

PROBLEMAS DIFUSIVOS TRANSIENTES COM PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS VARIÁVEIS EM CÉLULAS DE COMBUSTÍVEL NUCLEAR ELÍPTICAS

Marcelo Ferreira Pelegrini (Petrobras) mpelegrini@gmail.com
Thiago Antonini Alves (UTFPR/Ponta Grossa) thiagoalves@utfpr.edu.br
Ricardo Alan Verdú Ramos (Unesp/Ilha Solteira) ramos@dem.feis.unesp.br
Cassio Roberto Macedo Maia (Unesp/Ilha Solteira) cassio@dem.feis.unesp.br

Resumo: Neste trabalho foi apresentada a solução de problemas difusivos transientes em células de combustível nuclear cilíndricas com seção transversal de geometria elíptica que apresentam fontes uniformemente distribuídas e propriedades termofísicas variáveis em seu domínio submetidas às condições de contorno de primeiro tipo (condição de *Dirichlet*). Para facilitar o tratamento analítico, a equação da difusão foi linearizada fazendo uso da Transformada de *Kirchhoff* sobre o potencial temperatura. As variáveis espaciais foram convenientemente transformadas para facilitar a aplicação das condições de contorno. Para a determinação da distribuição da temperatura na célula de combustível a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) foi utilizada sobre a equação da difusão no domínio da célula. Os parâmetros físicos de interesse foram determinados para diversas razões de aspecto. Os resultados obtidos foram comparados com os da solução pelo Método dos Volumes Finitos utilizando o software *ANSYS/Fluent*TM 16.0.

Palavras-chave: problemas difusivos não-lineares, Transformada Integral, Transformada de *Kirchhoff*, regime transiente, geometria elíptica.

TRANSIENT DIFFUSION PROBLEMS WITH VARIABLE THERMOPHYSICAL PROPERTIES IN ELLIPTICAL NUCLEAR FUEL CELLS

Abstract: Transient diffusion problems solution were presented in this work considering cylindrical fuel cells with elliptical cross-section with uniformly distributed sources and variable thermophysical properties in its domain submitted to boundary conditions of first kind (*Dirichlet* boundary condition). In order to facilitate the analytical treatment, the diffusion equation has been linearized by *Kirchhoff* Transform application in a temperature potential. The spatial variables have been transformed in order to facilitate the boundary conditions application. To obtain the distribution of the temperature in the fuel cell the Generalized Integral Transform Technique (GITT) was used onto the diffusion equation in the domain of the cell. Interesting physical parameters have been evaluated for several cylinder aspect ratios. The results obtained have been compared with finite volume solution obtained by *ANSYS/Fluent*TM 16.0 software.

Keywords: non-linear diffusion problems, Integral Transform, *Kirchhoff* Transform, transient regime, elliptical geometry.

1. INTRODUÇÃO

As células de combustível em reatores nucleares de potência apresentam dimensões reduzidas e liberam altas taxas de energia térmica proveniente da reação de fissão nuclear do elemento físsil (GLASSTONE & SESONSKE, 1994). Do ponto de vista econômico, uma maior eficiência na transferência da energia gerada pelo elemento físsil para o fluido de trabalho, possibilita a construção de reatores de menores dimensões, bem como o estabelecimento de um inventário menor de combustível nuclear (MAIA, 2003). Dessa forma, entre os diversos fatores que influenciam o processo de transferência de calor, as dimensões geométricas e o formato desses elementos desempenham um papel preponderante (PELEGRINI, 2005).

Diante da necessidade de se obter solução mais precisa para modelos físicos mais realísticos é imperativo o contínuo desenvolvimento de novas metodologias que possa contemplar, por exemplo, o acoplamento entre as equações de conservação, a não-linearidade das relações constitutivas, processos com mudança de fase, a presença de contornos com geometria não-regular, problemas com fronteiras móveis, condições de contorno não-lineares, entre outros (COTTA, 1990; MIKHAILOV & COTTA, 1996; SPHAIER & COTTA, 2000; MAIA *et al.* 2005; ANTONINI ALVES, 2006; ANTONINI ALVES *et al.* 2014; PELEGRINI *et al.* 2014a,b).

Neste contexto, técnicas híbridas analítico-numéricas vêm ganhando destaque em diversas áreas de interesse da engenharia, por garantirem maior confiabilidade dos resultados por elas obtidos. Em particular, a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG (COTTA, 1998), é uma ferramenta com estas características e vem demonstrando ser poderosa e eficiente na solução de problemas de transferência de calor e massa, os quais, geralmente, não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas.

Neste sentido, o presente trabalho apresenta a solução de problemas difusivos transientes com fontes uniformemente distribuídas em células cilíndricas de seção transversal elíptica e que utilizam o dióxido de urânio, UO_2 , como combustível. Para esta análise, consideram-se as propriedades termofísicas variáveis, perfil de temperatura inicial uniforme e condições de contorno de primeiro tipo (condição de *Dirichlet*). As dificuldades inerentes da aplicação das condições de contorno em problemas com esta geometria são removidas aplicando-se uma mudança apropriada de coordenadas. Devido à natureza não-linear da equação da difusão do problema proposto, aplica-se a Técnica da Transformada de *Kirchhoff* para a linearização do termo difusivo da equação da energia. Feito isso, a equação da energia resultante é resolvida através da aplicação da TTIG e a evolução da distribuição de temperatura é determinada utilizando-se corretamente às fórmulas de inversão de todas as transformações efetuadas. Calculam-se, então, os parâmetros físicos de interesse para diversos formatos elípticos e realiza-se a comparação, quando possível, com os resultados obtidos numericamente através do Método dos Volumes Finitos (PATANKAR, 1980) por meio do *software ANSYS/FluentTM 16.0*.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Conforme proposto, será estabelecido que o termo-fonte no problema físico estudado é uniformemente distribuído na pastilha de combustível. Não será tratada aqui a transferência de calor na camisa e na folga camisa-pastilha. Toda a análise será feita somente para o problema difusivo no material físsil. Como a variação da temperatura periférica da camisa é relativamente desprezível quando comparada com a magnitude das variações de temperatura presentes em toda a célula, será prescrito aqui a condição de temperatura constante no contorno da pastilha. A equação da difusão que trata da conservação da energia no domínio Ω e contorno Γ , é dada por:

$$\nabla \cdot k(T) \nabla T(x, y, t) + \mathcal{Q} = \rho c_p(T) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}, \quad \{(x, y) \in \Omega, t > 0\}, \quad (1)$$

$$T(x, y, t) = T_p, \quad \{(x, y) \in \Gamma, t > 0\}, \quad (2)$$

$$T(x, y, 0) = T_i = T_p, \quad \{(x, y) \in \Omega\}. \quad (3)$$

sendo que $k(T)$ é a condutividade térmica do material, ρ é a massa específica, $c_p(T)$ é o calor específico e \mathcal{Q} representa o termo-fonte, T_p é a temperatura da superfície da pastilha e T_i , representa a condição de temperatura inicial do problema.

2.1. Linearização da Equação da Difusão

Para facilitar o procedimento analítico, a equação da difusão será adequadamente linearizada através da aplicação da Transformada de *Kirchhoff* (ÖZISIK, 1993) sobre o potencial $T(x,y,t)$:

$$\nabla^2 T^*(x,y,t) + \frac{\mathcal{Q}}{k_0} = \frac{1}{\alpha(T^*)} \frac{\partial T^*(x,y,t)}{\partial t}, \quad \{(x,y) \in \Omega, t > 0\}, \quad (4)$$

$$T_p^*(x,y,t) = \frac{1}{k_0} \int_{T_0}^{T_p} k(T') dT' = T_p^*, \quad \{(x,y) \in \Gamma, t > 0\}, \quad (5)$$

$$T^*(x,y,0) = T_i^* = T_p^*, \quad \{(x,y) \in \Omega\}, \quad (6)$$

com, $\alpha(T^*) = k(T^*) / \rho c_p(T^*)$ e $T^*(x,y,t)$. Os parâmetros T_p^* e T_i^* são, respectivamente, os potenciais temperatura de contorno e inicial transformados.

2.2. Adimensionalização da Equação da Energia

A não-linearidade que ocorre no coeficiente do termo transiente será convenientemente removida através da transformação de coordenadas que adimensionaliza a equação da difusão de energia. Assim, na sua forma adimensional, Eqs. (1), (2) e (3) são reescritas como:

$$\nabla^2 \theta(X,Y,\tau) + 1 = \frac{\partial \theta(X,Y,\tau)}{\partial \tau}, \quad \{(X,Y) \in \Omega, \tau > 0\}, \quad (7)$$

$$\theta(X,Y,\tau) = \theta_p = 0, \quad \{(X,Y) \in \Gamma, \tau > 0\}, \quad (8)$$

$$\theta(X,Y,0) = \theta_i = 0, \quad \{(X,Y) \in \Omega\}, \quad (9)$$

com:

$$X = \frac{x}{L_{ref}}, \quad Y = \frac{y}{L_{ref}}, \quad \tau = \frac{t \alpha(T)}{L_{ref}^2}, \quad \theta(X,Y,\tau) = \frac{[T^*(X,Y,\tau) - T_p^*]}{L_{ref}^2 \mathcal{Q}} k_0, \quad L_{ref} = \frac{2 A_s}{Per}. \quad (10)$$

sendo que, L_{ref} representa um comprimento de referência, A_s representa a área da seção transversal do cilindro e Per o perímetro. Para o presente problema, foi admitido desprezível os efeitos de segunda ordem referente a variação local de τ com a difusividade térmica na transformação temporal de t para τ . Para caracterizar as diversas possibilidades de contornos de geometria elíptica emprega-se o parâmetro razão de aspecto ρ_{aspec} dado por:

$$\rho_{aspec} = l/L. \quad (11)$$

sendo que l e L são, respectivamente, os comprimentos dos semi-eixos maior e menor da elipse.

Os parâmetros geométricos de interesse são visualizados na Fig. 1. Observa-se simetria em relação ao eixo X e ao eixo Y de forma que é suficiente considerar somente o domínio em um quadrante conforme destacado pela região sombreada.

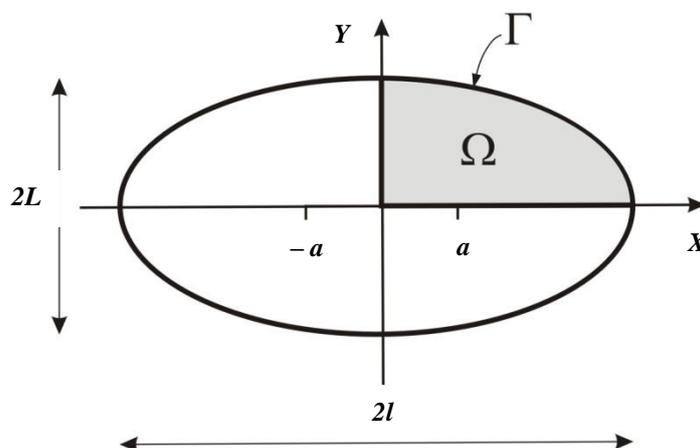


Figura 1 – Parâmetros geométricos e mudança de coordenadas do sistema cartesiano para o sistema elíptico.

2.3. Transformação de Coordenadas

A conveniência de se proceder uma transformação de coordenadas adequada se deve ao fato de que a seção elíptica do sistema de coordenadas cartesianas não permite uma representação simples de seu formato. O sistema ortogonal de coordenadas elípticas é utilizado, então, para transformar o domínio original com contorno de formato elíptico no plano (X, Y) em um domínio com contorno de formato retangular no plano transformado (u, v) , como é mostrado, para maior clareza, na Fig. 2.

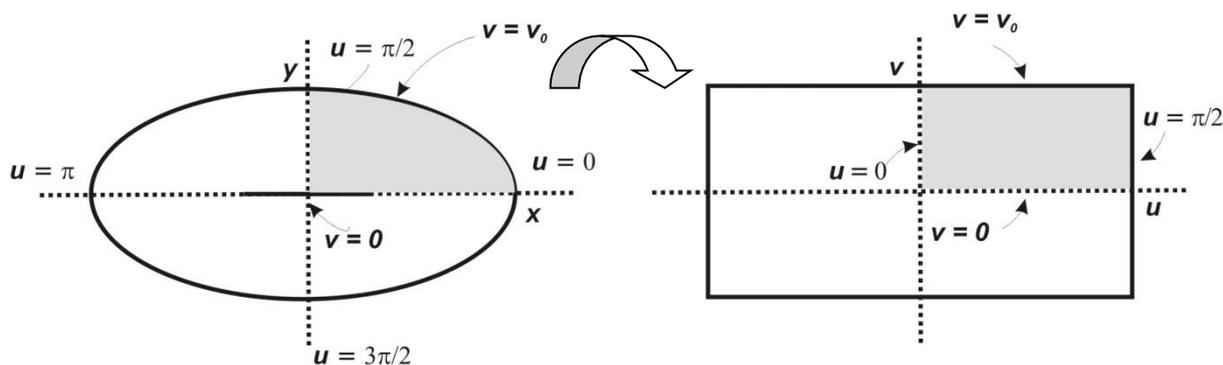


Figura 2 – Mudança de coordenadas do sistema cartesiano para o sistema elíptico.

As relações matemáticas que representam esta transformação são:

$$X = a^* \cos(u) \cosh(v), \quad Y = a^* \sin(u) \sinh(v), \quad a^* = \frac{a}{L_{ref}}, \quad (12)$$

sendo que a é a distância focal da elipse que é dada por:

$$a = \frac{L}{\cosh(v_0)}, \quad v_0 = \operatorname{arctanh}\left(\frac{L}{l}\right), \quad (13)$$

sendo que v_0 é o parâmetro que define o contorno no plano (u, v) . Os coeficientes métricos, h_u e h_v , o Jacobiano da transformação, J , e o Operador Laplaciano, ∂ , são determinados pelas seguintes relações:

$$h_u(u, v) = h_v(u, v) = a^* [\operatorname{sen}^2(u) + \operatorname{senh}^2(v)]^{1/2}, \quad (14)$$

$$J(u, v) = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = a^* [\operatorname{sen}^2(u) + \operatorname{senh}^2(v)]. \quad (15)$$

Para o domínio compreendido em um quadrante, a equação da difusão e as condições iniciais e de contorno no sistema de coordenadas elípticas são dadas por:

$$\frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial v^2} + J(u, v) = J(u, v) \frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial \tau}, \quad \left\{ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (16)$$

$$\theta(u, v, 0) = 0, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0\}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 0, \quad u = \pi/2 \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\}; \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial v} = 0, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = 0, \quad \tau > 0\}. \quad (19)$$

$$\theta(u, v, \tau) = 0, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = v_0, \quad \tau > 0\}, \quad (20)$$

2.4. Aplicação da TTIG

Os perfis de temperatura característicos do problema proposto serão obtidos a partir da aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG sobre sua equação característica. Devido a sua propriedade bidimensional, o potencial $\theta(u, v, \tau)$ será escrito em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial (APARECIDO, 1997). Portanto, a aplicação da TTIG, para cada um dos problemas propostos, será feita em partes. Considere o seguinte problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \quad \{0 < u < \pi/2\}, \quad (21)$$

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi'(\pi/2) = 0. \quad (22)$$

Os autovalores e as autofunções associados a este problema são:

$$\mu_i = 2(i-1), \quad \psi_i(u) = \cos(\mu_i u), \quad i = 1, 2, 3... \quad (23)$$

As autofunções acima são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{\theta}_i(v, \tau) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) \theta(u, v, \tau) du, \quad \text{transformada}; \quad (24)$$

$$\theta(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{\theta}_i(v, \tau), \quad \text{inversa}. \quad (25)$$

sendo que $\bar{\theta}_i(v, \tau)$ é o potencial transformado em u e $K_i(u)$ são as autofunções normalizadas:

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}}, \quad N_i = \int_0^{\pi/2} \psi_i^2(u) du = \begin{cases} \pi/2, & i = 1 \\ \pi/4, & i > 1 \end{cases} \quad (26)$$

Efetuando o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(u)$ com a equação da difusão e fazendo uso das condições de contorno dadas pelas Eqs. (18), (19) e (20) e da equação que define o problema auxiliar de autovalor, Eq. (21), obtém-se que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{\theta}_j(v, \tau)}{\partial \tau} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(v, \tau) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(v, \tau)}{\partial v^2} + C_i(v), \quad i = 1, 2, 3... \quad (27)$$

$$A_{ij}(v) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) K_j(u) J(u, v) du, \quad C_i(v) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) J(u, v) du. \quad (28)$$

Para proceder a transformação integral relativo a coordenada v , considere o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \quad \{0 < v < v_0\}; \quad (29)$$

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi(v_0) = 0. \quad (30)$$

Os autovalores e as autofunções para este novo problema auxiliar são:

$$\lambda_m = \frac{(2m-1)l}{2v_0}, \quad \phi_m(v) = \cos(\lambda_m v), \quad m = 1, 2, 3... \quad (31)$$

As autofunções $\phi_m(v)$ são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\tilde{\theta}_{im}(\tau) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} K_i(u) Z_m(v) \theta(u, v, \tau) du dv, \quad \text{transformada}; \quad (32)$$

$$\theta(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(\tau), \quad \text{inversa}. \quad (33)$$

sendo que, $Z_m(v)$ são as autofunções normalizadas e são dadas por:

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(v)}{M_m^{1/2}}, \quad M_m = \int_0^{v_0} \phi_m^2(v) dv = \frac{v_0}{2}. \quad (34)$$

sendo que, M_m são as integrais de normalização.

A transformação integral sobre a coordenada v é feita efetuando-se o produto interno das autofunções normalizadas $Z_m(v)$ com a equação diferencial transformada na coordenada u . Feito isso, fazendo uso das condições de contorno e das propriedades de ortogonalidade das autofunções correspondentes ao problema auxiliar de autovalor em v , obtém-se a seguinte relação para o potencial transformado $\tilde{\theta}_{im}(\tau)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijnm} \frac{d\tilde{\theta}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\theta}_{im}(\tau) + D_{im} = 0, \quad i, m = 1, 2, 3... \quad (35)$$

$$B_{ijnm} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^{v_0} K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) J(u, v) du dv, \quad (36)$$

$$D_{im} = - \int_0^{v_0} Z_m(v) C_i(v) dv = - \int_0^{\pi/2} \int_0^{v_0} K_i(u) Z_m(v) J(u, v) du dv. \quad (37)$$

que deve satisfazer a condição inicial transformada, que é dada por:

$$\tilde{\theta}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} K_i(u) Z_m(v) \theta_i(u, v) dv du. \quad (38)$$

O potencial transformado $\tilde{\theta}_{im}(\tau)$ pode ser obtido numericamente quando se trunca a expansão para uma dada ordem M e N :

$$\sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ijnm} \frac{d\tilde{\theta}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\theta}_{im}(\tau) + D_{im} = 0. \quad (39)$$

O potencial temperatura $\theta(u, v, \tau)$ é obtido, então, através da fórmula de inversão dada:

$$\theta(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^N K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(\tau). \quad (40)$$

2.5. Parâmetros Físicos de Interesse

2.5.1. Constante de Tempo

Para a análise dos problemas em questão é conveniente que se estabeleça um parâmetro apropriado capaz de verificar o comportamento transiente da difusão de calor em função da razão de aspecto. Para tal, é definida a função potencial temperatura normalizada $\theta_N(u, v, \tau)$ em termos da temperatura máxima do domínio no regime permanente, $\theta_{m\acute{a}x}(\infty)$:

$$\theta_N(u, v, \tau) = \frac{\theta(u, v, \tau)}{\theta_{m\acute{a}x}(\infty)}. \tag{41}$$

Conseqüentemente a esta definição, o potencial normalizado máximo e médio que ocorre no domínio, para um dado instante τ , são dados por:

$$\theta_{N\ m\acute{a}x}(\tau) = \frac{\theta_{m\acute{a}x}(\tau)}{\theta_{m\acute{a}x}(\infty)}, \quad \theta_{N\ m\acute{e}d}(\tau) = \frac{\theta_{m\acute{e}d}(\tau)}{\theta_{m\acute{e}d}(\infty)}. \tag{42}$$

Da Equação (28), observa-se que o potencial $\theta_{N\ m\acute{a}x}(\tau)$ estará compreendido no intervalo [0,1]. Assim, define-se a constante de tempo τ_c como sendo o parâmetro que determina o tempo necessário para que a temperatura $\theta_{N\ m\acute{a}x}(\tau)$ esteja a 1/e do seu valor em regime permanente, ou seja,

$$\frac{\theta_{m\acute{a}x}(\tau_{m\acute{a}x})}{\theta_{m\acute{a}x}(\infty)} = \left[1 - \frac{1}{e} \right] = 0,63212. \tag{43}$$

2.5.2. Temperatura Média

A temperatura média no domínio em um dado instante τ é expressa por:

$$\theta_{m\acute{e}d}(\tau) = \frac{[T_{m\acute{e}d}(X, Y, \tau) - T_p]}{L_{ref}^2} k = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \theta(X, Y, \tau) dA = \frac{4}{A_s} \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} \theta(u, v, \tau) J(u, v) du dv. \tag{44}$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os coeficientes B_{ijm} e D_{im} , necessários para o cálculo do potencial transformado $\tilde{\theta}_{im}$, foram obtidos a partir de integração pelo Método de Quadratura de Gauss. Para coerência na formulação numérica, os valores das autofunções e do Jacobiano da transformação foram também calculados nos pontos de quadratura. Este potencial transformado foi calculado resolvendo-se o sistema de EDO, com o auxílio da rotina computacional DIVPAG da Biblioteca IMSL FortranTM (IMSL LIBRARY, 1979). Foi observado que a convergência da série que determina o potencial temperatura fica mais lenta no início do transiente ($\tau < 0,01$), principalmente quando a razão de aspecto tende a 1. Para estes casos é necessário truncar a série que determina o potencial temperatura $\theta(u, v, \tau)$ em uma ordem N, M superior a 25 termos para se obter um mínimo de 4 dígitos de precisão. À medida que τ aumenta, observa-se que a série converge com um número bem menor de termos.

Após este procedimento, utilizando-se corretamente das fórmulas de inversão de todas as transformações efetuadas, os resultados dimensionais para a célula de UO₂ especificada são obtidos considerando-se as propriedades termofísicas variáveis. A condutividade térmica (FINK, 2000) e o calor específico (CARBAJO *et al.*, 2001), que variam devido às grandes variações de temperatura à que está submetido o material, são dados respectivamente, por:

$$k(T) = \left(\frac{4040}{464 + T} + 0,0132 e^{0,00188T} \right), \tag{45}$$

$$c_p(T) = c_1 + 2c_2\Theta + 3c_3\Theta^2 + 4c_4\Theta^3 + 5c_5\Theta^4 - c_6\Theta^{-2}, \tag{46}$$

sendo que, ambas as propriedades termofísicas são dadas no SI, $\Theta = T/1000$, T é a temperatura termodinâmica absoluta [K]; $c_1=193,2380$; $c_2=162,8647$; $c_3= -104,0014$; $c_4=29,2056$; $c_5= -1,9507$ e $c_6=2,6441$.

A Tabela 1 apresenta as condições iniciais e de contorno para o problema estudado, além do valor do termo-fonte. A taxa de geração térmica é determinada de forma que o nível de temperatura no centro da célula atingisse, em regime permanente, valores típicos que são da ordem de 1.800 K.

Tabela 1 – Parâmetros térmicos e geométricos da pastilha de UO₂ estudada.

Parâmetro de Interesse			
Temperatura na condição inicial	T_i	700	K
Temperatura na condição de contorno	T_p	700	K
Termo-fonte	ϕ'''	580	MW
Área da seção da pastilha do reator PWR	A_{past}	78,5	mm ²

A Figura 3 ilustra o comportamento da distribuição da temperatura na célula de combustível nuclear elíptica considerando uma razão de aspecto igual a 0,5. A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos para o comportamento transiente da temperatura dimensional da célula de UO₂ de mesma razão de aspecto, considerando-se as propriedades termofísicas constantes e variáveis.

Na Tabela 2 pode ser observado que a temperatura em regime permanente para a célula com propriedades constante supera em aproximadamente 70K a temperatura obtida para o modelo de célula com propriedades variáveis. Este valor corresponde a uma diferença de 6% quando comparada com o intervalo de 700K (condição inicial) a 1.813K (condição em regime permanente). Nesta mesma tabela, ainda foi apresentada uma comparação com os resultados obtidos numericamente pelo Método dos Volumes Finitos através do *software ANSYS/FluentTM 16.0* para o problema de propriedades termofísicas variáveis. Como pode ser observado, há uma boa concordância entre os resultados, principalmente no início e no fim do período transiente. As diferenças máximas que ocorrem em um mesmo instante de tempo são da ordem de 20K, o que corresponde a aproximadamente 2% do intervalo de temperatura verificando durante o transiente.

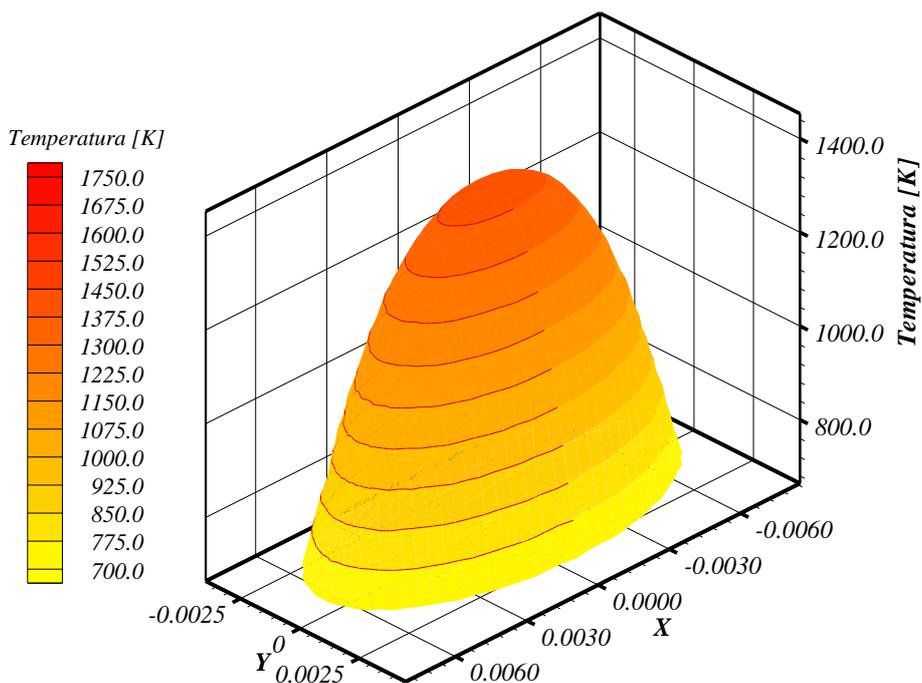


Figura 3 – Distribuição de temperatura $T(X,Y)$ em uma célula de combustível nuclear elíptica considerando $\rho_{aspec} = 0,50$ e $\tau = \tau_c$.

Tabela 02 – Valores da temperatura para a célula de combustível de UO_2 , $\rho_{aspec} = 0,50$.

t [s]	Propriedades constantes		Propriedades variáveis		
	$T_{m\acute{a}x}$ [K]	$T_{m\acute{e}d}$ [K]	$T_{m\acute{a}x}$ [K]	$T_{m\acute{a}x}^{(1)}$ [K]	$T_{m\acute{e}d}$ [K]
0,02	703,50	703,30	703,40	703,50	703,30
0,04	707,50	707,00	706,90	706,90	706,40
0,06	710,00	709,30	710,30	710,40	709,50
0,10	719,90	718,10	717,10	717,90	715,30
0,19	744,80	738,60	733,90	733,80	729,10
0,38	784,70	768,70	766,60	768,40	753,50
0,57	834,50	802,90	798,30	801,70	775,30
0,95	923,20	857,20	858,70	865,50	813,00
1,34	994,90	896,90	915,20	924,00	845,40
1,91	1128,00	964,60	992,80	1006,40	886,80
3,81	1457,70	1114,60	1202,10	1220,30	987,40
5,72	1648,20	1195,20	1355,50	1377,90	1053,60
9,54	1813,30	1263,20	1556,30	1580,20	1131,50
13,35	1863,30	1283,60	1670,40	1684,00	1170,60
19,07	1881,30	1291,00	1755,50	1764,00	1196,40
38,14	1884,80	1292,40	1811,10	1812,90	1210,20
49,59	1884,80	1292,40	1813,40	1813,60	1210,60
51,49	1884,80	1292,40	1813,50	1813,60	1210,60
53,40	1884,80	1292,40	1813,60	1813,60	1210,60
55,31	1884,80	1292,40	1813,60	1813,60	1210,60

⁽¹⁾ Método dos Volumes Finitos com o auxílio do software ANSYS/Fluent™ 16.0

E, finalmente, na Tabela 3 e na Fig. 4 são apresentados os resultados obtidos para o comportamento das constantes de tempo máxima e média em função da razão de aspecto da célula de combustível nuclear de seção transversal elíptica. De uma maneira geral, os valores das constantes de tempo máxima e média aumentam com o aumento da razão de aspecto.

Tabela 03 – Contantes de tempo máxima e média.

ρ_{aspec}	$\tau_{m\acute{a}x}$	$\tau_{m\acute{e}d}$
0,10	0,1790	0,1383
0,20	0,2038	0,1549
0,30	0,2422	0,1805
0,40	0,2907	0,2133
0,50	0,3400	0,2496
0,60	0,3717	0,2816
0,70	0,3741	0,3021
0,80	0,3671	0,3097
0,90	0,3545	0,3083

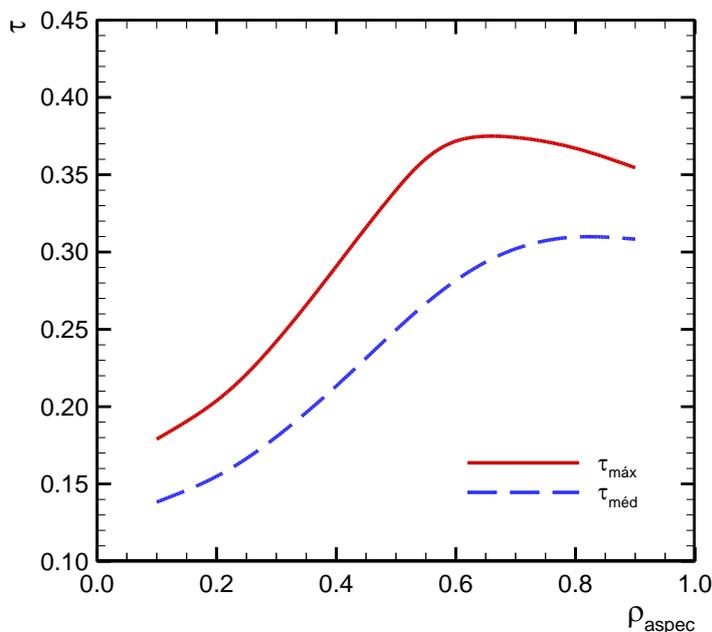


Figura 4 – Comportamento das constantes de tempo máxima e média em função da razão de aspecto.

4. CONCLUSÕES

A utilização de técnicas híbridas analítico-numéricas para solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos tem conquistado a comunidade técnico-científica devido à sua precisão e ao seu baixo custo computacional quando comparado aos métodos puramente numéricos.

Neste contexto, foi analisado no presente trabalho o problema difusivo transiente com fontes uniformemente distribuídas e propriedades termofísicas variáveis em cilindros de seção transversal elíptica submetidos a condições de contorno de primeiro tipo (condição de *Dirichlet*) utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG para a solução da equação da energia. Para facilitar o procedimento analítico, a equação da difusão foi linearizada através da aplicação da Transformada de *Kirchhoff* e foi realizada uma mudança do sistema de coordenadas.

Foi observado que a expansão que determina o potencial temperatura apresenta convergência lenta no início do transiente. Constantes de tempo definidas em relação à temperatura máxima e à temperatura média foram também calculadas para diversas razões de aspecto da célula de combustível nuclear elíptica.

Finalizando, neste trabalho a TTIG foi aplicada com sucesso na obtenção de solução de problemas difusivos transientes multidimensionais, ressaltando, aqui, o problema com domínio de geometria elíptica, o qual não admite solução pelas técnicas analíticas clássicas.

REFERÊNCIAS

ANTONINI ALVES, T. *Aplicação da transformada integral na solução de uma classe de problemas difusivos e difusivo-convectivos em domínios de geometria não-convencionais. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, Brasil, 360p, 2006.*

ANTONINI ALVES, T.; PELEGRINI, M.F.; RAMOS, R.A.V.; MAIA, C.R.M. *Análise do comportamento de células de combustível nuclear em geometria elíptica pela Técnica da Transformada Integral Generalizada. Revista Científica Linkania Master, v.8, p.24-41, 2014.*

APARECIDO, J.B. *How to choose eigenvalue problems when using generalized integral transform to solve thermal.* In: Proceedings of the 14th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Bauru, Brazil, in CD-ROM, 1997.

CARBAJO, J.J.; YODER, G.L.; POPOV, S.G.; IVANOV, V.K. *A review of the thermophysical properties of MOX and UO₂ fuels. Journal of Nuclear Materials, v.299, p.181-198, 2001.*

COTTA, R.M. *Hybrid numerical-analytical approach to nonlinear diffusion problems. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, v.27, p.217-226, 1990.*

COTTA, R.M. *The integral transform method in thermal and fluids science and engineering. New York: Begell House Inc., 1998.*

FINK, J.K. *Thermophysical properties of uranium dioxide. Journal of Nuclear Materials, v.279, p.1-18, 2000.*

GLASSTONE, S.; SESONSKE, A. *Nuclear reactor engineering: reactor systems engineering. London: Chapman & Hall, 1994.*

IMSL LIBRARY, Edition 7, GNB Building, 7500 Ballaire Blod, Houston, Texas 77036, 1979.

MAIA, C.R.M.; RAMOS, R.A.V.; PELEGRINI, M.F.; ANTONINI ALVES, T. *Heat transfer study in slug flow on elliptical ducts cross section by Generalized Integral Transform Technique. Engenharia Térmica, v.4, p.154-163, 2005.*

MAIA, C.R.M. *Solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos em domínio de geometria elíptica e bicôncava pela técnica da transformada integral generalizada. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 251p., 2003.*

MIKHAILOV M.D.; COTTA R.M. *Ordering rules for double and triple eigenseries in the solution of multidimensional heat and fluid flow problems. International Communications of Heat and Mass Transfer*, v.23, p.299-303, 1996.

ÖZISIK, M.N. *Heat conduction. New York: John Wiley & Sons, 1993.*

PATANKAR, S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.*

PELEGRINI, M.F.; ANTONINI ALVES, T.; RAMOS, R.A.V.; MAIA, C.R.M. *Hybrid analytical-numerical analysis of SAE 4150 alloy steel rods cooling. Advanced Materials Research (Online)*, v.1082, p.187-190, 2014a.

PELEGRINI, M.F.; ANTONINI ALVES, T.; RAMOS, R.A.V.; MAIA, C.R.M. *Transient heat diffusion problems with variable thermal properties solved by Generalized Integral Transform Technique. International Review of Mechanical Engineering (Testo Stampato)*, v.8, p.931-940, 2014b.

PELEGRINI, M.F. *Aplicação da técnica da transformada integral para a solução de problemas difusivos transientes com propriedades termofísicas variáveis. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, Brasil, 125p, 2005.*

SPHAIER, L.A.; COTTA, R.M. *Integral transform analysis of multidimensional eigenvalue problems within irregular domains. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, v.38, p.157-175, 2000.