

ESTUDO ESTRUTURAL DE BARRAS UNIDIMENSIONAIS E TRIDIMENSIONAIS UTILIZANDO ANÁLISE MATRICIAL E ELEMENTOS FINITOS

Carlos Alberto Chaves (UNESP FEG Guaratingueta) E-mail: cachaves@feg.unesp.br
Fernando de Azevedo Silva (UNESP FEG Guaratingueta) E-mail: fazevedo@feg.unesp.br

Resumo: Estruturas metálicas são situações muito comuns em engenharia civil, como pontes e edifícios, mas também em estruturas navais, aeronáuticas, mecânicas e etc. A aplicação mais comum do método dos elementos finitos é o elemento de barra, que forma as unidades estruturais. O avanço computacional das últimas décadas possibilitou o desenvolvimento de programas computacionais idealizados no método dos elementos finitos para análise de estruturas como ANSYS, SAP, ABAQUS e NASTRAN, mas, na maioria das vezes, utilizados sem conhecer a sua estrutura de funcionamento interno. O objetivo desse trabalho é mostrar a obtenção de resultados de deformação em elementos de barras unidimensionais da Análise Matricial de Estruturas, com o uso do EXCEL, comparando-os com resultados obtidos para elementos de barra unidimensionais e tridimensionais, utilizando o software ANSYS versão 15, que utiliza Método de Elementos Finitos.

Palavras-chave: Método do Elemento Finito; Elemento de Barra; Análise estática; ANSYS.

STRUCTURAL STUDY OF ONE AND THREE DIMENSIONAL BAR ELEMENT USING MATRIX ANALYSIS AND FINITE ELEMENT

Abstract: Metallic structures are very common situations in civil engineering, such as in bridges, and buildings, but also in naval, aeronautic, mechanical structures, and so forth. The commonest application of the finite element methods is the bar element, which forms the structural units. The computational advance in the last decades, enabled the development of computational programs, idealized in the finite element method for the structure analysis as ANSYS, SAP, ABAQUS and NASTRAN, but most of the times, they are used without the necessary knowledge of its internal functioning structure. This work aims to show the obtaining of results of deformation in elements of unidimensional bars of the Matrix analysis of structures, with the use of EXCEL, comparing them with the results obtained for one and three dimensional bar elements, using ANSYS software version 15, which uses the Finite Element Method.

Keywords: Finite Element Method; Bar Element; Static Analysis; ANSYS.

1. INTRODUÇÃO

A Análise de estruturas provavelmente é a aplicação mais comum do método dos elementos finitos. O termo “estrutura” não só diz respeito as estruturas de engenharia civil como pontes e edifícios, mas também estruturas navais, aeronáuticas, mecânicas e etc. As estruturas são divididas em elementos (ou barras) em que as relações ações \times deslocamentos são discretizadas nos nós da estrutura. As equações de equilíbrio da estrutura no sistema global de referência podem ser escritas então, sob a forma matricial (GERE e WEAVER, 1987).

O ANSYS é um software de elementos finitos que pode ser utilizado nas mais diversas classes de problemas de engenharia. A capacidade do ANSYS inclui habilidades para resolver sete tipos de análises estruturais disponíveis. Os primeiros parâmetros desconhecidos (graus de liberdade nodais) calculados em uma análise de estruturas são deslocamentos e rotações. Outras quantidades, como deformações, tensões e força de reação, são derivadas então dos deslocamentos nodais. Análises estruturais estão disponíveis apenas nos programas

ANSYS/Multiphysics, ANSYS/Mechanical, ANSYS/Structural, e ANSYS/Professional (ANSYS, 2015).

O Método dos Elementos Finitos consiste em utilizar como parâmetros as variáveis nodais de um número finito de pontos previamente escolhidos, denominados de nós. No MEF o domínio de integração é subdividido em uma série de regiões, ou elementos finitos, interconectadas entre si através de um número discreto de pontos nodais. Para cada região (ou elemento) se estabelece um comportamento local aproximado, de tal forma que as incógnitas do problema em qualquer ponto do elemento podem ser definidas em função das mesmas incógnitas nos pontos nodais do elemento. Em seguida, minimizando o funcional do problema, obtido das somas das contribuições de cada elemento, se chega a um sistema total de equações, cuja solução permite conhecer os valores das incógnitas nos pontos nodais. Finalmente a partir desses valores, calcula-se outros resultados intermediários (ALVES FILHO, 2000).

Kelesoglua e Ulker (2005) descrevem uma simulação de treliças espaciais por meio do EXCEL. Foi montada (manualmente) planilha de matrizes de rigidez seguindo a Análise Matricial de Estruturas, para a realização dos cálculos de deslocamento das treliças.

Huseynov (2013) descreve uma metodologia de programação orientada a objetos no VBA do EXCEL para estudantes de modelagem computacional.

Teh e Morgan (2005) descrevem a estratégia de ensino do MEF por meio do EXCEL para alunos de engenharia em final de curso. Os autores consideram o uso de softwares comerciais com MEF muito complexo para aqueles que estão iniciando o estudo do método e o uso de programação computacional é descartado, pois muitos alunos não possuem o conhecimento mínimo para programar. A estratégia adotada pelos autores foi a utilização da planilha de cálculo EXCEL que geralmente são acessíveis a todos estudantes.

Este trabalho tem como objetivo apresentar um caso simples de análise de uma barra estrutural, obtendo expressões da Análise Matricial de Estruturas, cujas expressões serão comparadas com simulações da barra utilizando-se do software comercial ANSYS.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A Figura 1 apresenta o modelo de elemento de barra, sendo que a extremidade esquerda está engastada e tendo uma força F de 10 kN aplicada na seção transversal na extremidade direita da barra. O material da barra de comprimento L de 240 cm é aço estrutural com módulo de elasticidade E de 210 GPa, Coeficiente de Poisson ν igual a 0,28, Densidade ρ de 7,8 Mg/m³, Tensão última de tração S_{ut} de 460 MPa, Tensão de escoamento S_y de 250 MPa e diâmetro da seção transversal d de 4 cm. O objetivo é calcular os deslocamentos (u) na barra utilizando o método dos elementos finitos.

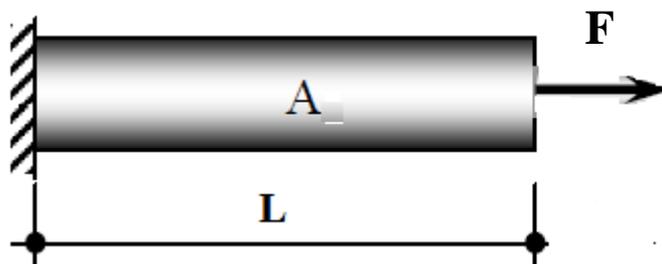


Figura 1 - Elemento de barra de comprimento L e área A submetido à carga F

3. ELEMENTO DE BARRA COM QUATRO ELEMENTOS

Divide-se a barra em quatro elementos, com comprimentos L_1 , L_2 , L_3 e L_4 , conforme a Figura 2, portanto tendo quatro nós. Observando a figura, verifica-se que o elemento 1 é composto pelos nós 1 e 2, o elemento 2 pelos nós 2 e 3, o elemento 3 pelos nós 3 e 4, e o elemento 4 pelos nós 4 e 5. Na Figura 2, F_{24} corresponde a força de 10 kN aplicada na extremidade da secção transversal da barra, e F_{12} , F_{21} , F_{13} , F_{22} , F_{14} e F_{23} correspondem a esforços internos aos elementos de barra e F_{11} corresponde a reação de F_{24} na secção engastada.

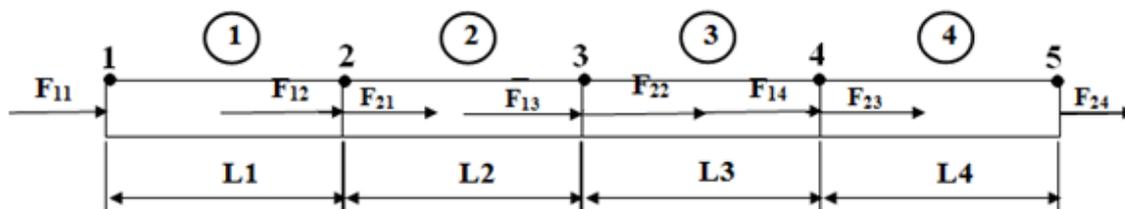


Figura 2 - Elemento de barra com quatro elementos de comprimentos L_1 , L_2 , L_3 e L_4 , respectivamente.

A seguir monta-se a matriz de rigidez para a barra toda e vetor de carga para cada um dos elementos, e para diferenciar o problema, considera-se que cada elemento tenha propriedade diferente, ou seja, módulo de elasticidade E_1 , E_2 , E_3 e E_4 ; área da secção transversal A_1 , A_2 , A_3 e A_4 e comprimento L_1 , L_2 , L_3 e L_4 . Para demonstração da sobreposição do vetor de carga, será considerada que a força aplicada é constante (GRANDIN, 1986).

Elemento 1: Composto pelos nós 1 e 2

$$\begin{aligned}
 [K^1] &= \frac{E_1 \cdot A_1}{L_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \{F^1\} &= \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} \\
 \{u^1\} &= \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Elemento 2: Composto pelos nós 2 e 3

$$\begin{aligned}
 [K^2] &= \frac{E_2 \cdot A_2}{L_2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \{F^2\} &= \begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \end{Bmatrix} \\
 \{u^2\} &= \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Elemento 3: Composto pelos nós 3 e 4

$$[K^3] = \frac{E_3 \cdot A_3}{L_3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} F^3 \end{cases} = \begin{cases} F_{13} \\ F_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3 \end{cases} = \begin{cases} u_{13} \\ u_{23} \end{cases} \tag{4}$$

Elemento 4: Composto pelos nós 4 e 5

$$[K^4] = \frac{E4 \cdot A4}{L4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} F^4 \end{cases} = \begin{cases} F_{14} \\ F_{24} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^4 \end{cases} = \begin{cases} u_{14} \\ u_{24} \end{cases} \tag{5}$$

A matriz de rigidez global $[K]$ e o vetor de carga global $\{F\}$ da estrutura, são obtidos a partir da sobreposição das matrizes e vetores elementares, criando-se uma matriz (ou vetor) que englobe todas as matrizes elementares. Os efeitos dos graus de liberdade coincidentes são somados, como observado a seguir. A matriz de rigidez global da estrutura é dada conforme

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{E1 \cdot A1}{L1} & -\frac{E1 \cdot A1}{L1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E1 \cdot A1}{L1} & \frac{E1 \cdot A1}{L1} + \frac{E2 \cdot A2}{L2} & -\frac{E2 \cdot A2}{L2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E2 \cdot A2}{L2} & \frac{E2 \cdot A2}{L2} + \frac{E3 \cdot A3}{L3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E3 \cdot A3}{L3} & \frac{E3 \cdot A3}{L3} + \frac{E4 \cdot A4}{L4} & -\frac{E4 \cdot A4}{L4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E4 \cdot A4}{L4} & \frac{E4 \cdot A4}{L4} \end{bmatrix} \tag{6}$$

O vetor de carga global da estrutura é dado conforme

$$\{F\} = \begin{cases} F_{11} \\ F_{12} + F_{21} \\ F_{13} + F_{22} \\ F_{14} + F_{23} \\ F_{24} \end{cases} \tag{7}$$

O vetor de deslocamentos globais da estrutura é dado conforme

$$\{ u \} = \begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

3. MÉTODO

3.1 Método numérico

Foi utilizado o software ANSYS versão 15 para realização de todas as simulações. Nesse software, a discretização das equações é realizada através do Método de Elementos Finitos (MEF). O processo de discretização passa por três etapas: malha computacional (subdivisão do domínio), discretização das equações (transformação do sistema de equações diferenciais parciais em equações algébricas) e interpolações (fechamento do sistema algébrico).

3.2 Geração da malha para elemento de barra unidimensional

Foi utilizado o gerador de malha do ANSYS versão 15, determinando uma malha com 4 elementos (Figura 6). Para elaboração das malhas, foi utilizado o comando CREATE e POINT no modo MANUAL INPUT do ANSYS versão 15, criando dois pontos P1 (0, 0, 0) e P2 (0, 0, 24). A seguir, utilizou-se o comando CONCEPT e LINES FROM POINTS, para criar-se uma linha reta unindo os pontos P1 e P2. Em seguida, utilizou-se o comando CONCEPT e CROSS SECTION na situação CIRCULAR para criar-se o elemento barra de secção circular com raio de 0,1954 m. Na árvore de projeto, seleciona-se 1 PART, 1 BODY e LINE BODY para ativar a secção circular gerada. Em MODEL na ÁRVORE DE PROJETO, seleciona-se MESH e depois EDGE SIZING para em TYPE escolher NUMBER OF DIVISIONS para gera-se 4 elementos (ANSYS, 2015).

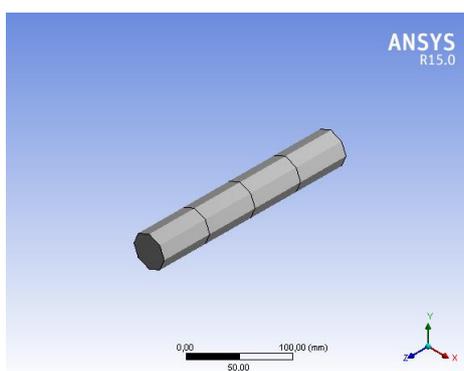


Figura 3 - Estrutura de barra de 4 elementos

3.3 Condições de contorno

A Figura 4 apresenta as condições de contorno do problema utilizando o módulo MODEL do ANSYS versão 15, determinando a condição de engastamento a esquerda da barra e a condição de carregamento de 10 kN a direita da barra. Para inserção das condições de contorno foi utilizado na ÁRVORE DE PROJETO do módulo MODEL o comando STATIC STRUCTURAL e ANALYSIS SETTINGS do ANSYS versão 15. A seguir, utilizou-se o

comando INSERT e FIXED SUPPORT para gerar o engastamento (em azul na Figura 4) e INSERT e FORCE, na condição de COMPONENTS (0 N, 0 N, -10.000 N) para gerar o carregamento no lado direito do elemento de barra (em vermelho na Figura 4).

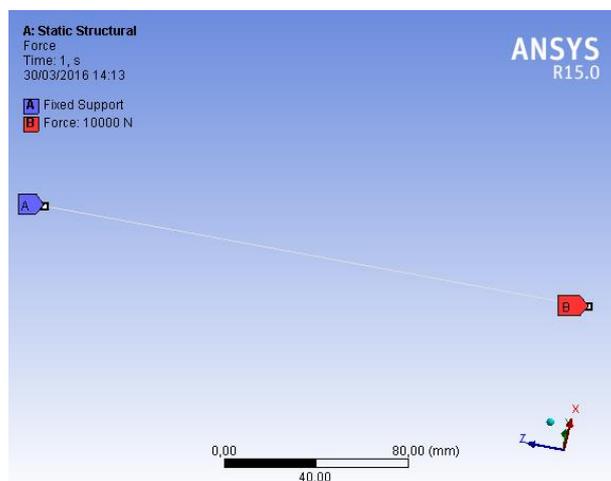


Figura 4 - Condições de contorno da estrutura de barra

3.4 Geração da malha tridimensional

Devido a expectativa de altas deformações na região de carregamento (força aplicada) no elemento de barra tridimensional, foi utilizada a ferramenta “controle de malha SIZING” do ANSYS para aumentar a densidade da malha, utilizando os parâmetros tamanho de elemento e taxa de refinamento (ANSYS 15, 2015).

Para a análise de convergência foi realizada a variação do tamanho do elemento da malha nesta região e acompanhado o comportamento da máxima deformação na barra, visto ser o parâmetro de maior interesse para análise.

Verifica-se que com a redução do tamanho do elemento da malha (aumento de densidade da malha), ocorreu uma redução significativa do erro relativo a patamares inferiores a 1%, para as malhas fina e superfina, demonstrando a convergência da máxima deformação na barra (Tabela 1).

Observa-se da Tabela 1 que não há diferença na máxima deformação na barra, entre uma malha fina e superfina, assim, foi utilizado o tipo de malha fina, visualizada na Figura 5, com refinamento da região de máxima deformação, 90.704 nós, 62.746 elementos, tamanho do elemento 0,004 m e taxa de refinamento 2 na região de máxima deformação.

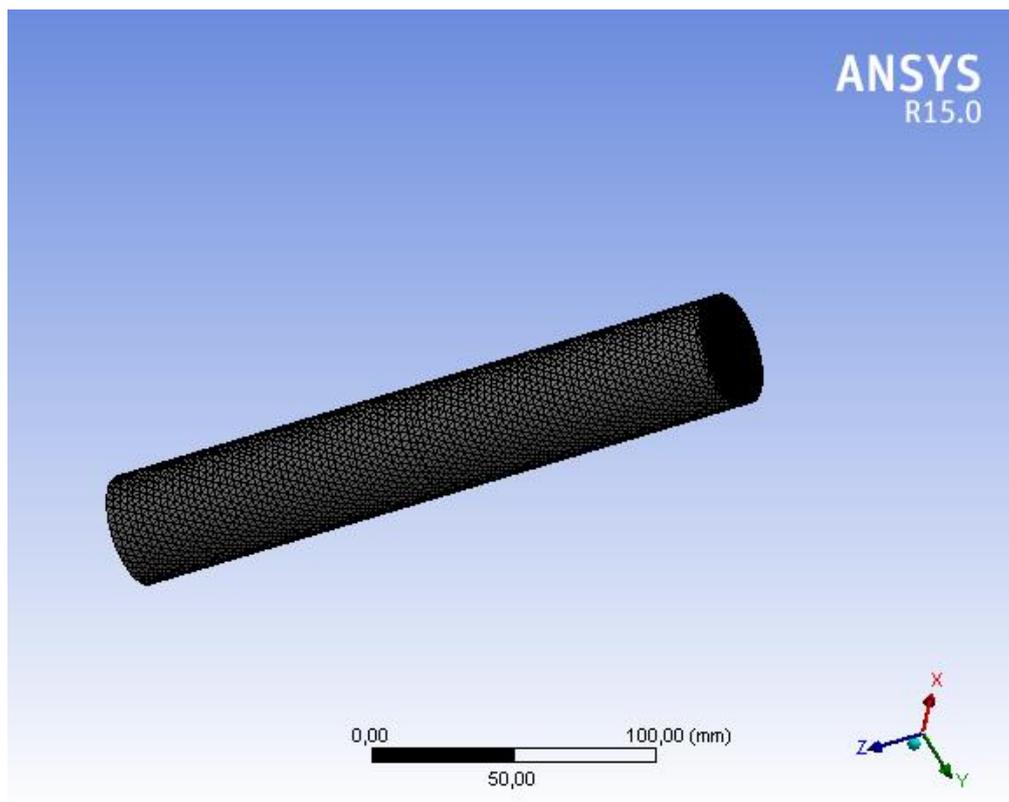


Figura 5 - Resultado da discretização com refinamento da região de máxima deformação do elemento de barra tridimensional estudado

Tabela 1 - Comportamento da máxima deformação (mm) no elemento de barra tridimensional para o estudo de refinamento de malha.

Tipo de malha	Máxima deformação total (mm)	Erro relativo
Grosseira (6.065 nós e 3.754 elementos)	0,0090552	-
Média (8.876 nós e 30.176 elementos)	0,0090569	0,019%
Fina (90.704 nós e 62.746 elementos)	0,0090579	0,011%
Super fina (189.007 nós e 132.779 elementos)	0,0090580	0,001%

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As variações nas deformações do elemento de barra são mostradas nas Tabelas 2 e 3. Os resultados das simulações são apresentados nas Figuras 6 e 7. Os resultados das tabelas mostram uma boa concordância entre solução exata e soluções numéricas 1D e 3D. Finalmente, os resultados obtidos por meio do método dos elementos finitos e NSYS 1D (Tabela 2) e ANSYS 3D (Tabela 3) são comparados com a solução exata obtida da Teoria da Mecânica dos sólidos. Dos resultados numéricos obtidos através das tabelas, observa-se que maior concordância entre os resultados obtidos pela Mecânica dos Sólidos e ANSYS 1D (erro relativo de 0,0784%). Dos resultados mostrados na Tabela 3, observa-se que os resultados entre a Mecânica dos Sólidos e ANSYS 3D são mais afastados do caso 1D, mas ainda próximos dos resultados exatos (erro relativo de 0,402%).

A deformação total do elemento de barra usando o ANSYS pode ser visualizada na Figura 6 e Figura 7, onde a cor vermelha representa as maiores deformações e a cor azul

representa a menor deformação total. O máximo valor de deformação total foi de 0,0091017 mm (Figura 6) com o ANSYS 1D, e 0,009058 mm (Figura 6) com o ANSYS 3D.

Uma observação dos máximos valores de deformação total, em ambos os casos, indica que há uma similaridade de convergência entre as áreas sujeitas à máxima deformação total.

Tabela 2 - Resultados da comparação da solução exata e solução por elementos finitos para o elemento de barra com 4 elementos considerando 1D ANSYS versão 15

	SOLUÇÃO EXATA	1D ANSYS	Erro relativo
Deformação u₁ (mm)	0	0	0%
Deformação u₂ (mm)	0.002273642	0.0022754	0.0773%
Deformação u₃ (mm)	0.004547284	0.0045508	0.0773%
Deformação u₄ (mm)	0.006820926	0.0068262	0.0773%
Deformação u₅ (mm)	0.009094568	0.0091017	0.0784%

Tabela 3 - Resultados da comparação da solução exata e solução por elementos finitos para o elemento de barra com 4 elementos considerando 3D ANSYS versão 15

	SOLUÇÃO EXATA	3D ANSYS	Erro relativo
Deformação u₁ (mm)	0	0	0%
Deformação u₂ (mm)	0.002273642	0.0022645	0.402%
Deformação u₃ (mm)	0.004547284	0.0045290	0.402%
Deformação u₄ (mm)	0.006820926	0.0067935	0.402%
Deformação u₅ (mm)	0.009094568	0.009058	0.402%

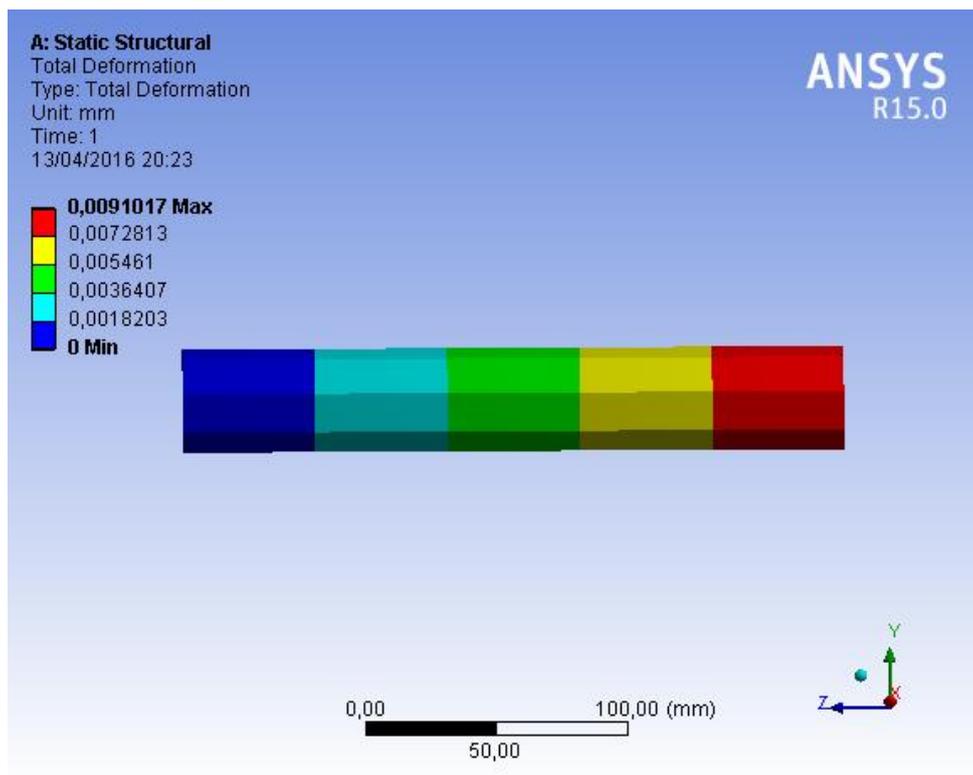


Figura 6 - Deformação total no elemento de barra modelado com o ANSYS 1D.

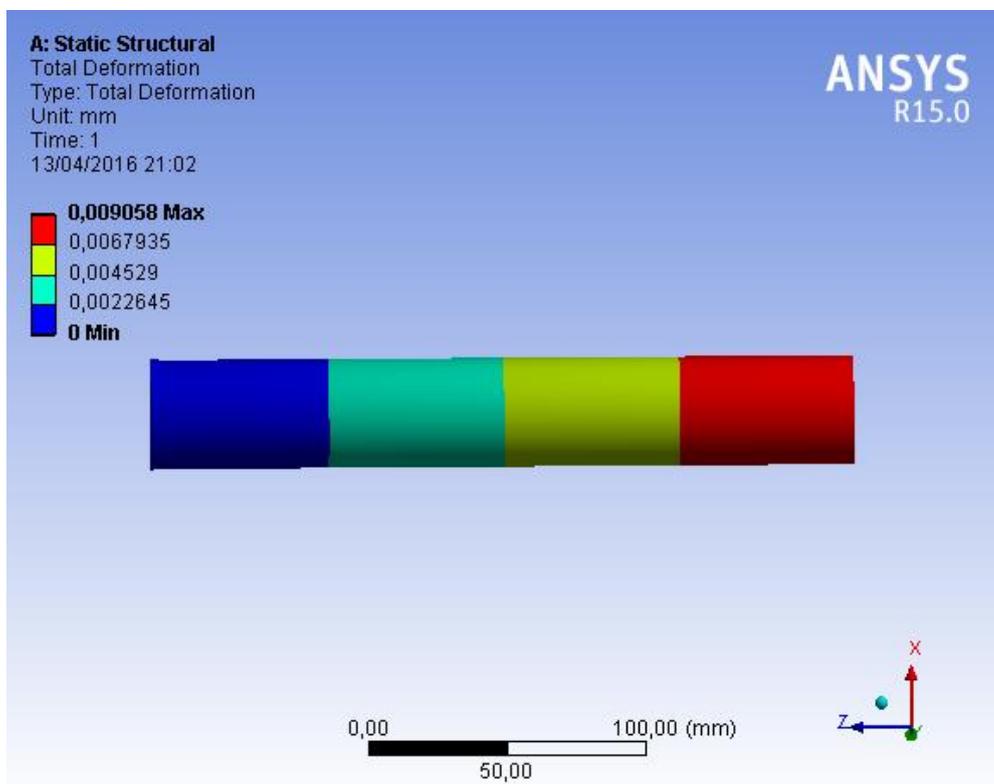


Figura 7 - Deformação total no elemento de barra modelado com o ANSYS 3D.

5. CONCLUSÕES

O presente trabalho aborda a comparação do erro numérico entre soluções exatas para deslocamentos, na análise de elementos de barra unidimensionais e tridimensionais, e soluções aproximadas obtidas através do método dos elementos finitos. Os cálculos e as análises foram feitos considerando uma barra de aço estrutural com módulo de elasticidade 210 GPa engastada em uma extremidade, de dimensões nominais dadas por diâmetro 0,04 m, e 0,24 metro de comprimento, sob uma carga concentrada de 10.000 N na outra extremidade da barra.

Através da fórmula analítica e com o uso do software de análise estrutural encontrou-se o valor para a deformação total da viga, podendo assim calcular os erros relativos. As soluções analíticas para as deformações totais foram comparadas com as soluções numéricas obtidas através do software estrutural ANSYS.

Os erros encontrados foram bastante reduzidos e muito próximos, em ambos os casos, 1D (erro relativo de 0,0784%) e 3D (erro relativo de 0,402%), quando comparados com a correspondente solução exata, sendo assim, satisfatório a aplicação do Método dos Elementos Finitos para o cálculo estrutural.

REFERÊNCIAS

ALVES FILHO, A. *Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE*, 5. ed., Ed. Érica, São Paulo, 292p., 2000.

ANSYS 15. User`s Manual. 2015.

GERE, J.; WEAVER Jr., W. *Análise de Estruturas reticuladas*. Ed. Guanabara, Rio de Janeiro, 1987. 443p.

GRANDIN, H. *Fundamental of the Finite Element Method*, New York: Macmillan Publishing, 1986.

HUSEYNOV, S. T. *Methodology of laboratory workshops on computer modeling with programming in Microsoft Excel Visual Basic for applications*. 2013 7th International Conference on Application of Information and Communication Technologies. IEEE, out. 2013.

KELESOGLUA, O.; ULKER, M. *Multi-objective fuzzy optimization of space trusses by Ms-Excel*. *Advances in Engineering Software*, v. 36, n. 8, p. 549–553, ago. 2005.

TEH, K.; MORGAN, L. *The Application of EXCEL in Teaching Finite Element Analysis to Final Year Engineering Students*. *Proceedings of the 2005 ASEE/A aeE 4th Global Colloquium on Engineering Education*. Australasian Association for Engineering Education. 2005.