguns parâmetros importantes como a rigidez à torção das lajes e vigas.

Carvalho (1994) atenta para que, ao fazer essa representação, deve-se ponderar as rigidezes das barras que compõe a grelha. O estudo da rigidez à torção das barras da grelha equivalente tem sido verificado em experimentações numéricas de diversos trabalhos. Considerando isso, percebeu-se que ao utilizar a rigidez à torção como metade da rigidez a flexão, sugerido por Hambly (1976), obtêm-se resultados satisfatórios em comparação aos resultados calculados pelas tabelas baseadas na teoria da elasticidade. A norma vigente de concreto armado, NBR 6118/2014, possui uma teoria diferente a respeito dessa relação, assim como Carvalho (1994) e Süsskind (1987).

Ainda em relação à analogia de grelha, as lajes devem ser discretizadas em um número adequado de barras cujo espaçamento depende das dimensões e da geometria do pavimento. Entende-se que a discretização ideal correspondente a formulação da malha, é aquela em que se obtenham corretamente os valores dos esforços internos da laje, mas que não demande um gasto computacional elevado.

Existem atualmente, poucas publicações sobre a analogia de grelha, e as considerações a respeito da redução da rigidez a torção e do espaçamento de malha não são conclusivas. Logo, o tema envolve uma série de problemas de engenharia de lajes que podem ser modeladas e estudadas. Neste trabalho será apresentado um comparativo dos valores de momentos fletores de dois exemplos numéricos de lajes maciças, calculadas por analogia de grelha e pelas tabelas de Bares, a fim de avaliar a utilização desses métodos no cálculo dos esforços das mesmas.

2. TEORIA DAS PLACAS E ANALOGIA DE GRELHA

Placas podem ser definidas como estruturas planas, onde uma das dimensões é pequena quando comparada com suas outras duas, e que estão submetidas a cargas perpendiculares ao seu plano.

O estudo das estruturas de superfície, no caso mais geral em regime elástico, pode ser designado pela teoria das placas de Kirchhoff, e pode ser encontrada detalhadamente em Timoshenko e Woinowsky (1959) e Bares (1972). Esse método fundamenta-se nas equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa e nas relações de compatibilidade das deformações desse elemento. Dessa forma, as lajes maciças são consideradas placas delgadas de concreto, e segundo Carvalho (1994), a elas se aplicam todos os conceitos e teorias desenvolvidas para as placas delgadas.

Na teoria de Kirchhoff são admitidas placas delgadas com pequenas deflexões. Essa consideração implica em algumas hipóteses a respeito dessas placas, e podem ser vistas detalhadamente em Wang, Reddy, Lee (2000).

Segundo Carvalho (1994), a Teoria das Placas proporciona a equação geral das placas, que relaciona a deformada elástica “ w ” da placa com a carga “ P ” unitária, uniformemente distribuída na área da placa. A equação tem a forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{P}{D} \quad (01)$$

E a rigidez à flexão da placa “D” é dada por:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (02)$$

sendo w o deslocamento vertical, x e y as coordenadas de um ponto genérico na placa, P a intensidade da carga atuante, D a rigidez à flexão da placa, E o módulo de Young do concreto e ν o coeficiente de Poisson.

Da solução da equação geral das placas, originaram-se tabelas compostas por coeficientes que proporcionam com maior facilidade o cálculo dos momentos fletores, para casos específicos de apoios e carregamentos nas lajes. Dentre essas tabelas destacam-se as tabelas de Bares (1972) para o cálculo de lajes maciças, as quais Carvalho(1994) adaptou para o coeficiente de Poisson igual a 0,2.

Conforme relatado, para encontrar o coeficiente “ μ ” relacionado ao momento fletor nessas tabelas, é preciso calcular o parâmetro λ , que reflete a geometria da laje, expresso por:

$$\lambda = \frac{|y|}{|x|}, \quad (03)$$

sendo $|y|$ a maior das dimensões da superfície da placa, e $|x|$ a menor.

Os momentos fletores máximos, sendo os positivos designados pela letra “ m ” e os negativos, pela letra “ x ”, são determinados pelas equações (04) a (07) em que $\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$, são coeficientes fornecidos nas tabelas.

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot |x|^2}{100} \quad (04)$$

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot |y|^2}{100} \quad (05)$$

Os momentos fletores máximos negativos, por unidade de comprimento nas direções x e y são, portanto:

$$x_x = \mu'_x \cdot \frac{p \cdot |x|^2}{100} \quad (06)$$

$$x_y = \mu'_y \cdot \frac{p \cdot |y|^2}{100} \quad (07)$$

A utilização dessas tabelas facilita o cálculo dos momentos fletores máximos a partir da geometria e das condições de apoio da placa. De acordo com Carvalho (1994), o pavimento deve ser discretizado, ou seja, cada laje deve ser tratada individualmente de acordo com suas condições de apoios. Como limitação, essas tabelas podem ser utilizadas somente para configurações de apoios das lajes com bordas totalmente apoiadas, engastadas ou livres.

A simplificação da estrutura, bem como as limitações do cálculo analítico de lajes, restringem os problemas de engenharia a alguns poucos casos de vinculação e de geometria. Devido a isso, modelos matemáticos como a analogia de grelha, que analisam a estrutura de forma integrada, são cada vez mais utilizados nos *softwares* de análise estrutural.

O método de analogia de grelha tem como propósito principal a substituição do pavimento por uma grelha equivalente, sendo que os elementos estruturais, vigas e lajes, são representados pelas barras da mesma. Esse processo possibilita a análise global da estrutura, e a configuração do sistema estrutural pode ser dada com qualquer geometria.

Durante a análise, as lajes devem ser discretizadas em um número adequado de barras, as quais terão larguras dependentes da geometria e das dimensões do pavimento. Ainda, as rigidezes à torção e à flexão da laje são concentradas nessas barras.

Quanto aos carregamentos, considera-se que as cargas distribuídas atuantes no pavimento se dividem entre as barras da grelha equivalente de acordo com a área de influência de cada uma. As cargas podem ser consideradas uniformemente distribuídas ao longo das barras da grelha ou então concentradas diretamente nos seus nós.

As propriedades das barras influenciam diretamente nos resultados e, portanto, deve-se analisar vários aspectos das mesmas. Cada barra da grelha irá corresponder a certa faixa da placa, representada pela espessura da laje e pela largura. Esta última depende do espaçamento da malha da grelha. As propriedades físicas dependem do material empregado na placa.

Segundo Hambly (1976), o momento de inércia à flexão (I) das barras longitudinais e transversais da grelha é calculado considerando que cada barra representa uma largura “ b ” da laje igual à distância entre os centros dos vãos adjacentes à barra, dado por:

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad (08)$$

sendo b a largura da barra da grelha e h a altura da barra da grelha.

O outro parâmetro a ser analisado é a rigidez à torção (J) da seção transversal da barra. De acordo com Hambly (1976) a rigidez à torção não é simplesmente uma propriedade geométrica da área da seção transversal da barra, como é o momento de inércia à flexão I . No caso de um cilindro, a rigidez à torção é igual ao momento polar de inércia I_p , entretanto este é um caso especial, sendo que para outros tipos de seção transversal a rigidez à torção é totalmente diferente de I_p . Portanto, não existe uma regra geral para o cálculo da rigidez à torção. Para um retângulo de lados “ b ” e “ h ”, Gere e Weaver (1980), sugerem que a relação pode ser dada por:

$$J = \beta e^3 f, \quad (09)$$

sendo e a menor dimensão da seção transversal, f a maior dimensão da seção transversal, e

$$\beta = \frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{e}{f}\right) \left(1 - \frac{e^4}{12f^4}\right). \quad (10)$$

Destaca-se que o *software* SAP2000, utilizado nas modelagens do presente trabalho, utiliza as equações sugeridas por Gere e Weaver (1980) para o cálculo da rigidez a torção.

Para a análise estrutural, é importante ressaltar que quando se trata de lajes maciças de concreto, é necessário que se leve em consideração uma característica peculiar do material, que é a fissuração por retração. Na modelagem computacional, uma forma de representar a perda da rigidez da laje devido à fissuração é reduzir a rigidez à torção (J) das barras da grelha. Existem na literatura, diversas teorias acerca do índice correto dessa redução, e, no presente trabalho são comparados os resultados dos momentos fletores obtidos através da modificação desta variável, segundo:

•Süssekind (1987): Para análise estrutural de lajes maciças através da analogia de grelha equivalente, Süssekind sugere adotar a rigidez à torção apenas com 1/5 do seu valor, ou seja, apenas 20% para todos os elementos da grelha. Essa consideração a favor da segurança permite uma rotação maior dos apoios, criando uma situação teoricamente mais aproximada da realidade.

•Carvalho (1994): O valor da rigidez à torção das vigas de bordo das lajes pode ser considerado igual a 10% do seu valor total. Ainda, o autor afirma que para as barras da grelha que representam a laje propriamente dita, deve-se manter o valor total da rigidez a torção.

•NBR 6118/2014: o item 14.7.6.2 da referida norma, permite a modelagem dos pavimentos de edifícios como grelhas, para estudo das cargas verticais. É permitida a redução da rigidez à torção para 15% do valor total da mesma.

•Hambly (1976): o autor propõe que se use, para uma barra de grelha que representa uma largura “*b*” de uma laje maciça, a rigidez a torção sendo igual ao dobro da rigidez a flexão.

Essa relação implica em uma redução da rigidez a torção que depende do espaçamento da grelha, pois ao passo que o espaçamento é modificado, a dimensão da barra também é modificada, e consequentemente, o valor da rigidez a torção é diferente. Para cada caso de espaçamento, portanto, foi determinada a porcentagem de redução da rigidez a torção que atende a relação $J=2I$.

Ainda, para complementar o estudo, o mesmo modelo de grelha foi modelado sem nenhuma redução na rigidez à torção.

3.EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste trabalho foram estudados dois modelos de lajes maciças para exemplificar a utilização da analogia de grelha na obtenção dos valores de momento fletor. A modelagem computacional foi através do *software* SAP2000, versão 15.0. A partir disso, esses valores de momentos fletores foram comparados com os provenientes dos cálculos através das tabelas de Bares. Para a modelagem das lajes dos exemplos, foi levada em conta a influência do refinamento da malha e a redução da rigidez a torção das barras da grelha.

3.1 ESTUDO COMPARATIVO PARA UMA LAJE QUADRADA

Para a modelagem e obtenção dos resultados deste exemplo numérico, laje maciça quadrada, foram utilizadas os parâmetros conforme apresenta o quadro 1. E na figura 1 têm-se as dimensões da laje e da seção das vigas de contorno em estudo. Nesse exemplo serão apresentadas variações do espaçamento da grelha, bem como, reduções da rigidez à torção para o cálculo dos momentos fletores

Quadro 1:parâmetros da modelagem

| |
|---|
| Laje maciça de dimensões 4x4 m |
| Relação entre vãos $l_y/l_x = 1$ |
| Espessura $h=10$ cm |
| Considerada engastada em duas bordas adjacentes |
| Carga distribuída de 750 kgf/m ² |
| Resistência a compressão característica do concreto (f_{ck}) = 25 MPa |
| Coefficiente de Poisson = 0,2 |
| Seção das vigas de contorno = 12x30 cm |

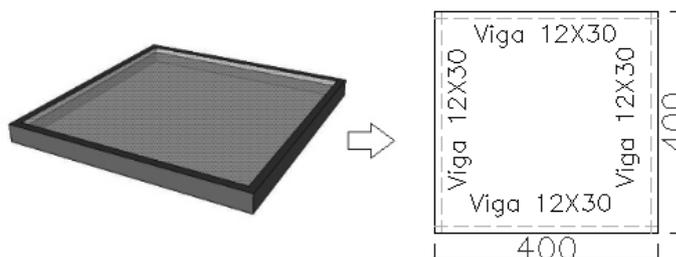


Figura 1 – laje quadrada e suas dimensões

O carregamento distribuído na laje foi calculado de acordo com o espaçamento da grelha, conforme mostra a tabela 1. O valor de 750 kgf/m², quadro 1, foi distribuído nas barras e nas vigas de bordo de acordo com sua área de influência. E os espaçamentos das malhas utilizados nesse trabalho estão representados nas figuras 2 a 4, com variações de malha de 80x80 até 5x5 centímetros.

Tabela 1- valores das cargas distribuídas

| malha (cm) | carga distribuída (kgf/m) | |
|------------|---------------------------|------------------|
| | vigas de contorno | barras da grelha |
| 80x80 | 150 | 300 |
| 40x40 | 75 | 150 |
| 25x25 | 46,88 | 93,75 |
| 20x20 | 37,50 | 75,0 |
| 10x10 | 18,75 | 37,50 |
| 5x5 | 9,38 | 18,75 |

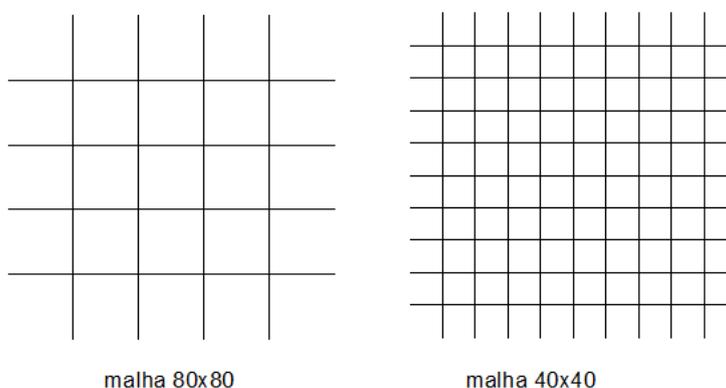


Figura 2- malha 80x80 e 40x40 centímetros

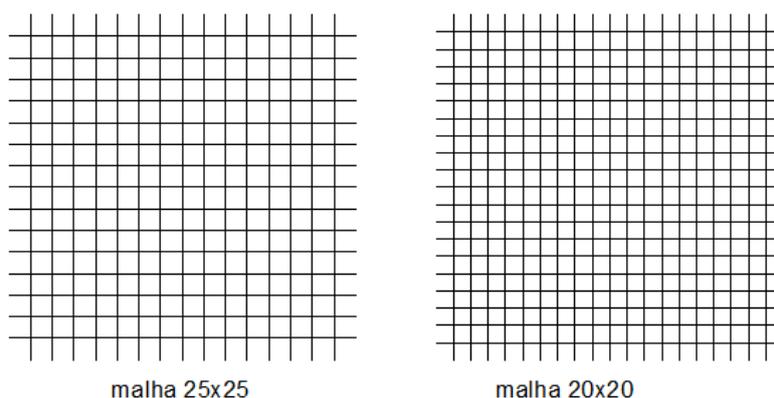


Figura 3- malha 25x25 e 20x20 centímetros

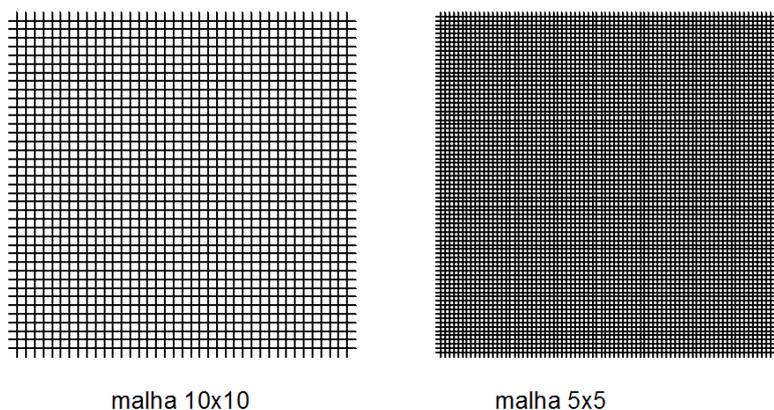


Figura 4- malha 10x10 e 5x5 centímetros

Como resultado, para esse exemplo, as figuras 5 e 6 apresentam os valores do refinamento de malha *versus* os valores do momento fletor para cada caso, utilizando seus respectivos índices de redução da rigidez a torção. Ainda, as figuras 5 e 6 apresentam esses mesmos valores sem a utilização da redução da rigidez a torção, e os valores calculados dos momentos fletores pela tabela de Bares. Nas figuras 5 e 6 têm-se os resultados para os momentos fletores positivos e negativos respectivamente. Também, como a laje em questão é quadrada, os valores dos momentos na direção x e na y são iguais.

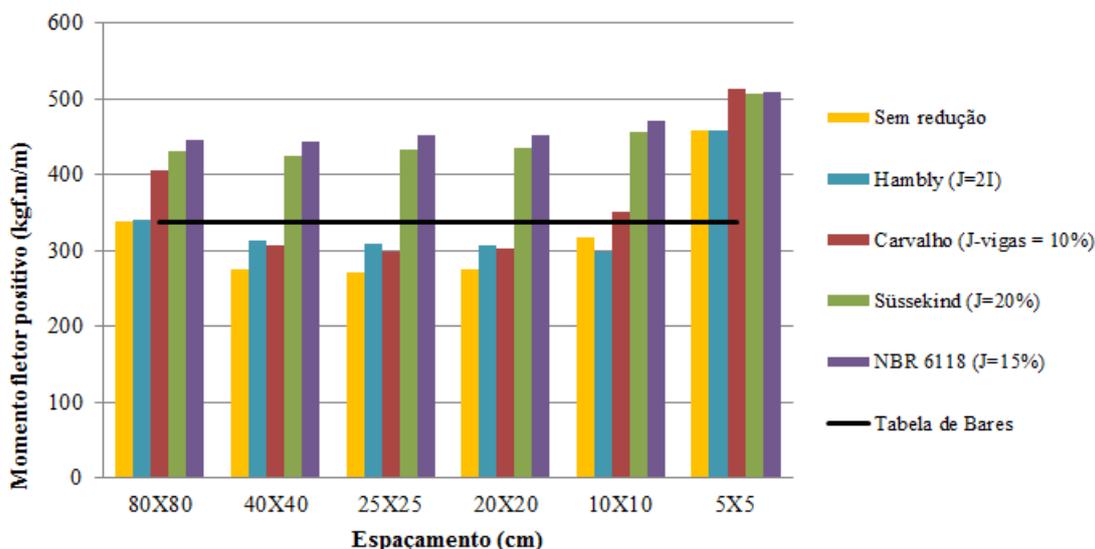


Figura 5-momentos positivos máximos em função da rigidez a torção e do refinamento da malha.

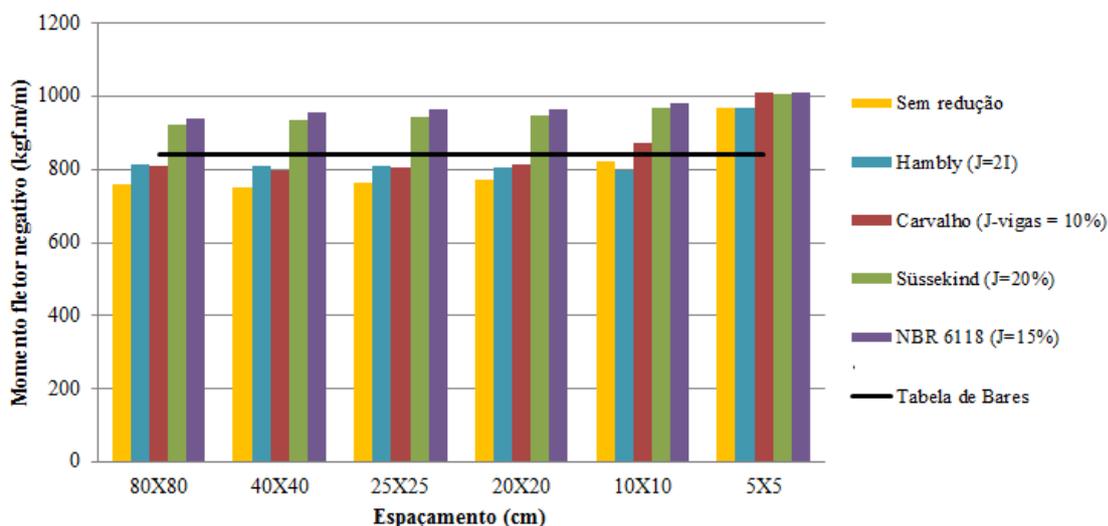


Figura 6 - momentos negativos máximos em função da rigidez a torção e do refinamento da malha.

Analisando os resultados das figuras 5 e 6, pode-se perceber que de uma forma geral, quanto menor a rigidez à torção das barras da grelha, maior o momento fletor. Percebe-se que os menores valores de momento fletor ocorrem quando não há nenhuma redução na rigidez à torção, e os maiores valores ocorrem quando a rigidez à torção se restringe a apenas 15% do seu valor total, conforme sugere a NBR 6118/2014. Esses resultados são explicados pela relação que o momento fletor tem com o momento torsor: quanto maior a rigidez à torção, maior o momento torsor dessa barra. Ao diminuir a rigidez a torção, diminui-se também a sensibilidade das barras à rotação da laje, e conseqüentemente, os valores dos momentos fletores são maiores.

Ainda, percebe-se que os esforços obtidos através das tabelas de Bares, figuras 5 e 6, se assemelham aos obtidos com aqueles que possuem rigidez a torção maior. O que é justificável, pois essa rigidez não é considerada no cálculo analítico. Já com um espaçamento de grelha 25x25 centímetros, por exemplo, e com a rigidez a torção reduzida a 15%, conforme a NBR 6118/2014, os valores obtidos pelas tabelas de Bares diferem para menos, em

aproximadamente 34% para o momento positivo, e 15% para o negativo. A tabela 2 mostra essa diferença.

Tabela 2 - Relação entre cálculo dos momentos fletores pela tabela de Bares e por analogia de grelha.

| | $M_{x+}=M_{y+}$ | $M_{x-}=M_{y-}$ |
|-------------------------|-----------------|-----------------|
| | (Kgf.m/m) | |
| (A) Grelha 25x25; J=15% | 452 | 962 |
| (B) Tabelas | 337 | 839 |
| Relação A/B | 1,34 | 1,15 |

Outro resultado analisado nesse exemplo é a avaliação do diagrama de momentos fletores da laje em relação às reduções da rigidez à torção. As figuras 7 e 8 mostram os diagramas de momento fletor sem a redução da rigidez a torção e com 15% da rigidez a torção, respectivamente. Nessas figuras percebe-se uma descontinuidade nos diagramas, ocasionadas justamente pela presença do momento torsor. Ou seja, se existe uma descontinuidade na direção x no diagrama de momento fletor, é porque existe um momento torsor em x aplicado no nó referente a essas barras. À medida que a inércia a torção sofre uma redução, o valor do momento torsor diminui, o momento fletor aumenta, e a descontinuidade do gráfico fica menos acentuada.

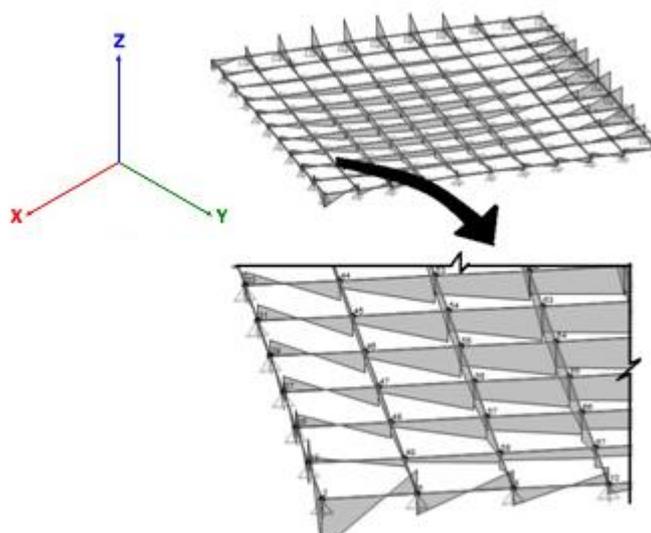


Figura 7 - diagrama de momento fletor da laje sem redução da rigidez torção, e a descontinuidade acentuada nos nós das barras provocada pelo momento torsor.

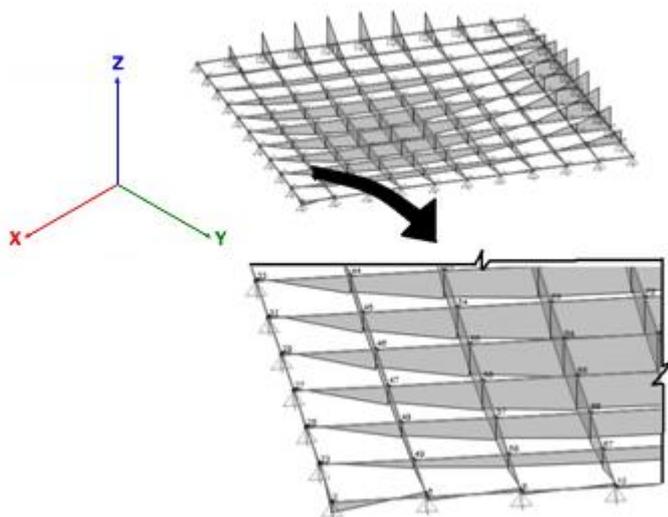


Figura 8 - diagrama de momento fletor da laje com 15% da rigidez a torção, e a uma menor descontinuidade nos nós das barras provocada pelo momento torsor.

Para melhor entendimento dessa relação do momento torsor com o momento fletor, apresentada nas figuras 7 e 8, a tabela 2 mostra os valores obtidos do momento torsor (M_t), em comparação aos momentos fletores (M_x e M_y), quando a laje é modelada com uma grelha de 40x40 centímetros. Para esse caso, obedecendo a relação sugerida por Hambly (1976) de $J=2I$, a rigidez a torção é reduzida a 59% do seu valor total. Novamente percebe-se na tabela 3 que ao passo que a rigidez a torção diminui, o momento torsor decresce. E à medida que esse momento torsor diminui, o momento fletor aumenta.

Tabela 3 -comparativo dos momentos torsores com os fletores para uma laje quadrada de 40x40 centímetros

| | S/ REDUÇÃO | HAMBLY | CARVALHO | SUSSEKIND | NBR 6118 |
|--------------------------|---------------|--------|---------------|--------------|--------------|
| | J-VIGAS: 100% | J/I=2 | J-VIGAS:10% | J-VIGAS: 20% | J-VIGAS: 15% |
| | J-LAJE: 100% | J=59% | J-LAJES: 100% | J-LAJES: 20% | J-LAJES: 15% |
| $M_x+=M_y+$ (kgf.m/m) | 274 | 313 | 307 | 426 | 444 |
| $M_x-=M_y-$ (kgf.m/m) | 751 | 808 | 795 | 937 | 954 |
| M_t (Kgf.m/m) | 360 | 270 | 278 | 127 | 97 |

Analisando os resultados obtidos nesse exemplo, percebe-se de uma forma geral, que os valores de momento fletor variam irregularmente conforme a malha é refinada. Porém, os valores desses momentos convergem para um resultado coerente, enquanto as barras da malha tem uma relação de largura e altura condizentes com as equações (09) e (10) de Gere e Weaver (1980). Quando a malha é espaçada em 80, 40, 25 e 20 centímetros, o parâmetro “e”, equação (09), é a menor dimensão, correspondente a 10 centímetros que é a espessura da laje, e o parâmetro “f”, a maior dimensão, referente ao espaçamento da malha. Assim, a equação (09) da rigidez a torção que é proporcional ao cubo da menor dimensão, satisfaz o

comportamento dessas barras. Já quando a malha é espaçada em 10 e 5 centímetros, essas dimensões se invertem, resultando em valores incorretos para o momento fletor. A figura 9 apresenta essa inversão de valores em uma barra da grelha.

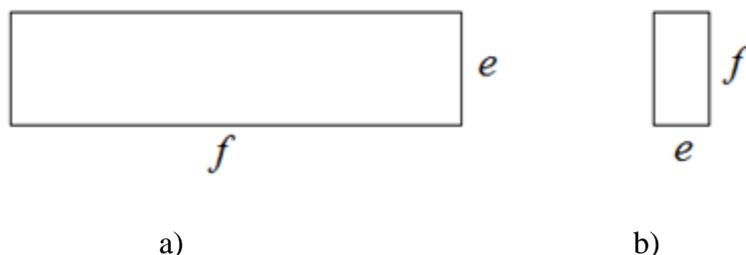


Figura 9a) barra da grelha quando as dimensões “e” e “f” correspondem as equações de Gere e Weaver (1980)
b) inversão das dimensões “e” e “f”

3.2 ESTUDO COMPARATIVO PARA UMA LAJE RETANGULAR

Nesse estudo, o método de análise comparativa é igual ao exemplo anterior, utilizando os mesmos espaçamentos de malha, bem como a distribuição do carregamento de 750 kgf/m². Para esta modelagem foram utilizados os parâmetros conforme apresenta o quadro 2, e as dimensões da laje e das vigas podem ser vistas na figura 10.

Quadro 2: características da modelagem

| |
|---|
| Laje maciça de dimensões 4x8 m |
| Relação entre vãos $l_y/l_x = 2$ |
| Espessura $h=10$ cm |
| Considerada engastada em duas bordas adjacentes |
| Carga distribuída de 750 kgf/m ² |
| Resistência a compressão característica do concreto (f_{ck}) = 25 MPa |
| Coefficiente de Poisson = 0,2 |
| Seção das vigas de contorno = 12x30 cm |

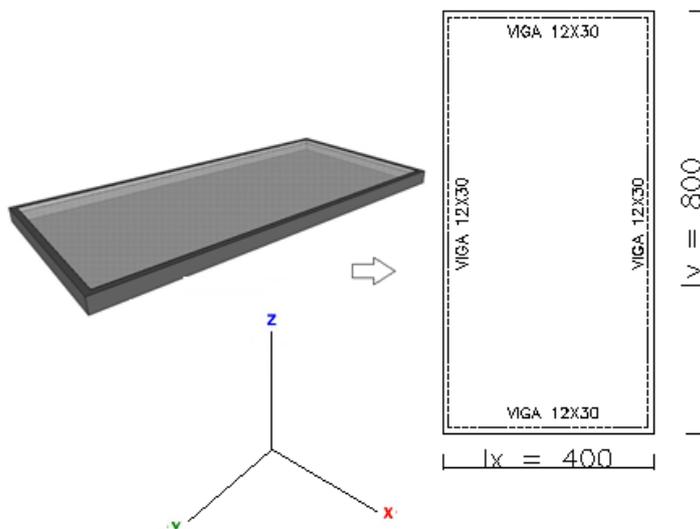


Figura 10 – laje retangular e suas dimensões

Como resultado para esse exemplo, as figuras 11 e 12 apresentam os valores do refinamento de malha *versus* os valores do momento fletor para cada índice de redução da rigidez a torção. Ainda, as figuras em questão apresentam esses mesmos valores sem a utilização da redução da rigidez a torção, e os valores calculados dos momentos fletores pela tabela de Bares. Nas figuras 11 e 12 têm-se os resultados para os momentos fletores positivos e negativos nas direções *x* (referente ao maior vão da laje) e *y* (referente ao menor vão da laje), respectivamente.

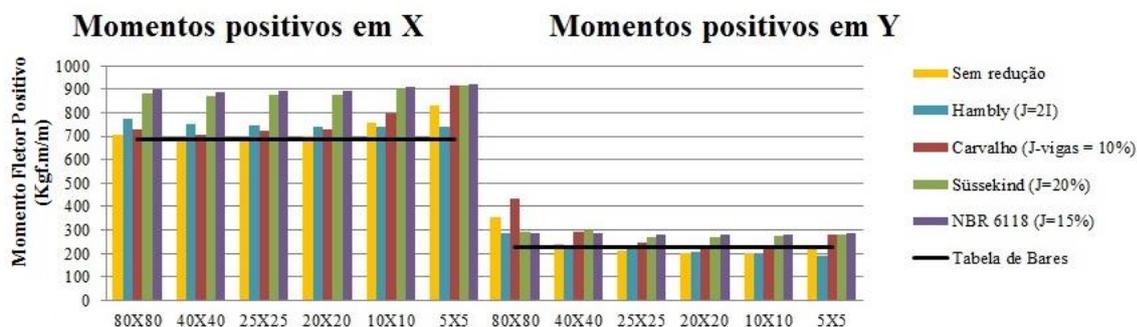


Figura 11 – momentos fletores positivos máximos em *x* e em *y* em função da rigidez a torção e do refinamento da malha.

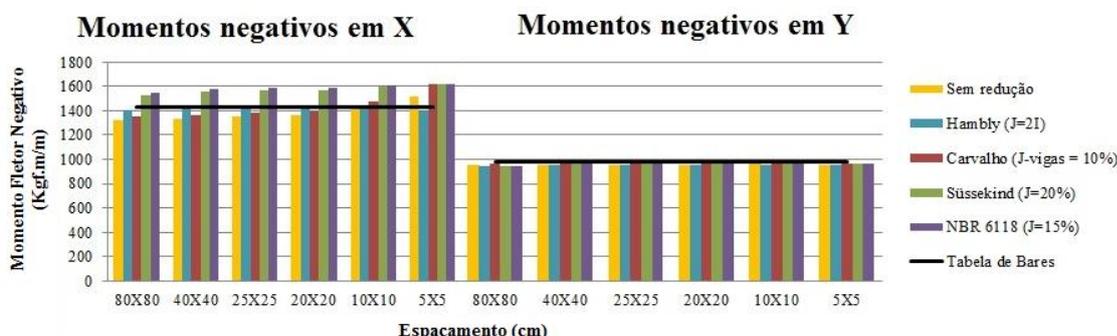


Figura 12 -momentos fletores negativos máximos em *x* e em *y* em função da rigidez a torção e do refinamento da malha.

Analisando os resultados obtidos para a laje retangular, percebe-se que os valores dos momentos fletores negativos em y praticamente não variam, figura 12. Esses momentos fletores são causados pelo engaste da laje nas bordas adjacentes, e não são sensíveis a alteração, quando as propriedades das barras da laje se alteram. Em outras palavras, o momento negativo do engaste existe, sendo independente da alteração na rigidez das barras, e é referente à reação do engaste devido aos esforços que a laje está sendo solicitada.

Já o momento fletor negativo em x sofre mais variações ao passo que a rigidez das barras e a malha da grelha se modificam. Esse comportamento da laje retangular é explicado por Carvalho (1994), que diz que à medida que as lajes se aproximam das armadas em uma só direção, ou seja, quando a relação entre vãos l_x e l_y é maior que 2, o seu comportamento é comparável ao de uma viga. Ou seja, no menor vão, os momentos negativos e positivos são mais suscetíveis a alterações no valor, quando as propriedades das barras da grelha se modificam.

Ainda, analisando os valores dos momentos fletores, figuras 11 e 12, percebe-se que quando não há redução na rigidez à torção das barras, e quando as barras da grelha tem uma relação de largura e altura coerentes com as equações (09) e (10) de Gere e Weaver (1980), os valores obtidos dos momentos fletores se assemelham aos obtidos pelas tabelas de Bares. A tabela 4 mostra que de fato, a diferença de valores é mínima entre a modelagem da laje com uma grelha de 25x25 centímetros, sem redução da rigidez a torção das barras, e os valores obtidos pelas tabelas de Bares.

Tabela 4 -relação entre momentos obtidos pela analogia de grelha sem redução da rigidez a torção e tabela de Bares

| | M _{x+} | M _{x-} | M _{y+} | M _{y-} |
|--------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | (Kgf.m/m) | | | |
| (A) Grelha 25x25; J=100% | 692 | 1349 | 211 | 952 |
| (B) Tabelas | 689 | 1427 | 226 | 984 |
| Relação A/B | 1,00 | 0,95 | 0,93 | 0,97 |

De maneira geral, o comportamento da laje retangular, com relação entre vãos $l_x/l_y=2$, é um pouco diferente da laje quadrada, devido a sua tendência a se comportar como uma viga. Apesar disso, a distribuição de momentos fletores nas duas lajes é coerente com a realidade, e semelhantes entre si, como mostram os gráficos de momento fletor nas figuras 13 e 14. Esses gráficos foram gerados quando a rigidez a torção das barras obedece a recomendação da NBR 6118/2014, e vale 15% do seu valor total.

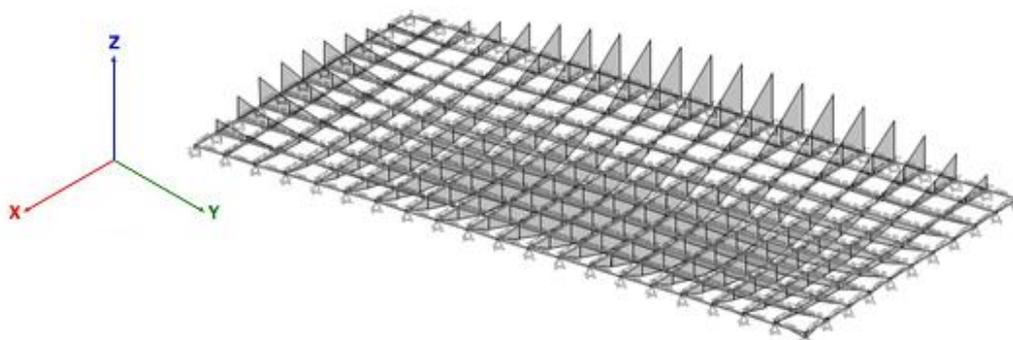


Figura 13- momentos fletores da laje maciça retangular quando a rigidez a torção é reduzida conforme a NBR6118/2014

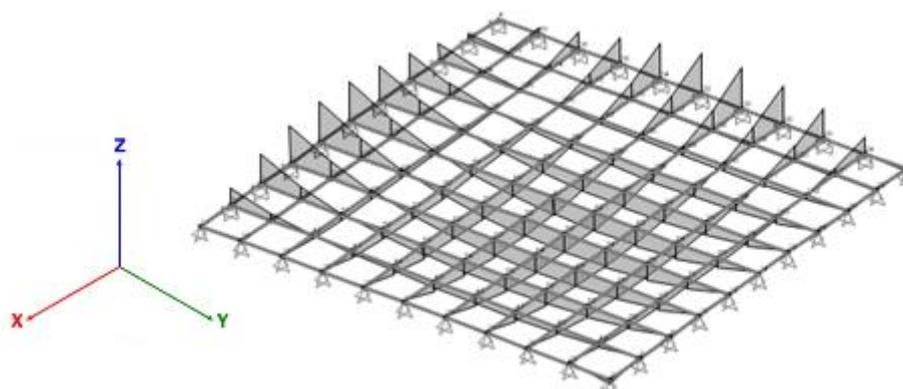


Figura 14- momentos fletores da laje maciça quadrada quando a rigidez a torção é reduzida conforme a NBR6118/2014

Uma colocação importante a respeito da distribuição de esforços é a presença de momento fletor negativo nas bordas onde não há engaste. Esse momento é ocasionado por questões de execução da estrutura. Mais especificamente, na maioria dos casos as lajes são concretadas junto com as vigas, e isso gera certo engastamento entre esses elementos estruturais. Quando a laje é solicitada à flexão, a viga tende a girar junto com a laje, e o que impede esse movimento é a rigidez a torção dessas vigas. Esse esforço para conter a rotação das vigas gera os momentos negativos nas bordas. A figura 15 mostra o momento fletor negativo presente na borda oposta àquela que possui engaste.

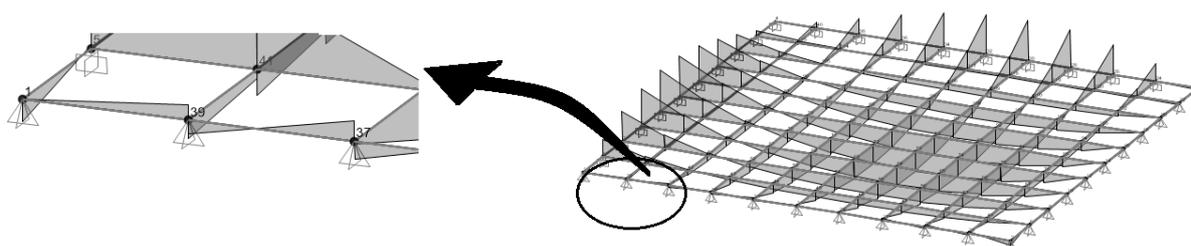


Figura 15- momento negativo na borda simplesmente apoiada

O momento fletor negativo nessas bordas simplesmente apoiadas não aparecem evidentemente no cálculo analítico através das tabelas de Bares. Para o caso de vinculação de uma laje com os quatro lados simplesmente apoiados, por exemplo, a tabela de Bares dispõe apenas de momento positivo em x e em y . No caso de vinculação da laje em questão, o momento negativo obtido através dessas tabelas é referente apenas à borda engastada. A borda oposta ao engaste, que é simplesmente apoiada, possui teoricamente, momento negativo nulo. Essa simplificação não representa o real comportamento da laje maciça, como pode ser observado através da modelagem por analogia de grelha. A inclusão desse efeito de momento fletor negativo nas lajes foi considerada pela última atualização da NBR 6118, em 2014. A referida norma sugere que se tenha uma armadura mínima negativa nas bordas das lajes em que não há continuidade, para justamente conter esse momento fletor negativo.

Por fim, fazendo-se uma análise geral das hipóteses de modelagem para essas lajes isoladas, pode-se perceber em relação ao espaçamento da malha, que enquanto esse espaçamento sugerem barras que obedecem as equações (09) e (10) de Gere e Weaver (1980), os valores de momento fletor convergem para um resultado coerente. Ou seja, quando o espaçamento é de 40x40, 25x25, e 20x20 centímetros, os valores de momento pouco variam, mesmo quando há a redução da rigidez a torção das barras. Para as lajes modeladas nesse trabalho, a malha de 80x80 centímetros mostrou-se muito espaçada, fazendo com que os momentos fletores sofressem picos, quando comparados com os valores obtidos no refinamento dessa malha.

4. CONCLUSÕES

O presente trabalho buscou avaliar o comportamento estrutural de lajes maciças de concreto armado, comparando os valores de momento fletor obtidos através das tabelas de Bares, com os obtidos pela analogia de grelha. Devido às simplificações a serem feitas no cálculo analítico através das tabelas, optou-se por calcular os momentos fletores das lajes através de um método que permitisse uma análise global da estrutura, e representasse melhor o comportamento real de uma laje maciça.

A analogia de grelha possibilita uma análise tridimensional e integrada, mas quando se trata da modelagem computacional, existem algumas considerações a respeito das variáveis que envolvem o cálculo de esforços. Foram testadas, portanto, hipóteses a respeito do espaçamento da malha utilizada na modelagem, e da influência nos valores de momento fletor quando se reduz a rigidez a torção das barras da grelha.

O modelo da analogia de grelha mostrou certa irregularidade na variação dos resultados obtidos à medida que diminui-se o espaçamento das barras. Ou seja, não é a grelha menos espaçada que traz os resultados mais coerentes de momento fletor. Para os exemplos deste trabalho, a malha de 40x40 centímetros mostrou-se satisfatória, visto que ao se observar os valores obtidos pela malha de 25x25 e 20x20 centímetros, nota-se uma variação mínima. Isso implica que realmente os valores de momento fletor convergem, e obviamente, a malha mais espaçada demanda um gasto computacional menor.

Em relação à rigidez a torção das barras, entende-se que considerar a redução dessa variável no cálculo de uma laje maciça de concreto traz resultados mais realistas. Sem nenhuma redução da rigidez a torção, o modelo de grelha equivalente fica, apesar de coerente em relação às tabelas de Bares, incompatível com as estruturas reais, pois desconsidera uma característica do concreto, que é a fissuração. Reduzir a inércia à torção do elemento na análise estrutural significa, em termos práticos, que a região efetiva de concreto que irá ser solicitada aos esforços de torção foi reduzida. De modo geral, a adoção de 15% da rigidez

total à torção das vigas, além de atender a NBR 6118/2014, é uma boa forma de representar o comportamento real da laje maciça de concreto armado.

De maneira geral, com a utilização do processo de analogia de grelha é possível calcular pavimentos de concreto armado de uma forma integrada, diferentemente do cálculo analítico, o qual considera os elementos componentes do pavimento de forma isolada, sem levar em conta a interação entre os mesmos. Com o cálculo integrado, a contribuição de cada elemento que compõe o pavimento fica corretamente caracterizada e, dessa forma, os esforços e os deslocamentos determinados tendem a ser mais precisos e mais próximos dos valores reais.

Por fim, é possível afirmar que o cálculo analítico de momentos fletores a partir das tabelas de Bares é útil para uma análise inicial, ou um pré-dimensionamento. Contudo, deve-se buscar modelos em que as simplificações sejam mínimas, devido a distorção que as mesmas podem causar na obtenção dos esforços. A analogia de grelha mostrou-se, portanto, de fácil compreensão e modelagem, sendo uma alternativa viável para a análise estrutural de edifícios.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J.M. Avaliação dos métodos simplificados para cálculo de lajes maciças sobre vigas flexíveis. Teoria e Prática na engenharia civil, Rio Grande do Sul, n.12, p. 1-11, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT NBR 6118: projeto de estruturas em concreto - procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

BARES, R. Tablas para el cálculo de placas y vigas parede. Barcelona: Editora Gustavo Gili S/A, 1972.

COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M. E.; Concepts and applications of finite element analysis. 3a Edição, John Wiley & Sons Inc., 1989.

CARVALHO, R. C. Análise não linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha. Tese (doutorado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, SP, São Carlos., 1994.

GERE, J.M.; WEAVER JR., W. Análise de Estruturas Reticuladas. Editora Guanabara Dois S. A. Rio de Janeiro – RJ, 1981.

HAMBLY, E.C. Bridge deck behavior. London, Chapman and Hall, 1976.

STRAMANDINOLI, J.S. Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis, 2003.

SÜSSEKIND, J. C., Curso de Análise Estrutural Volume III, Editora Globo, Rio de Janeiro, 1987

TIMOSHENKO, S. P. ; WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells, McGraw- Hill Kogakusha, Ltda, 1959.

WANG, C. M.; REDDY, J. N.; LEE, K.H. Shear Deformation Theories of Beams and Plates Dynamics Relationships with Classical Solution, Elsevier, U.K., 2000.