

## ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS: APLICAÇÃO DO MÉTODO DO COMPRIMENTO DE ARCO DE CRISFIELD

William Carvalho Amaral de Sousa. E-mail: williamcarvalho12@hotmail.com.

Isamu Ikeda Júnior. E-mail: isamu.junior@pro.unifacs.br

**Resumo:** O presente trabalho tem por objetivo demonstrar os problemas de “salto” dinâmico sob controle de carga (*snap-through*) e “salto” dinâmico sob controle de deslocamento (*snap-back*), associados a não linearidade geométrica de estruturas. Através da implementação computacional, em linguagem C, do processo incremental-iterativo de Newton-Raphson associado à restrição imposta pelo método do Comprimento de Arco proposto por Crisfield (1981), o artigo traz exemplos de análises estruturais para grandes deslocamentos, ilustrados nos casos de treliças planas com três e quatro nós, identificando e passando por todos os pontos críticos (pontos limites) presentes nos Caminhos de Equilíbrio. Com isso, este trabalho servirá de ferramenta para um melhor entendimento do comportamento estrutural para o caso de grandes deformações e/ou grandes deslocamentos.

**Palavras-chave:** Estruturas; Não linearidade geométrica; Comprimento de Arco.

## NONLINEAR ANALYSIS OF STRUCTURES: APPLICATION TO CRISFIELD'S ARC LENGTH METHOD

**Abstract:** The present paper goals to show the snap-through and snap-back problems associated to geometric nonlinearity of structures. With an computational implementation, in C language, of the Newton-Raphson incremental/iterative procedure associated to arc length constraint equation proposed by Crisfield (1981), the paper comes some examples of structural analysis to large displacement, illustrated in cases of the plane trusses with three and four nodes, for identified and passed for all limit points present in the load/deflection curve. Thereby, this work will be a tool for a better understanding of the structural behavior in cases of large deformations and/or large displacement.

**Keywords:** Structures; Geometric nonlinearity; Arc length.

## INTRODUÇÃO

Há certos problemas em que uma análise estrutural simples, linear, não é suficiente, sendo necessário partir para uma análise mais complexa, dita: não linear; com objetivo de capturar todos os pontos críticos presentes no sistema estrutural. Existem alguns tipos de não linearidade na mecânica estrutural, os principais são: não linearidade física, de contato e geométrica, sendo este último o foco deste artigo.

Como exemplo dessa necessidade de estudo, têm-se as tubulações em águas marinhas profundas, onde estas estão sujeitas a altas pressões hidrostáticas, existindo a possibilidade de ruína da tubulação por meio do fenômeno de propagação de colapso, estruturas de cascas finas, além de sistemas treliçados com grande flexibilidade.

Quando se trabalha, na análise estrutural, com grandes deformações (também chamada de deformações finitas) e/ou grandes deslocamentos a configuração deformada da estrutura se

diferencia expressivamente da configuração indeformada. Neste caso, as equações de equilíbrio linear (1) deixam de ser validas, já que esta equação leva em consideração a geometria corrente da estrutura, inerente à matriz de rigidez,  $[K]$ . Sendo  $\{F\}$  o vetor de cargas externas e  $\{u\}$  o vetor deslocamentos. Logo, a cada mudança dessa configuração, essa equação deverá ser reformulada.

$$[K]\{u\} - \{F\} = 0 \quad (1)$$

Nesse tipo de análise, a matriz de rigidez,  $[K]$ , é função dos deslocamentos  $\{u\}$ . Portanto, não é possível uma solução imediata, se tornando necessário o emprego de métodos numéricos, como os processos incrementais e/ou iterativos para obter os deslocamentos da estrutura na condição de equilíbrio.

Segundo Crisfield (1981), dentro da análise não linear de estruturas, os fenômenos de “salto” dinâmico sob controle de carga (*snap-through*) e “salto” dinâmico sob controle de deslocamento (*snap-back*) são os mais difíceis de serem solucionados. Estes problemas ocorrem quando a curva carga x deslocamento (também chamada de caminho de equilíbrio) apresentam pontos de máximos e/ou de mínimos (pontos limites ou pontos singulares), como mostra a figura 1.

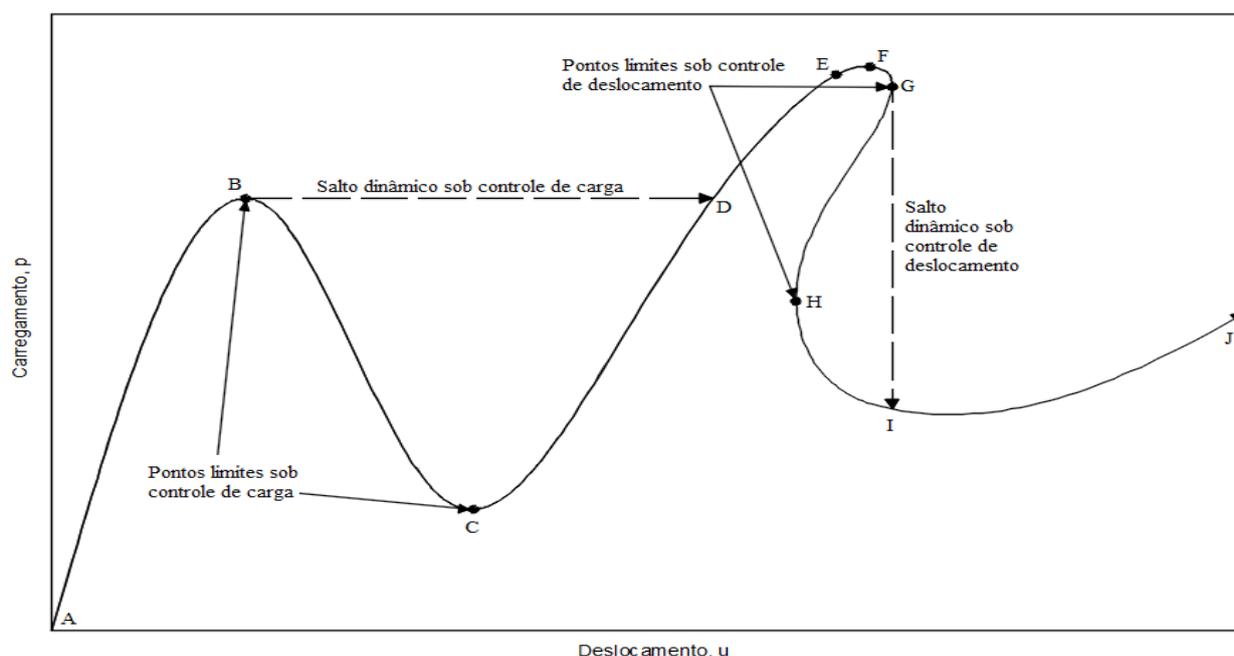


Figura 1 – Caminho de Equilíbrio  
Fonte: Adaptado, CRISFIELD (1981)

Próximo a esses pontos, a estrutura perde a estabilidade, matriz de rigidez menor ou igual a zero, e então ocorre o *snap-through*, ou seja, a estrutura se deforma do ponto B ao D com carga constante, ou um *snap-back*, ponto G ao I, onde a carga na estrutura diminui mantendo o deslocamento constante.

Existem diversas estruturas e sistemas que apresentam exemplos de *snaps*, pode-se destacar: O “click” de interruptores de luz ao liga-la ou desliga-la, chapas em formatos de placas

ou cascas finas sujeitas a carregamentos transversais, arcos com raio de curvatura significativo, sujeitos ao mesmo tipo de carregamento das placas e cascas, treliças, planas ou espaciais, com pequenos ângulos entre os elementos e a horizontal, e alguns tipos de pórticos.

Na ocorrência de geometrias, formas e/ou materiais especiais, não há alternativa a não ser partir para uma análise mais completa e complexa, partindo do pressuposto da não linearidade da estrutura. Segundo Hrinda e Nguyen (2008), as formas modernas, mais leves, para estruturas gerou a obrigação da investigação das instabilidades não lineares, visto que, treliças com baixo peso, por exemplo, são geralmente muito flexíveis, o que as torna instáveis.

Para a realização do trabalho, houve a necessidade de desenvolver um programa para análise não linear, implementando um algoritmo, em linguagem C, capaz de determinar inúmeros pontos pertencentes ao caminho de equilíbrio, passando por todos os pontos críticos (máximos ou mínimos), caso viessem a existir.

## 1 MÉTODO INCREMENTAL-ITERATIVO

A não linearidade geométrica pode ser explicada de acordo com Lacerda (2014, p. 8):

Na análise linear, as equações de equilíbrio são elaboradas com base na geometria inicial da estrutura (i.e., antes da estrutura sofrer deslocamentos ou rotações). Naturalmente, se o sistema estrutural sofrer grandes mudanças na sua geometria então aquelas equações de equilíbrio deixam de ser válidas necessitando ser reformuladas a cada mudança de geometria, causando perda de linearidade nas relações deslocamentos e deformações.

De acordo com esse conceito, diversos autores se destacaram com suas formulações para solução de sistemas não lineares. Dentre eles, os métodos mais difundidos na mecânica computacional, em particular, nas análises pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), é o Método de Newton-Raphson (N-R) e o Método de Newton-Raphson Modificado (m.N-R).

Ambos os métodos são extremamente utilizados na engenharia e na matemática para encontrar raízes de funções polinomiais. A aplicação na engenharia de estruturas se dá para solucionar a equação de equilíbrio onde a matriz de Rigidez é função dos deslocamentos, de acordo com a equação (2).

$$[K(u)]\{u\} - \{F\} = 0 \quad (2)$$

Os métodos se desenvolvem por processos incrementais, que na análise estrutural são os incrementos de carga ao longo do tempo, e iterativos, utilizados para convergir os resultados. Dentro de cada um desses processos, o N-R atualiza a matriz de rigidez,  $[K(u)]$ , a partir do último valor de deslocamento,  $\{u\}$ , encontrado. Segue-se assim até a convergência dos resultados.

O que difere do m.N-R, já que a matriz de rigidez só é atualizada a cada passo de carga, incremento, a partir do deslocamento da última posição de equilíbrio, conforme figura 2. Onde  $P_A$  e  $u_A$  representam o último ponto de equilíbrio,  $P_B - P_A$  é o incremento de carga,  $P_1$  é a carga de equilíbrio do deslocamento  $u_1$  e  $u_B$  é o deslocamento de equilíbrio da iteração.

Segundo Cook (1989, p. 598), a escolha pelo m.N-R é ocasionada pelo fato de se conseguir uma redução do custo computacional, uma vez que a matriz de rigidez só é recalculada a cada incremento de carga.

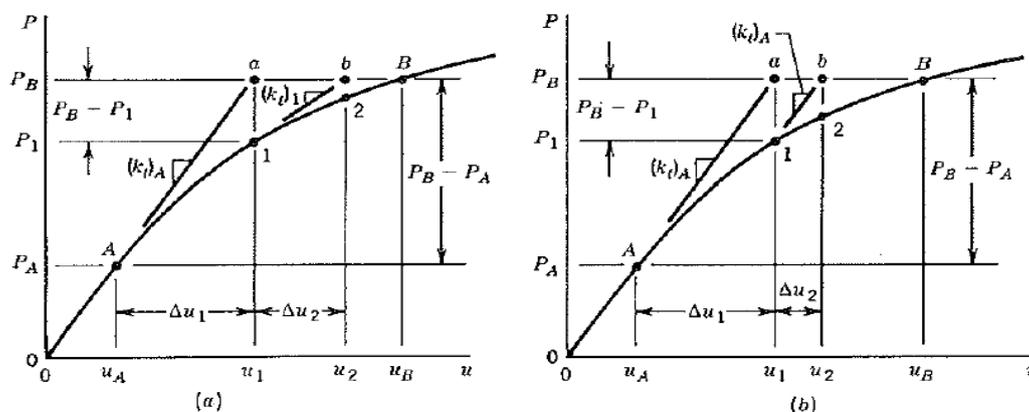


Figura 2 – Iterações para convergência no nível de carga  $P_B$ . (a) método Newton-Raphson. (b) método Newton-Raphson Modificado

Fonte: COOK (1989)

Quando se trata de estruturas que apresentam pontos limites no seu caminho de equilíbrio, tanto o N-R, quanto o m.N-R podem apresentar problemas de convergência, podendo ocorrer os fenômenos de *snap-through* e/ou *snap-back*, pois são métodos que controlam apenas a carga ou o deslocamento. Nestes casos, o método que se obtém sucesso de forma bastante eficiente é o Método do Comprimento de Arco.

## 2 MÉTODO DO COMPRIMENTO DE ARCO

Se tratando dos fenômenos de instabilidade (*snaps*), que nos métodos N-R e m.N-R geram sérios problemas de convergência, o método do Comprimento de Arco lida e os resolve de forma muito eficiente. Dentre as diversas formulações desse método, se destacam: Método de Riks e o de Crisfield, que é uma modificação/aperfeiçoamento do método de Riks e será abordado de forma detalhada no tópico seguinte.

Segundo Crisfield (1991, p. 266), Riks foi um dos primeiros a aplicar o método do Comprimento de Arco na análise estrutural, em seu trabalho “*An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*” (1979). Consiste em resolver o problema convergência controlando, simultaneamente, a carga e o deslocamento; impedindo assim, os “saltos” por controle de carga (*snap-through*) e os “saltos” por controle de deslocamento (*snap-back*). Para isso, Riks impôs uma equação de restrição circular, encontrada em Crisfield (1981), baseada na equação reduzida da circunferência, que tem por objetivo encontrar um parâmetro de carga (ou fator de carga), que limita os resultados dentro de um arco. Esta técnica pode ser associada tanto ao método de Newton-Raphson quanto ao Newton-Raphson Modificado. Como se observa na figura 3, onde  $\Delta\lambda_0$  representa o incremento do parâmetro de carga e R o comprimento de arco utilizado na equação de restrição.

Pela mesma razão descrita anteriormente, ao aplicar o método ao MEF, prefere-se a utilização associada ao m.N-R, pois o custo computacional neste tipo de análise é extremamente importante.

Além da restrição pela equação da circunferência, existem diversos outros tipos, como a restrição de hiperplano atualizado e hiperplano fixo; ao se linearizar a restrição circular (também chamada restrição de hiperesfera), obtêm-se a restrição de hiperplano, dentro deste tipo há a versão atualizada e a fixa, como destacado por Lacerda (2014).

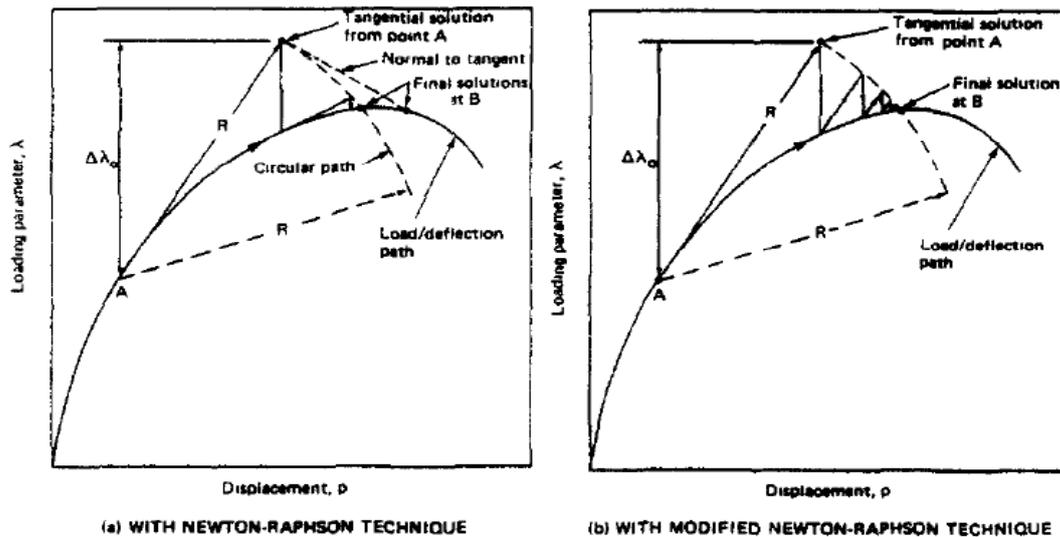


Figura 3 – Método de Riks. (a) Com método Newton-Raphson. (b) Com método Newton-Raphson Modificado  
 Fonte: CRISFIELD (1981)

Ao se utilizar um espaço tridimensional é possível se ter equações de restrição do tipo: Esférica, Cilíndrica, Eliptica, além da versão linearizada que seria o Plano. Cada um desses tipos é explicado e detalhado por Leon (2011).

## 2.1 MÉTODO DE CRISFIELD

Crisfield, em seu trabalho “A fast incremental/iterative solution procedure that handles ‘snap-through’” de 1981, desenvolveu uma formulação para acelerar o modelo do comprimento de arco de Riks, fazendo com que o método se tornasse mais rápido nas análises computacionais.

Neste tópico será apresentada toda formulação do método do Comprimento de Arco proposta por Crisfield (1981), que foi resumida e detalhada para implementação computacional nas notas de Ikeda (1991). A sequência segue de acordo com a figura 4, para carga (P) x deslocamento (U).

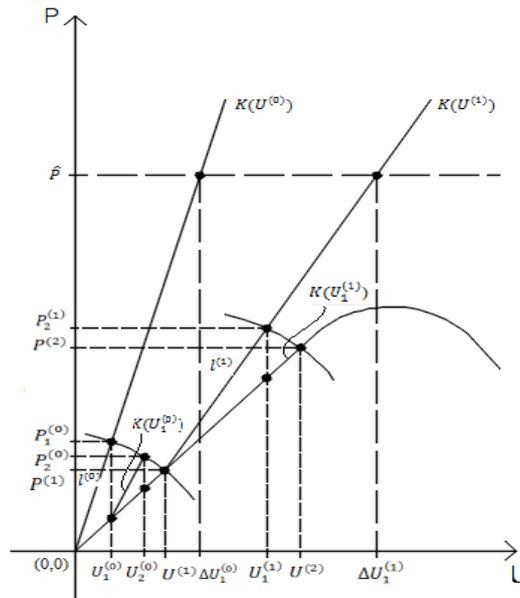


Figura 4 – Método do Comprimento de Arco de Crisfield

Partindo de uma posição de equilíbrio,  $\{P^{(0)}\}$  e  $\{U^{(0)}\}$ , geralmente iniciado em  $(0,0)$ , determina-se tanto a carga de referência ( $P_{ref}$ ) quanto o deslocamento de referência ( $U_{ref}$ ) pelas expressões (3) e (4):

$$P_{ref} = \|\delta\lambda\{\hat{P}\} - \{P^{(0)}\}\| \tag{3}$$

e

$$U_{ref} = \|\{\delta U\} - \{U^{(0)}\}\| \tag{4}$$

Onde  $\delta\lambda$  é o primeiro parâmetro de carga,  $\{\hat{P}\}$  é o vetor do carregamento da estrutura que dará a direção do primeiro incremento de carga, ambos estipulados pelo usuário do programa, e  $\{\delta U\}$  é o vetor dos deslocamentos obtido pela expressão:

$$\delta\lambda\{\hat{P}\} = [K(U^{(0)})] \{\delta U\} \tag{5}$$

Deve-se determinar previamente, também, os vetores  $\{\Delta P_{ref}\}$  e  $\{\Delta U_{ref}\}$ , que serão necessários, futuramente, para escolha do parâmetro de carga adequado.

$$\{\Delta P_{ref}\} = \delta\lambda\{\hat{P}\} - \{P^{(0)}\} \tag{6}$$

e

$$\{\Delta U_{ref}\} = \{\delta U\} - \{U^{(0)}\} \tag{7}$$

Para definir o parâmetro de carga ( $\Delta\lambda$ ) dentro de cada incremento e cada iteração, determina-se previamente o vetor deslocamento gerado pelo carregamento da estrutura,  $\{\Delta\hat{U}\}$ ,

conforme a equação (8), posteriormente encontra-se o vetor  $\{DU\}$  gerado pelo desbalanço de força (a partir da segunda iteração) de acordo com a expressão (9):

$$\{\hat{P}\} = [K^t(U_j^{(i)})] \{\Delta\hat{U}\} \quad (8)$$

e

$$\{P_j^{(i)}\} - \{P_j\} = [K^t(U_j^{(i)})] \{DU\} \quad (9)$$

$[K^t(U_j^{(i)})]$  é a matriz de rigidez tangente em função dos deslocamentos  $U_j^{(i)}$ ,  $\{P_j^{(i)}\}$  é o vetor carga encontrada na última iteração e  $\{P_j\}$  é o vetor da carga necessária para o equilíbrio na posição  $\{U_j^{(i)}\}$ . “i” e “j” representam, respectivamente, incremento e iteração.

Com isso, determina-se o parâmetro de carga a partir da equação (10), baseada na equação da circunferência, devido a restrição circular utilizada.

$$\frac{1}{Pref^2} \left\| \{P_j^{(i)} - P^{(i-1)} + \Delta\lambda\hat{P}\} \right\|^2 + \frac{1}{Uref^2} \left\| \{U_j^{(i)} + DU - U^{(i-1)} + \Delta\lambda\Delta\hat{U}\} \right\|^2 = l^2 \quad (10)$$

Desenvolvendo a expressão (10), chega-se a uma equação quadrática (11), em função do parâmetro de carga, mais facilmente empregada computacionalmente.

$$a_1\Delta\lambda^2 + a_2\Delta\lambda + a_3 = 0 \quad (11)$$

onde:

$$a_1 = \frac{\|\{\hat{P}\}\|^2}{Pref^2} + \frac{\|\{\Delta\hat{U}\}\|^2}{Uref^2}$$

$$a_2 = \frac{2 \cdot \{P_j^{(i)} - P^{(i-1)}\}^T \{\hat{P}\}}{Pref^2} + \frac{2 \cdot \{U_j^{(i)} + DU - U^{(i-1)}\}^T \{\Delta\hat{U}\}}{Uref^2}$$

$$a_3 = \frac{\|\{P_j^{(i)} - P^{(i-1)}\}\|^2}{Pref^2} + \frac{\|\{U_j^{(i)} + DU - U^{(i-1)}\}\|^2}{Uref^2} - l^2$$

$\{P^{(i-1)}\}$  e  $\{U^{(i-1)}\}$  é a carga e o deslocamento, respectivamente, da posição de equilíbrio do incremento de carga anterior e “i” é o comprimento do arco.

Na primeira iteração de cada incremento de carga, tem-se que o vetor  $\{DU\}$  é nulo, pois o desbalanço de força é igual a zero, e  $\{P_j^{(i)}\}$  e  $\{P^{(i-1)}\}$  se anulam, por possuírem o mesmo valor, assim como os vetores  $\{U_j^{(i)}\}$  e  $\{U^{(i-1)}\}$ . Sendo assim, nas primeiras iterações,  $a_2$  se torna zero e a parcela de  $a_3$  se resume a  $-l^2$ .

A equação (11) fornece dois valores para  $\Delta\lambda$ , duas raízes, deve-se optar por aquela em que o produto escalar dos vetores carga e deslocamento com os vetores  $\Delta Pref$  e  $\Delta Uref$  seja positivo, conforme a expressão (12).

$$\frac{\{U_j^{(i)} + DU + \Delta\lambda\Delta\hat{U} - U^{(i-1)}\}^T \{\Delta U_{ref}\}}{U_{ref}^2} + \frac{\{P_j^{(i)} + \Delta\lambda\hat{P} - P^{(i-1)}\}^T \{\Delta P_{ref}\}}{P_{ref}^2} > 0 \quad (12)$$

para as primeiras iterações, a equação (12) se torna:

$$\frac{\Delta\lambda \{\Delta\hat{U}\}^T \{\Delta U_{ref}\}}{U_{ref}^2} + \frac{\Delta\lambda \{\hat{P}\}^T \{\Delta P_{ref}\}}{P_{ref}^2} > 0 \quad (13)$$

O que se pretende com esse teste é escolher o incremento de carga,  $\Delta\lambda\{\hat{P}\}$ , que possua a mesma direção dos vetores de referência, mantendo assim o passo de carga na direção e sentido do caminho de equilíbrio.

Após definir o parâmetro de carga adequado, estimam-se os novos deslocamentos e cargas, de acordo com as expressões (14) e (15).

$$\{U_{j+1}^{(i)}\} = \{U_j^{(i)}\} + \{DU\} + \Delta\lambda\{\Delta\hat{U}\} \quad (14)$$

$$\{P_{j+1}^{(i)}\} = \{P_j^{(i)}\} + \Delta\lambda\{\hat{P}\} \quad (15)$$

### 2.1.1 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Checa-se a convergência do vetor  $\{P_{j+k}^{(i)}\}$ , comparando o erro ( $\varepsilon$ ) com a tolerância estipulada, de acordo com a expressão (16), com “j+k” variando de 1 até o número máximo de iterações.

$$\varepsilon = \left\| \{P_{j+k}^{(i)}\} - \{P_{j+k}\} \right\| \leq tol \quad (16)$$

Sendo que o vetor  $\{P_{j+k}\}$  é definido da seguinte maneira:

$$\{P_{j+k}\} = [K^t(\psi)] \{U_{j+k}^{(i)}\} \quad (17)$$

$[K^t(\psi)]$  é a matriz de rigidez tangente utilizada a partir da segunda iteração do programa, definida em função dos deslocamentos obtidos em cada iteração de cada incremento de carga.

No sistema local de coordenadas é possível representar a equação (17) da seguinte forma, onde os índices 1 e 2 representam o nó do elemento:

$$\begin{pmatrix} P_{j+1}^1 \\ P_{j+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \psi & -\psi \\ -\psi & \psi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{j+1}^1 \\ U_{j+1}^2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$\psi$  é uma matriz quadrada que representa a alteração da rigidez da estrutura devido a deformação, expressa como:

$$[\psi] = k\{n'\}\{n'\}^T + \frac{F}{L}(I - \{n'\}\{n'\}^T) \quad (19)$$

onde:

$$k = \frac{EA}{L_o}$$

$$F = k \cdot e$$

$I$  é a matriz identidade,  $\{n'\}$  é um vetor unitário na direção do elemento na posição deformada,  $E$  módulo de elasticidade,  $A$  área da seção transversal,  $L_o$  comprimento inicial da barra,  $L$  comprimento corrente e “ $e$ ” é o alongamento da barra.

Nota-se que para a elaboração do programa, utilizou-se a *deformação de engenharia*, onde a deformação é calculada em função do comprimento inicial da barra ( $L_o$ ).

Se o valor do erro obtido comparando  $\{P_{j+k}^{(i)}\}$  com  $\{P_{j+k}\}$  for maior que a tolerância estipulada pelo usuário, geralmente em torno de  $10^{-8}$ , processa-se outra iteração, caso contrário o critério de convergência foi satisfeito e atualiza-se todos os parâmetros da seguinte maneira:

$$\{U^{(i)}\} = \{U_{j+k}^{(i)}\} \quad (20)$$

$$\{P^{(i)}\} = \{P_{j+k}^{(i)}\} \quad (21)$$

além dos vetores e parâmetros:

$$\{\Delta U_{ref}\} = \{U^{(i)}\} - \{U^{(i-1)}\} \quad (22)$$

$$\{\Delta P_{ref}\} = \{P^{(i)}\} - \{P^{(i-1)}\} \quad (23)$$

$$U_{ref}^{(i)} = U_{ref}^{(i-1)} + \|\{\Delta U_{ref}\}\| \quad (24)$$

e

$$P_{ref}^{(i)} = P_{ref}^{(i-1)} + \|\{\Delta P_{ref}\}\| \quad (25)$$

Atualiza-se, também, o comprimento de arco para o próximo incremento de carga:

$$\sqrt{\frac{\|\{P^{(i)} - P^{(i-1)}\}\|^2}{P_{ref}^2} + \frac{\|\{U^{(i)} - U^{(i-1)}\}\|^2}{U_{ref}^2}} = l \quad (26)$$

Os parâmetros:  $U_{ref}$ ,  $P_{ref}$  e “ $l$ ”, podem ser mantidos constantes durante todo o programa, ou seja, não atualizá-los. A diferença será o tempo de convergência dos resultados, maior ou menor, a depender do problema analisado.

Observa-se que ao considerar o deslocamento de referência tendendo ao infinito ( $U_{ref} \rightarrow \infty$ ) é equivalente a um processo por controle de carga. Ao fazer essa consideração com a carga de referência ( $P_{ref} \rightarrow \infty$ ), o processo se torna por controle de deslocamento.

Em caso que a análise não encontre convergência com quatro iterações ou menos, recomenda-se que se reinicie o programa com o comprimento de arco ( $l$ ) menor.

### 3 APLICAÇÕES

Visando demonstrar o problema de *snap-through* e *snap-back* e traçar o Caminho de Equilíbrio de sistemas estruturais não lineares, foi implementado o método do Comprimento de Arco proposto por Crisfield associado ao processo incremental-iterativo de Newton-Raphson, apresentado nos tópicos anteriores, em um programa computacional, escrito em linguagem C, para soluções de treliças planas. Foram utilizados dois casos: treliça de três e de quatro nós.

Para entrada de dados no programa, utilizou-se um arquivo de texto (.txt), contendo todas informações referente a treliça de estudo, como: material, geometria, conectividade entre os nós da treliça, condição de contorno, carregamento, tolerância e total de passos. Ao executar o programa, este lê o arquivo de entrada e processa-se a análise, com a limitação de quatro iterações para convergência dos resultados; ao termino do programa, os resultados são escritos, também, em um arquivo de texto, onde contém: o passo, número de iterações realizadas para convergência do resultado e o ponto de equilíbrio, carga e deslocamento.

Para ambos os modelos, adotou-se os seguintes valores:  $\delta\lambda = 0.10$ ; arco = 1,00 (constante durante toda análise, assim como Pref e Uref) e tolerância =  $10^{-10}$ .

#### 3.1 TRELIÇA PLANA DE TRÊS NÓS

Partindo do exemplo clássico de uma treliça de dois elementos e três nós, conforme figura 5, é possível observar o complexo fenômeno do *snap-through*. Considerando:  $E=20,00$ ;  $A=10,00$ ;  $L_0 = 5,00$ ;  $b=L_0 \cos(\theta_0)=4,00$ ;  $h = 3,00$ ;  $\theta_0 \cong 36,87^\circ$  e  $F_t = -10,00$ . Onde  $F_t$  é uma carga inicial aplicada à estrutura para determinação da direção e sentido do carregamento. Para esse exemplo 225 passos, ou seja, 225 incrementos de carga, foram suficientes para representação do caminho de equilíbrio e seus pontos limites.

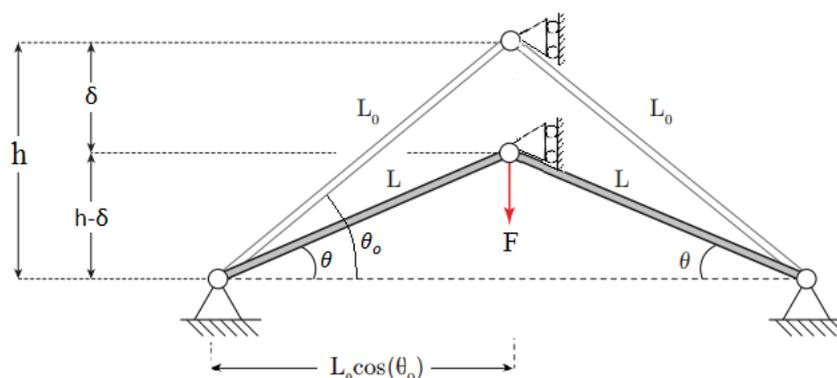


Figura 5 – Treliça de três nós  
Fonte: Adaptado, VASIOS (2015)

A partir dos valores de carga e deslocamento fornecidos pelo programa foi gerado o caminho de equilíbrio de acordo com a figura 6. Cada ponto pertencente a essa curva representa um ponto de equilíbrio da estrutura treliçada, ou seja, nesses pontos a equação (2) é satisfeita.

Ressalta-se que para um mesmo valor de carga é possível achar dois ou, até mesmo, três pontos de equilíbrio, como é o caso do carregamento (F) igual à zero, como foi observado por Lacerda (2014). No entanto, alguns desses pontos não são estáveis.

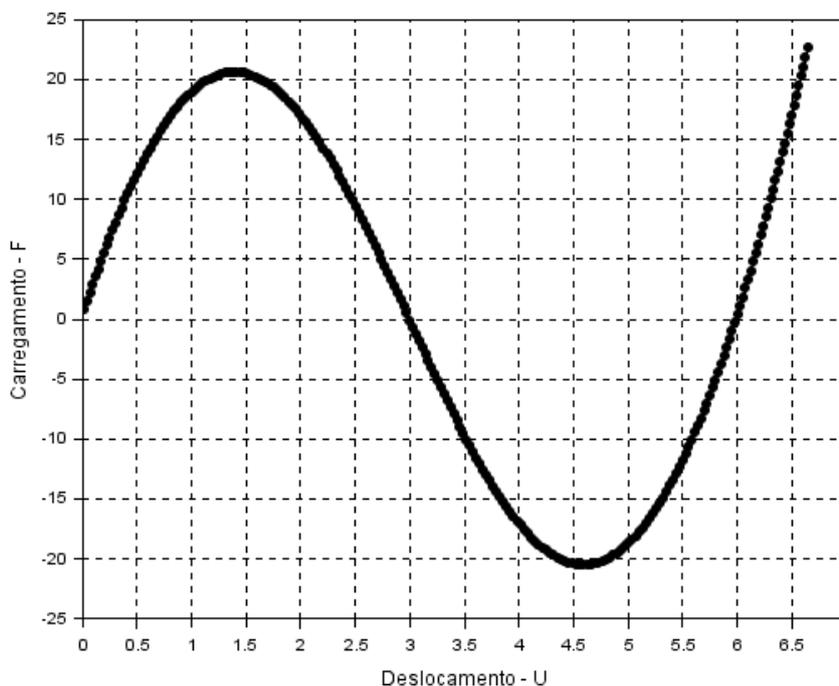


Figura 6 – Caminho de Equilíbrio da treliça de três nós

Essa instabilidade é observada entre os pontos de deslocamento igual à: 1,5 e 4,5, aproximadamente, os chamados pontos limites. Isto se verifica pelo fato da matriz de rigidez, nesse intervalo, ser menor que zero, ou seja,  $\det[K(U)] < 0$ . Logo, a estrutura se comporta como se não houvesse rigidez e o deslocamento ocorre, então, sem acréscimo de carga; ocorrendo assim, de fato, um salto repentino entre os deslocamentos 1,5 e 4,5 (nesse exemplo).

O grande problema de outros métodos de análise não linear, como N-R e m.N-R, por controle de carga, é que ao chegar no primeiro ponto limite ( $U \cong 1,5$ ), eles só encontram convergência no outro ponto de equilíbrio do carregamento 20 ( $U \cong 6,5$ ), ocorrendo então o *snap-through*, gerando a falha na análise. No entanto, esse problema não ocorre ao aplicar esses métodos controlando o deslocamento. Já o método do comprimento de arco, por controlar tanto a carga, quanto o deslocamento, consegue-se capturar todos os pontos pertencentes ao caminho de equilíbrio.

Para desenvolver uma solução algébrica do problema, partiu-se da relação de Pitágoras, encontrando a seguinte relação entre o comprimento da barra final e inicial:

$$L^2 = L_o^2 \cos^2(\theta_o) + (h - \delta)^2 = L_o^2 \cos^2(\theta_o) + (L_o \text{sen}(\theta_o) - \delta)^2 \Rightarrow$$

$$L^2 = L_o^2 \cos^2(\theta_o) + L_o^2 \text{sen}^2(\theta_o) - 2L_o \text{sen}(\theta_o)\delta + \delta^2 = L_o^2 - 2L_o \text{sen}(\theta_o)\delta + \delta^2 \Rightarrow$$

$$\frac{L^2}{L_o^2} = \frac{L_o^2}{L_o^2} - \frac{2L_o \text{sen}(\theta_o)\delta}{L_o^2} + \frac{\delta^2}{L_o^2} = 1 - 2\frac{\delta}{L_o} \text{sen}(\theta_o) + \frac{\delta^2}{L_o^2} \Rightarrow$$

$$\frac{L}{L_o} = \sqrt{1 - 2\frac{\delta}{L_o} \text{sen}(\theta_o) + \left(\frac{\delta}{L_o}\right)^2} \quad (27)$$

Ao considerar o coeficiente de Poisson, é possível escrever a área da seção transversal corrente em função do deslocamento  $\delta$ .

$$v = -\frac{\varepsilon_{lat}}{\varepsilon_{long}} \Rightarrow v \frac{\delta}{L_o} = -\varepsilon_{lat} = -\frac{(\sqrt{A}-\sqrt{A_o})}{\sqrt{A_o}} \Rightarrow v \frac{\delta}{L_o} \sqrt{A_o} = \sqrt{A_o} - \sqrt{A} \Rightarrow \sqrt{A} = \sqrt{A_o} \left(1 - v \frac{\delta}{L_o}\right) \Rightarrow A = A_o \left(1 - v \frac{\delta}{L_o}\right)^2 \quad (28)$$

Diferentemente da consideração feita para elaboração do programa e por Vasios (2015) (ambos consideraram a *deformação de engenharia*), o presente trabalho utilizou, para o desenvolvimento da solução algébrica, a *deformação verdadeira* (também chamada *deformação de Hencky*), onde a deformação é função do comprimento corrente da barra (L).

Ao substituir as expressões (27) e (28) na equação de equilíbrio, têm-se:

$$P = \frac{EA}{L} (L - L_o) = EA_o \left(1 - v \frac{\delta}{L_o}\right)^2 \left(1 - \frac{L_o}{L}\right) \Rightarrow P = EA_o \left(1 - v \frac{\delta}{L_o}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\delta}{L_o} \text{sen}(\theta_o) + \left(\frac{\delta}{L_o}\right)^2}}\right) \quad (29)$$

Pelo método dos nós, tem-se a seguinte equação, de acordo com o equilíbrio do nó intermediário, representado na figura 7:

$$F = 2P \text{sen}(\theta) \quad (30)$$

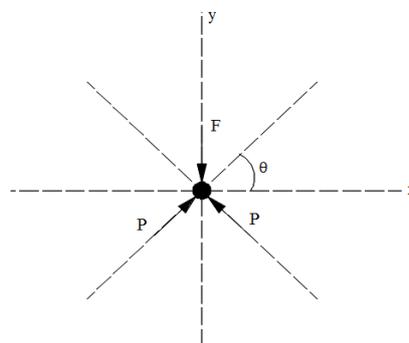


Figura 7 – Equilíbrio do nó intermediário

Substituindo (29) em (30) e fazendo as seguintes considerações:

$$\lambda = \frac{F}{2EA_o} ; \psi = \frac{\delta}{L_o} \text{ e } \omega = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\psi \text{sen}(\theta_o) + \psi^2}}$$

obtem-se:

$$\lambda = (1 - \nu\psi)^2(1 - \omega) \cdot \text{sen}(\theta) = (1 - \nu\psi)^2(1 - \omega) \left( \frac{L_o \text{sen}(\theta_o) - \delta}{L} \right) \Rightarrow$$

$$\lambda = (1 - \nu\psi)^2(1 - \omega) \left( \frac{L_o \text{sen}(\theta_o) - \delta}{L_o} \cdot \omega \right) \Rightarrow$$

$$\lambda(\psi) = \omega(1 - \omega)(\text{sen}(\theta_o) - \psi)(1 - \nu\psi)^2 \tag{31}$$

Para trabalhar com valores absolutos, desconsiderando os sinais negativos devido ao sentido do carregamento e dos deslocamentos, multiplica-se (31) por -1, e, além disso, assume-se coeficiente de Poisson igual à zero. Chegando a seguinte expressão para o resultado algébrico:

$$\lambda(\psi) = \omega(\omega - 1)(\text{sen}(\theta_o) - \psi) \tag{32}$$

As formulações obtiveram resultados muito próximos, como é possível ver na figura 8, sendo idênticos nas interseções com o eixo  $\psi$ , onde a força F aplicada é zero, no entanto, nos pontos limites os resultados foram um pouco divergentes.

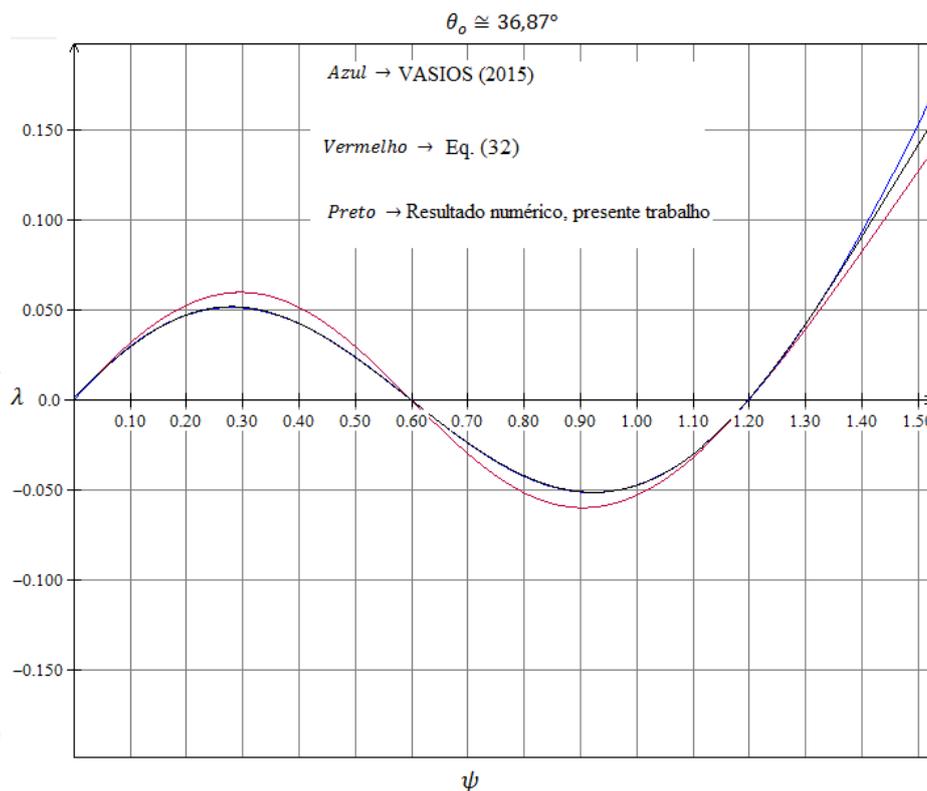


Figura 8 – Comparação: Soluções algébricas x Solução numérica

Observa-se que a formulação de Vasios (2015), até aproximadamente  $\psi=1,40$ , coincidiu com o resultado numérico, isto se deve ao fato de que em ambos foram feitas as mesmas considerações a respeito da deformação.

A comparação entre as duas formulações propostas para o resultado algébrico mostrou que, para a treliça analisada, a variação dos resultados ao se utilizar diferentes deformações é

pequena, porém não desprezível; nos pontos de máximos onde se tem a maior discrepância, esta varia em torno de 14,50% e nos pontos de  $\lambda=0$  ela se torna zero.

### 3.2 TRELIÇA PLANA DE QUATRO NÓS

Analisou-se, também, a mesma treliça anterior, porém com um elemento vertical a mais, tornando-se três elementos e quatro nós, de acordo com a figura 9. Com:  $h_1=3,00$ ;  $h_2=7,00$ ;  $b=4,00$ ;  $\theta_o \cong 36,87^\circ$  e  $F_t = -10,00$ . Para as barras inclinadas, utilizou-se:  $E=20,00$  e  $A=10,00$ ; já para a barra vertical:  $E=10,00$ ;  $A=5,00$ . Para este problema foram utilizados 150 passos.

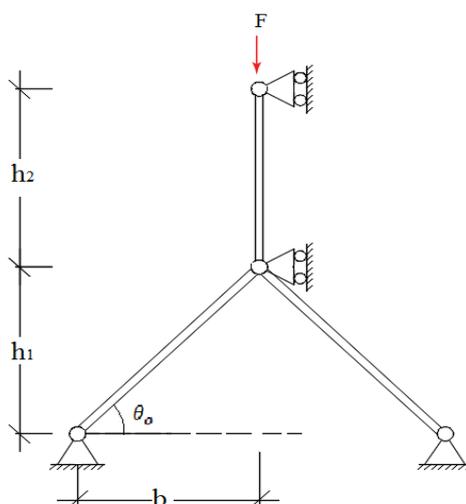


Figura 9 – Treliça de quatro nós

A análise deste exemplo é importante pelo fato do caminho de equilíbrio ser mais complexo que o do problema anterior, apresentando o fenômeno do *snap-back*, quando se analisa o nó superior da estrutura, como mostra a figura 10. Com isso, além de existirem carregamentos com até três pontos de equilíbrio, existem, também, deslocamentos com até três cargas de equilíbrio, por exemplo, o deslocamento  $U=3$  possui as cargas de equilíbrio (F) igual a 16,00, 0,00 e -16,00, aproximadamente.

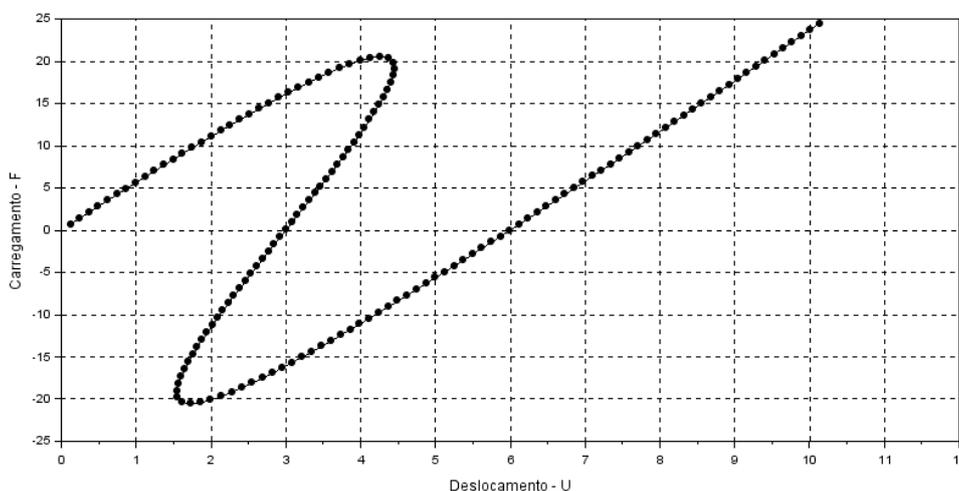


Figura 10 – Caminho de Equilíbrio da treliça de quatro nós.

É possível verificar a instabilidade da estrutura a partir de um deslocamento perto de 4,50, onde a matriz de rigidez,  $K$ , é negativa. Deste ponto em diante, tanto a carga, quanto o deslocamento, diminuem, diferentemente do exemplo anterior, em que somente a carga diminuiu.

Ambos os métodos, N-R e m.N-R, encontram problemas de convergência, independente do controle utilizado, carga ou deslocamento. Se o controle de carga for utilizado, ao passar pelo primeiro ponto limite ( $U \cong 4,50$ ), o método encontrará convergência perto do deslocamento 9,50 e carga 20 (*snap-through*), caso se utilize o controle de deslocamento, a convergência se dará, aproximadamente, na carga de -10,00 e deslocamento 4,50 (*snap-back*).

Esse fenômeno acontece devido à diferença entre a rigidez da barra vertical e das barras inclinadas. Se a rigidez da primeira for muito maior que as outras, o *snap-back* não surge, pois a barra vertical não irá se deformar o suficiente, com isso o caminho de equilíbrio será similar ao que possui o *snap-through*; no entanto, se a rigidez da primeira for menor, tem-se aí o caminho de equilíbrio com *snap-back*.

## CONCLUSÃO

O método do comprimento de arco proposto por Crisfield (1981), com o intuito de melhorar e acelerar o método de Riks (1979), mostrou-se bastante eficiente na solução de problemas envolvendo pontos limites, como os fenômenos do *snap-through* e *snap-back*, por meio do controle da carga e do deslocamento, concomitantemente.

As análises, embora contendo poucos graus de liberdade, ocorreram em um tempo muito curto. Foram realizadas no primeiro caso 667 iterações e no segundo 474, porém no segundo exemplo havia um grau de liberdade não restringido a mais, o que tornou os tempos de execução próximos. A convergência dos resultados foi atingida, em ambos os casos, em no máximo quatro iterações, comprovando a eficiência do método.

Em determinadas situações, o método de Crisfield (1981) pode ocasionar problemas relacionados a raízes complexas no desenvolvimento da equação do segundo grau, impossibilitando a determinação do parâmetro de carga ( $\Delta\lambda$ ) e, conseqüentemente, a convergência da solução. Tal fato pode ter ocorrido devido ao comprimento de arco utilizado. Soluções para esse tipo de problema foi discutido por Zhou e Murray (1994).

Recomenda-se, para trabalhos futuros, a aplicação da formulação proposta ao Método dos Elementos Finitos, generalizando para qualquer tipo de estrutura, tanto 2D quanto 3D, e, além disso, levar em consideração a deformação lateral sofrida pelos elementos estruturais através do Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Sugere-se ainda que sejam feitas pesquisas que forneçam os parâmetros iniciais:  $\delta\lambda$  e comprimento de arco ( $l$ ), que melhor se adequem a cada tipo de estrutura.

---

---

## REFERÊNCIAS

BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite Element Procedures**. New Jersey, USA: Prentice-Hall, 1996.

COOK, Robert Davis, et al. **Concepts and applications of finite element analysis**. 3 ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley and Sons Ltd, 1989.

CRISFIELD, M. A. **A fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles “Snap-Through”**. Computers and Structures, vol. 13, p. 55-62: Pergamon Preas Ltd, 1981.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Volume 1: Essentials. 1 ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley and Sons Ltd, 1991.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Volume 2: Advanced Topics. 1 ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley and Sons Ltd, 1997.

HRINDA, G. A.; NGUYEN, D. T. **Optimization of stability-constrained geometrically nonlinear shallow trusses using an arc length sparse method with a strain energy density approach**. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 44, p. 933-950, 2008.

IKEDA Jr., Isamu. **Non-Linear Analysis: Crisfield Method**. University of Texas at Austin, 1991. Notas de aula.

LACERDA, Estéfane George Macedo. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

LEON, Sofie E., et al. **A unified library of nonlinear solution Schemes**. The American society of Mechanical Engineers, vol. 64: ASME, 2011.

PECKNOLD, D. A., GHABOUSSI, J., et. al.. **Snap-Through and Bifurcation in a Simple Structure**. Journal of Engineering Mechanics, vol. 111, n° 7, p. 909-922: ASCE, 1985.

RICKS, E. **An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems**. Int. J. Solids Structures, n° 15, p. 524-551, 1979.

VASIOS, Nikolaos. **Nonlinear analysis of structures: The arc length method: Formulation, implementation and applications**. Harvard University, Massachusetts, 2015.

ZHOU, Z.; MURRAY, D. **An incremental solution technique for unstable equilibrium paths of shell structures**. Computer and Structure, vol. 55, n° 5, 1994.