

ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DOS ERROS MÉDIOS EM PONTOS GEORREFERENCIADOS IRRADIADOS SEGUNDO FUNÇÕES NÃO LINEARES

Mauro Menzori(UNICAMP) mauro@ft.unicamp.br
Vitor Eduardo Molina Jr(UNICAMP) molina@ft.unicamp.br

Resumo: Nos serviços de georreferenciamento de imóveis é possível utilizar vários métodos de posicionamento e lançar mão de instrumentos com classes diferentes para que as precisões solicitadas pelas normas sejam atendidas. Este artigo discorre sobre a aplicação da Lei de Propagação dos Erros Médios segundo funções não lineares para obter as precisões das coordenadas de pontos irradiados a partir de vértices de poligonal que possuem coordenadas com precisões conhecidas. O estudo de caso refere-se a uma situação corriqueira na execução de serviços de georreferenciamento, na qual as coordenadas dos pontos da linha base e do ponto de divisa irradiado são obtidas utilizando diferentes métodos e equipamentos. No caso em questão, a linha base foi medida utilizando receptores GNSS e o ponto irradiado foi medido com uma estação total. O roteiro empregado na análise dos erros médios propagados nas coordenadas do ponto irradiado foi estendido para algumas situações simuladas considerando o uso de estações totais com diferentes precisões angulares e variando as extensões das distâncias até que se registrasse alguma alteração expressiva na precisão das coordenadas do ponto irradiado, em relação à precisão das coordenadas do vértice da linha base. Desta forma, o estudo aborda o método empregado na teoria dos erros para a obtenção da precisão de coordenadas de um ponto irradiado utilizando como guia a propagação de erros médios e mostra que dentro de certas distâncias limite a precisão das coordenadas do ponto irradiado permanecem iguais à precisão das coordenadas do vértice da linha base empregadas para medi-lo.

Palavras chaves: Georreferenciamento, Lei de Propagação de Erros, Topografia.

NON-LINEAR FUNCTIONS APPLIED TO THE ANALYSIS OF PROPAGATED MEAN ERRORS ONTO POINTS MEASURED FROM A GEOREFERENCED BASELINE

Abstract: Measurement in georeferenced jobs can be done by using several positioning point methods as well as using instruments with different precisions to reach the precisions required by the standards. This paper discusses the law of mean errors propagation according to non-linear functions to obtain the coordinates precision of a border point that was measured from a baseline with known coordinates precisions like those measured with GNSS receivers, for example. The case study refers to a common situation in the execution of georeferencing tasks when both the coordinates of the baseline vertices and the border point were obtained by using different methods and equipment. The baseline in the case study is constituted of vertices that were measured using GNSS receivers and the border point was measured using a Total Station. The proceedings adopted to perform the propagation error analysis were extended to some simulated situations where different angular accuracies and different distances were considered to measure the border point until its coordinate precision have changed when compared to the precision of the baseline origin vertice coordinates. With this approach the paper intended to review the solutions to obtain the precision of coordinates by different ways of analysis, using the propagation of the mean errors as a guide to suggest the limits in distance where the precision in the border point coordinates can be considered equal to the precision in the baseline vertice origin.

Keywords: Georeferencing, law of propagation of the mean errors, Topography.

1. INTRODUÇÃO

Nos serviços de georreferenciamento de imóveis é possível a utilização de vários métodos de posicionamento, bem como a utilização de equipamentos com precisões diferentes. O presente artigo procura discutir a precisão propagada nas coordenadas de pontos irradiados

medidos com o emprego de estação total, a partir de vértices de poligonal cujas coordenadas tenham precisões conhecidas.

A falta de obrigatoriedade da análise da propagação dos erros médios em trabalhos topográficos convencionais, a pouca difusão desse tema em cursos de graduação e a baixa oferta de publicações nacionais sobre esse assunto foi o que motivou a preparação deste artigo.

Segundo Dalmolin (2004), classicamente se diz que toda medida contém algum erro, ou seja, não se consegue valores idênticos para um determinado número de observações repetidas de uma grandeza, mas, valores dispersos dentro de um intervalo que é função desses erros.

Conforme GEMAEL (2015), os erros não decorrem apenas de falhas humanas, mas também da imperfeição dos equipamentos e das condições ambientes que envolvem a medição. Assim, ao se executar um trabalho de campo faz-se uma série de observações repetidas de certa grandeza com o objetivo de extrair um único resultado que possa representá-la com um grau de confiança adequado.

Para Dalmolin (2004) as medidas que representam uma mesma quantidade numérica, obtidas por meio de observações, possuem uma dispersão em relação a um valor médio, que é denominado erro randômico ou acidental. Quando se trata do conceito de acurácia, este incorpora tanto a tendência inerente aos erros sistemáticos quanto a precisão devida aos erros aleatórios ou acidentais (Monico et al., 2009). Assim, quando não é possível identificar o verdadeiro valor da grandeza, tendo por base apenas os erros acidentais presentes em n observações em campo, a média aritmética dessas observações é o valor que melhor representa o conjunto. A média é obtida pela expressão (1):

$$\bar{l} = \frac{\sum l_i}{n} \quad (1)$$

Sendo:

\bar{l} = média aritmética das n observações;

l_i = observações

n = número de observações.

A média aritmética também pode ser expressa por meio de matrizes conforme (2):

$$\bar{l} = \frac{e^T l}{e^T e} \quad (2)$$

Onde:

l = vetor das observações

e = vetor unitário

A média representa a estimativa de um valor a partir de um conjunto de observações, porém, é necessário estimar-se também a qualidade desses dados, o que levará à precisão da grandeza medida.

Como o valor verdadeiro de uma grandeza nunca é conhecido ou alcançado, o valor médio ou o valor ajustado de um conjunto de observações de uma mesma grandeza pode ser

adotado como o valor de referencia no lugar do valor verdadeiro. Conforme TAYLOR (2012), o desvio padrão, também descrito como raiz média quadrática, é a maneira mais útil para caracterizar a confiabilidade das medidas.

A segunda edição da Norma Técnica do INCRA para Georreferenciamento de Imóveis Rurais, datada de 2010, define que a precisão “*está associada ao nível de aderência de um grupo de medições, obtidas sob as mesmas condições, ao valor médio dessas medições, quando calculado sob o valor de um desvio padrão ou um sigma*”.

A atual norma de Georreferenciamento de Imóveis Rurais do INCRA admite que um ponto de divisa entre propriedades rurais deve ter valores posicionais melhores ou iguais a 0,50 m, 3,00 m e 7,50 m, para vértices em limites artificiais, naturais e inacessíveis respectivamente.

Quando se emprega os receptores GNSS na determinação das medidas, os indicadores de precisão mais utilizados para expressar a qualidade da grandeza são: a variância, o desvio padrão e a correlação.

A variância indica como os valores individuais de cada observação (l_i) estão distantes do valor médio de um conjunto com n medidas e seu valor é obtido pela equação a seguir:

$$S = \frac{\sum_i^N (l_i - \bar{l})^2}{n} \quad (3)$$

O desvio padrão, também conhecido também como *Root Mean Squared Error* (RMS) é outra medida de dispersão que informa a precisão da grandeza em relação ao valor médio. O desvio padrão é obtido extraindo a raiz quadrada do valor da variância, conforme (4):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i^N (l_i - \bar{l})^2}{n}} \quad (4)$$

A informação posicional de pontos é geralmente apresentada na forma de coordenadas, expressas por abscissa, ordenada e altura. Espera-se que as coordenadas tenham um grau de relacionamento entre si e a correlação é utilizada para expressar essa interdependencia. O fator de correlação entre duas variáveis é representado em por:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (5)$$

Sendo:

ρ = fator de correlação

σ_{XY} = covariância entre as variáveis X e Y.

σ_X = desvio padrão das observações da variável X.

σ_Y = desvio padrão das observações da variável Y.

A covariância descreve a variação recíproca entre duas variáveis aleatórias, sendo expressa em (6):

$$\sigma_{XY} = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} \quad (6)$$

A partir dos dados obtidos com receptores GNSS são calculadas as coordenadas de cada ponto, bem como suas respectivas precisões. Porém, quando se faz o georreferenciamento utilizando técnicas da Topografia clássica, as precisões propagadas nas coordenadas dos pontos medidos a partir de uma poligonal não é informada. Os pontos de divisa dos imóveis são geralmente pontos que se encaixam nessa situação. Para o INCRA um ponto de divisa deve sempre ter coordenadas com precisões conhecidas sejam elas medidas com receptores GNSS ou com instrumentos topográficos como a Estação Total.

1.1 Propagação dos Erros Médios

A interpretação da propagação dos erros em grandezas medidas a partir de dados iniciais que possuem precisões conhecidas pode ser feito de acordo com a Lei de Propagação dos Erros Médios. Nesse caso se consideram duas situações distintas: quando o valor final da grandeza é calculado usando uma equação de observação linear ou quando ele é calculado através de equação de observação que usa uma função exponencial, ou de uma função parabólica ou outra função não linear qualquer.

A diferença entre os dois procedimentos é o passo adicional na determinação dos coeficientes que resultam da derivação da equação de observação. Uma vez determinados esses coeficientes, eles permitem um desenvolvimento similar ao tratamento dado à propagação segundo funções lineares.

A propagação dos erros médios segundo funções não lineares exige, portanto, a derivação matemática da equação de observação, em relação a todas as variáveis que influenciam o resultado final, situação que pode ser expressa através da expressão (7):

$$S^2 = f'^T \times Kll \times f' \quad (7)$$

Onde:

S^2 = Matriz de Covariâncias do resultado.

f' = Matriz dos coeficientes da função derivada.

Kll = Matriz das covariâncias das observações.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

No estudo de caso apresentado na Figura 1 foi considerada uma situação teórica e hipotética na qual uma linha base, constituída pelos vértices E10 e E11, foi observada com receptores de sinais transmitidos por satélites orbitais de um sistema de posicionamento global que integra o GNSS, a exemplo do GPS e, após processamento, produziu as coordenadas geodésicas referidas ao sistema World Geodetic System 1984 (WGS-84) com precisões conhecidas. Essas coordenadas foram transformadas de geodésicas para UTM, no fuso 23.

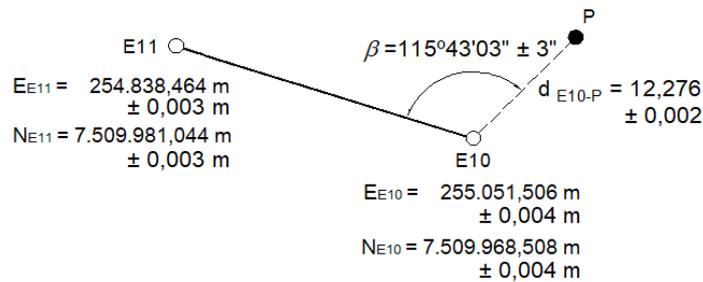


Figura 1 – Irradiação do ponto P a partir da linha base.

O estudo de caso considerou uma situação comum em trabalhos de georreferenciamento de imóveis onde um ponto de divisa P foi medido com uma estação total total com precisão angular de ± 1 segundo e com precisão linear de $\pm (2 \text{ mm} + 2 \text{ p.p.m} \times D)$, onde D é a distância horizontal tomada em quilômetros. Os cálculos iniciais empregando a teoria dos erros permitiram calcular os erros propagados em P, desde a linha base E10-E11. Em seguida foram simuladas diferentes situações, alterando-se o valor do ângulo horizontal β e o valor da distância horizontal d_{E10-P} , para se analisar como o erro existente nas coordenadas dos vértices E10 e E11 se propagaram para o ponto P. Nessas simulações foram identificadas distâncias horizontais limites até as quais o valor dos erros propagados nas coordenadas de P foram insignificantes (menor que 1 mm por eixo), como está demonstrado no item Resultados e Discussões. Os passos a seguir demonstram o processo desenvolvido nos cálculos iniciais para se encontrar os erros propagados nas coordenadas do ponto P.

2.1. Cálculo do Azimute de Referência e da Sua Precisão

O azimute inicial $AZ_{E11-E10}$, aqui chamado de alfa (α), é calculado pela topografia convencional a partir das coordenadas dos pontos E11 e E10. Assim o azimute α no sentido de E11 para E10 é calculado pela seguinte equação de observação:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{AZ_{E11-E10}}{AZ_{E11-E10}}\right) = \frac{E_{E10} - E_{E11}}{N_{E10} - N_{E11}} \quad (8)$$

Sendo esse passo uma função não linear, faz-se a linearização da equação de observação, em relação a cada variável, para se obter a precisão do azimute α , obtendo-se as equações linearizadas de (9) a (12):

$$\frac{\delta\alpha}{\delta E_{E11}} = \frac{-\Delta N_{E10-E11}}{(Dist_{E10-E11})^2} \quad (9)$$

$$\frac{\delta\alpha}{\delta E_{E10}} = \frac{\Delta N_{E10-E11}}{(Dist_{E10-E11})^2} \quad (10)$$

$$\frac{\delta\alpha}{\delta N_{E11}} = \frac{\Delta E_{E10-E11}}{(Dist_{E10-E11})^2} \quad (11)$$

$$\frac{\delta\alpha}{\delta N_{E10}} = \frac{-\Delta E_{E10-E11}}{(Dist_{E10-E11})^2} \quad (12)$$

Equações essas que dependem também da distância entre os pontos E11 e E10, obtida

pela expressão (13):

$$Dist_{E10-E11} = \sqrt{\Delta E^2 + \Delta N^2} \quad (13)$$

Uma vez determinados esses valores, com eles constrói-se a matriz f' , com 4 linhas e 1 coluna, indicada como (14), base para o desenvolvimento linear utilizado na obtenção do valor da precisão S do azimute α . Assim:

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\delta\alpha}{\delta E_{E11}} \\ \frac{\delta\alpha}{\delta E_{E10}} \\ \frac{\delta\alpha}{\delta N_{E11}} \\ \frac{\delta\alpha}{\delta N_{E10}} \end{pmatrix} \quad (14)$$

A construção da matriz das covariâncias das observações, Kll , indicada como (15), usa as precisões das coordenadas E_{E11} , N_{E11} , E_{E10} , N_{E10} e as suas correlações, se conhecidas. Nestes cálculos, as correlações foram adotadas como nulas uma vez que as variáveis são independentes entre si, o que permite a construção de uma matriz de covariância mais simples, conforme segue.

$$Kll = \begin{pmatrix} (SE_{E11})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (SN_{E11})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (SE_{E10})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (SN_{E10})^2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Por último, a precisão do azimute α é determinada através da expressão (7), escrita agora em função das matrizes construídas, fazendo-se:

$$S_\alpha^2 = f'^T \times Kll \times f' \quad (16)$$

Com os dados em estudo o azimute $Az_{E11-E10}$ foi calculado igual a $93^\circ 22' 03''$ com precisão de $\pm 5,5''$.

2.2 Cálculo do Azimute à Vante e sua Precisão

O cálculo do azimute E_{10-P} empregou o azimute $Az_{E11-E10}$ e o ângulo β , aplicando a Equação Geral dos Azimutes para ângulos à direita, expressa por (17):

$$Az_{n+1} = (Az_{n-1} + H_D) \pm 180^\circ \quad (17)$$

No estudo o azimute Az_{E10-P} foi calculado igual a $29^\circ 05' 06''$, enquanto que a sua precisão é dependente da precisão do azimute $Az_{E11-E10}$ combinada com a precisão do ângulo β . Segundo TAYLOR (2012) a soma de um conjunto de variáveis é representada pela expressão (18):

$$\omega = x \pm y \pm z \pm \dots \quad (18)$$

A precisão S_ω para uma soma é expressa por (19):

$$(S\omega)^2 = (Sx)^2 + (Sy)^2 + (Sz)^2 + \dots \quad (19)$$

Portanto, a precisão do azimute Az_{E10-P} é determinada com base na precisão do azimute anterior e do ângulo horizontal β , admitindo-se que o valor de 180° é uma constante, não medida em campo e que, portanto, é isenta de erro. Assim têm-se:

$$(SAz_{E10-P})^2 = (5,5'')^2 + (3'')^2 \quad SAz_{E10-P} = 6,23 \text{ segundos}$$

2.3 Cálculo das Coordenadas do Ponto Irradiado

As coordenadas de P, anotadas como E_P e N_P , resultam da adição algébrica dos valores E_{E10} e N_{E10} , respectivamente abscissa e ordenada do vértice E10, com as projeções parciais ΔE_{E10-P} e ΔN_{E10-P} .

$$E_P = E_{E10} + \Delta E_{E10-P} \quad (20)$$

$$N_P = N_{E10} + \Delta N_{E10-P} \quad (21)$$

Sendo as projeções parciais ΔE_{E10-P} e ΔN_{E10-P} calculadas pela topografia através das seguintes equações de observação:

$$\Delta E_{E10-P} = DH_{E10-P} \times \text{seno}(Az_{E10-P}) \quad (22)$$

$$\Delta N_{E10-P} = DH_{E10-P} \times \text{cos}(Az_{E10-P}) \quad (23)$$

No caso em estudo, essas projeções parciais terão os seguintes valores:

$$\Delta E_{E10-P} = 12,276 \text{ m} \times \text{seno}(29^\circ 05' 06'') \Rightarrow \Delta E_{E10-P} = + 5,97 \text{ m}$$

$$\Delta N_{E10-P} = 12,276 \text{ m} \times \text{cos}(29^\circ 05' 06'') \Rightarrow \Delta N_{E10-P} = + 10,73 \text{ m}$$

Valores esses que auxiliam na determinação das coordenadas E e N do ponto P, da seguinte maneira:

$$E_P = 255.051,506\text{m} + 5,97\text{m} = 255.057,473\text{m}$$

$$N_P = 7.509.968,508\text{m} + 10,73\text{m} = 7.509.979,236\text{m}$$

Até aqui foram aplicados os procedimentos correntes adotados pela topografia, que não possibilitam identificar o erro propagado nas coordenadas de P.

2.4 Erro Propagado no Ponto Irradiado

As coordenadas de P calculadas no item anterior podem ser traduzidas em um cálculo direto conforme as seguintes equações de observação:

$$E_P = E_{E10} + DH_{E10-P} \times \text{seno}(Az_{E10-P}) \quad (24)$$

$$Y_P = N_{E10} + DH_{E10-P} \times \text{cos}(Az_{E10-P}) \quad (25)$$

A equação (24) informa que a precisão de E_P é dependente da precisão da abscissa de E10 combinada com a precisão da distância horizontal d_{E10-P} e com a precisão do azimute Az_{E10-P} todas conhecidas nesse momento. Segundo TAYLOR (2012), a incerteza na resposta final pode ser calculada considerando as etapas de cálculo nas medidas originais, desde que

elas sejam independentes. Esse é justamente o caso em estudo. Portanto no cálculo da precisão da abscissa do ponto P, considera-se novamente a expressão (7):

$$S_X^2 = f'^T \times Kll \times f'$$

A Matriz das derivadas foi obtida conforme descrito abaixo:

$$\frac{\delta E_P}{\delta E_{E10}} = 1$$

$$\frac{\delta E_P}{\delta EDH_{E10-P}} = \text{sen}\alpha(Az_{E10-P}) = \text{sen}29^\circ 05' 06'' = 0,4861$$

$$\frac{\delta E_P}{\delta EAz_{E10-P}} = DH_{E10-P} \cos(Az_{E10-P})$$

$$\frac{\delta E_P}{\delta EAz_{E10-P}} = 12,276 \times \cos 29^\circ 05' 06'' = 10,478$$

As matrizes a seguir referem-se ao desenvolvimento de (7).

$$f'^T = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\delta E_P}{\delta E_{E10}} & \frac{\delta E_P}{\delta EDH_{E10-P}} & \frac{\delta E_P}{\delta EAz_{E10-P}} \end{array} \right|$$

$$Kll = \left| \begin{array}{ccc} (SE_{E10})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (SDH_{E10-P})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (SAz_{E10-P})^2 \end{array} \right|$$

$$f' = \left| \begin{array}{c} \frac{\delta E_P}{\delta E_{E10}} \\ \frac{\delta E_P}{\delta EDH_{E10-P}} \\ \frac{\delta E_P}{\delta EAz_{E10-P}} \end{array} \right|$$

$$S_E^2 = 1,70502 \times 10^{-5}$$

$$S_E = 0,004129m$$

O mesmo procedimento é aplicado para o cálculo da precisão da ordenada N_P, tendo por referencia a equação (25) fazendo:

$$\frac{\delta N_P}{\delta N_{E10}} = 1$$

$$\frac{\delta N_P}{\delta NDH_{E10-P}} = \cos(Az_{E10-P}) = \cos 29^\circ 05' 06'' = 0,8739$$

$$\frac{\delta N_P}{\delta NAz_{E10-P}} = -DH_{E10-P} \text{sen}\alpha(Az_{E10-P}) = -12,276 \times \text{sen}29^\circ 05' 06'' = -5,967 m$$

Obtendo a precisão da ordenada Y_P:

$$S_N^2 = 1,90873 \times 10^{-5}$$

$$S_N = 0,004369 \text{ m}$$

Desta forma chega-se ao final dos cálculos que com os valores das coordenadas do ponto P e das suas respectivas precisões, iguais a:

$$E_P = 255.057,473 \text{ m} \pm 0,004 \text{ m}$$

$$N_P = 7.509.979,236 \text{ m} \pm 0,004 \text{ m}$$

O procedimento até aqui apresentado considerou que o ponto P foi irradiado a partir de uma base georreferenciada cujos vértices possuem algum tipo de erro. Como consequência o azimute do alinhamento que liga esses vértices também possui algum tipo de erro.

Ao usar uma estação total de menor precisão angular e com menor precisão linear para irradiar o ponto P acrescentam-se mais erros ao problema, de tal forma que as coordenadas de P terão a sua qualidade vinculada à precisão angular e linear utilizadas para medi-las.

As magnitudes dos erros propagados na abscissa e na ordenada de P foram demonstradas no método apresentado e neste caso, elas resultaram iguais aos erros existentes na abscissa e na ordenada de E10, vértice da linha base que foi usado para medir P, consideradas até a unidade mm. Os valores de 4 mm em E_P e 4 mm em N_P mostram que todos os erros que influenciaram na qualidade das coordenadas P foram ínfimos e produziram coordenadas de P com a mesma precisão das coordenadas de E10, que também são de 4 mm em cada eixo.

O estudo desenvolvido a partir daqui foi no sentido de identificar os limites até onde a qualidade das coordenadas de P permaneceria igual à qualidade das coordenadas de E10, quando fossem alterados o valor do ângulo horizontal β e o valor da distância horizontal d_{E10-P} lineares medidos para obter a posição de P.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As simulações desenvolvidas no sentido de identificar os limites a partir dos quais as precisões das coordenadas de P se tornariam maiores do que as precisões das coordenadas de E10, consideraram diferentes situações onde as variações no valor do ângulo horizontal β e as variações na extensão da distância horizontal d_{E10-P} não introduzissem um erro propagado maior que 1 milímetro, fosse na abscissa ou na ordenada de P.

Na primeira parte da simulação foi investigada a influência da variação linear em diferentes situações hipotéticas onde P estaria sempre sendo medido com uma estação total com precisão angular de $\pm 1''$, mas afastado a diferentes distâncias de E10. As distâncias foram incrementadas até chegar a uma distância limite onde o erro propagado na abscissa ou na ordenada de P passou a ser maior que 1 milímetro. Abaixo desse valor constatou-se a precisão das coordenadas de P iguais à precisão das coordenadas de E10.

Na segunda parte da simulação foram consideradas outras situações onde P poderia ser medido com o uso de estações totais com precisões angulares maiores que 1 segundo.

Num raciocínio lógico é de se esperar que uma estação total com menor precisão angular introduza erros maiores na medição de P, erros esses que acabarão propagados nas coordenadas diminuindo a sua precisão.

A Tabela 1, a seguir, mostra os resultados na primeira parte da simulação quando se fez variar as distâncias entre E10 e P e as precisões da abscissa e da ordenada do ponto irradiado P permaneceram iguais às precisões das coordenadas de E10. A distância

identificada foi a distância de 67,00 metros, até a qual os erros propagados tanto na abscissa quanto na ordenada de P são menores que 1 milímetro.

Tabela 1: Erro Propagado em P quando Medido Com a Mesma Precisão Angular

Estação Total com Precisão de 1 segundo			Estação Total com Precisão de 1 segundo		
Distância Horizontal (m)	Erro no eixo E σE (m)	Erro no eixo N σN (m)	Distância Horizontal (m)	Erro no eixo E σE (m)	Erro no eixo N σN (m)
0	0,000	0,000	65	0,000	0,000
10	0,000	0,000	67	0,000	0,000
20	0,000	0,000	68	0,000	0,001
30	0,000	0,000	70	0,000	0,001
40	0,000	0,000	75	0,000	0,001
50	0,000	0,000	76	0,001	0,001
60	0,000	0,000	77	0,001	0,001

Quando P se encontra a uma distância de 68,00 metros os erros propagados começam a influenciar na precisão das suas coordenadas, mais precisamente, no valor de 1 milímetro na ordenada N, enquanto que na abscissa E o erro propagado ainda continua sendo zero. O erro propagado somente se apresenta no valor de 1 milímetro em cada eixo a partir da distância de 76,00 metros. Em função disso, considerou-se a distância horizontal de 67,00 metros como a distância limite para os casos onde se utiliza uma estação total com precisão de 1 segundo para medir P.

Deve-se ressaltar que o ponto P poderá estar em diferentes posições relativas à E10 em função do ângulo horizontal β , que conceitualmente pode ter valores entre 0° e 360° , quando então, as propagações aqui constatadas passarão a ter valores diferentes no eixo E e no eixo N, em função do azimute que liga E10 – P. Porém, a distância limite continuará sendo a mesma, ou seja, 67,00 metros, quando se usa um instrumento que possui precisão angular de 1 segundo. Isso acontece porque a elipse de erro continua sendo a mesma, apenas assumindo diferentes posições em relação ao azimute que liga E10 – P.

Na segunda parte da simulação procurou-se identificar as distâncias limites até as quais se pode irradiar um ponto, usando estações totais com diferentes precisões angulares a partir das quais o erro propagado passa a influenciar a precisão das suas coordenadas.

Tabela 2: Erro Propagado em P quando Medido Com Diferentes Precisasões Angulares

Estação Total de 1"			Estação Total de 3"			Estação Total de 5"		
DH (m)	σE (m)	σN (m)	DH (m)	σE (m)	σN (m)	DH (m)	σE (m)	σN (m)
0	0,000	0,000	0	0,000	0,000	0	0,000	0,000
10	0,000	0,000	10	0,000	0,000	10	0,000	0,000
20	0,000	0,000	20	0,000	0,000	20	0,000	0,000
30	0,000	0,000	30	0,000	0,000	30	0,000	0,000
40	0,000	0,000	40	0,000	0,000	40	0,000	0,000
50	0,000	0,000	50	0,000	0,000	50	0,000	0,000
60	0,000	0,000	60	0,000	0,000	53	0,000	0,000
65	0,000	0,000	61	0,000	0,000	54	0,000	0,001
67	0,000	0,000	62	0,000	0,001	-	-	-
68	0,000	0,001	-	-	-	-	-	-

Essas tabelas mostram que utilizando instrumentos de precisões angulares mais refinadas pode-se abrir uma distância maior entre o vértice origem e o ponto de divisa P, ao passo que, trabalhando com instrumentos de precisões angulares menores deve-se diminuir a distância entre E10 e P para garantir em P a mesma precisão das coordenadas do vértice origem E10.

4. CONCLUSÕES

Na maioria dos trabalhos topográficos convencionais executados no Brasil as poligonais sempre tiveram as coordenadas dos seus vértices calculadas a partir de um ponto inicial de coordenadas arbitradas e sempre tiveram os seus os seus alinhamentos orientados para o norte magnético, no mínimo.

Nos cálculos topográficos convencionais não existia a cultura de análise individual por ponto para investigar a propagação dos erros médios nas coordenadas dos vértices de uma poligonal e muito menos nos pontos irradiados. O que no máximo existia era a precisão da poligonal que informava uma razão entre o perímetro da poligonal e erro linear total cometido no trabalho. Esse tipo de informação colocava as coordenadas de todos os vértices da poligonal na mesma de precisão, e, não se conhecia a precisão dos pontos irradiados, o que não é mais suficiente para trabalhos georreferenciados.

Os resultados aqui apresentados mostram que os pontos irradiados conterão pouco ou nenhum erro propagado a partir da linha base, se a distância limite for respeitada. Pode-se assumir, pelo que foi demonstrado, que trabalhando com estações totais que possuam 1 ou 3 ou 5 segundos de precisão angular não haverá propagação significativa de erros nas coordenadas do ponto irradiado, se a distância entre a linha base e o ponto irradiado for menor que a distância limite de 53 metros.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DALMOLIN, Q. *Ajustamento por Mínimos Quadrados*. 2ª Edição. Curitiba, 2004.

GEMAEL, C. *Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas*. 2ª Edição. Curitiba, Edit. UFPR, 2015.

INSTITUTO NACIONAL DE COLONIZAÇÃO E REFORMA AGRÁRIA. *Norma Técnica para Georreferenciamento de Imóveis Rurais*. 2ª Edição. Brasília, 2010.

INSTITUTO NACIONAL DE COLONIZAÇÃO E REFORMA AGRÁRIA. *Norma Técnica para Georreferenciamento de Imóveis Rurais*. 3ª Edição. Brasília, 2013.

MENZORI, M. *Georreferenciamento – Conceitos*. Editora Baraúna, São Paulo, SP, (2017).

MONICO, J.F.G.; DAL PÓZ, A.P.; GALO, M.; SANTOS, M.C.; CASTRO, L.O. *Acurária e precisão: revendo os conceitos de forma acurada*. Boletim de Ciências Geodésicas, v.15, p.469-483, Curitiba, 2009.

SILVA I.; SEGANTINE, P.C.L. *Topografia para Engenharia*. Elsevier Editora Ltda, Rio de Janeiro, RJ, 2015.

TAYLOR, J.R. *Introdução à Análise de Erros: O Estudo de Incertezas em Medições Físicas*. 2ª Edição. Porto Alegre, 2012.