

APLICAÇÃO DO MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA EM UMA BARRA

José Henrique Delabio Gonçalves¹
Carlos Humberto Martins²

¹ Discente do Curso de Mestrado em Engenharia de Estruturas-PCV, Universidade Estadual de Maringá-UEM, Departamento de Engenharia Civil-DEC, Email: jhenriquedelabio@hotmail.com.

² Docente do Curso de Mestrado em Engenharia de Estruturas-PCV, Universidade Estadual de Maringá-UEM, Departamento de Engenharia Civil-DEC, Email: chmartins2007@gmail.com.

Resumo: Este trabalho tem como objetivo a abordagem teórica e prática do método da rigidez direta, a aplicação de mudança de temperatura a qual gera tensões no corpo rígido, em paralelo, a abordagem de relações constitutivas de um corpo, assim como a utilização da notação matricial e indicial no desenvolvimento do mesmo. A aplicação em uma barra tracionada se dá por conta da simplicidade e didática de seu desenvolvimento, onde é introduzido o conceito da matriz de rigidez. Para a barra em estudo é considerado que: não há incidência de força cortante e/ou momento fletor; forças apenas axiais aplicadas; e é válida a Lei de Hooke. Após o estudo teórico do método, é feito um estudo prático de uma barra submetida a uma força axial e a uma variação de temperatura arbitrários, onde são obtidos: a matriz de rigidez global; os deslocamentos dos nós; e as reações nos nós restringidos. Foi utilizado também o programa Ftool para validação dos resultados. No passo a passo de cálculo do desenvolvimento do método foi utilizada a notação matricial e indicial. Os resultados mostraram que o Método é pertinente, já que os valores encontrados no programa Ftool (2019) foram similares aos obtidos no exemplo prático de aplicação em uma barra.

Palavras-chave: Método dos deslocamentos, Matriz de rigidez, Notação indicial, Relações constitutivas.

DIRECT STIFFNESS METHOD: APPLICATION IN A BAR

Abstract: This work aims at the theoretical and practical approach of the direct stiffness method, the application of temperature variation which generates tensions in the rigid body, in parallel, the approach of constitutive relations of a body, as well as the use of matrix and indicial notation during the development. The application in a tensioned bar is due to the simplicity and didactics of its development, where the concept of the stiffness matrix is introduced. For the bar under study it is considered that: there is no incidence of shear force and / or bending moment; axial forces applied only; and Hooke's Law is valid. After the theoretical study of the method, a practical study of a bar subjected to an axial force and to an arbitrary temperature variation, where is obtained: the global stiffness matrix; the displacements of the nodes; and the reactions in the restrained nodes. The Ftool (2019) program was also used to validate the results. The matrix and indicial notations were used on the development of the method. The results showed that the method is pertinent, since the values found in the Ftool (2019) program were similar to those obtained in the practical example of application in a bar.

Keywords: Displacement method, Stiffness matrix, Indicial notation, Constitutive relations.

1. Introdução

Os problemas de Engenharia de Estruturas se utilizam de várias ferramentas matemáticas oriundas do Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Cálculo Numérico, etc. Estas possibilitam a formulação de métodos de análise estrutural e dimensionamento (RIBEIRO et al., 2017). Por exemplo, um dos métodos de análise de estruturas que se utiliza da Álgebra Linear é o Método dos Deslocamentos, que tem sua

formulação matemática similar ao Método das Forças. O Método dos Deslocamentos pode ser aplicado na análise de estruturas hiperestáticas que possuem grande quantidade de equações envolvidas, de onde surge a necessidade do auxílio de computadores para sua resolução. Uma variação deste método é o Método da Rigidez Direta, que é objeto deste trabalho e que tem como principal característica a utilização de matrizes para a análise das estruturas. Isto se aproxima da metodologia utilizada pelos programas de computador (MARTHA apud WHITE, GERGELY e SEXSMITH, 1976).

De acordo com Logan (2007), o Método da Rigidez Direta está completamente relacionado com a definição de matriz de rigidez a qual, para um elemento, pode ser definida como:

$$\hat{f} = \hat{k}\hat{d} \quad (1)$$

Onde o símbolo “ $\hat{\quad}$ ” está relacionado ao sistema local de coordenadas, ou seja, \hat{f} está relacionado com as forças locais em cada elemento; \hat{d} com os deslocamentos nodais e \hat{k} é a matriz de rigidez que se relaciona com as coordenadas locais ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$).

Diferentemente do exposto anteriormente, as letras maiúsculas e sem o símbolo “ $\hat{\quad}$ ” se referem ao sistema global de coordenadas (x, y, z). Assim, a matriz de rigidez global da estrutura é K . Os deslocamentos nodais é representado como d e as forças globais como F (LOGAN, 2007). O sistema de equações fica, portanto:

$$F = Kd \quad (2)$$

Os sistemas de coordenadas locais e globais podem ser melhor visualizados na Figura 1 a seguir:

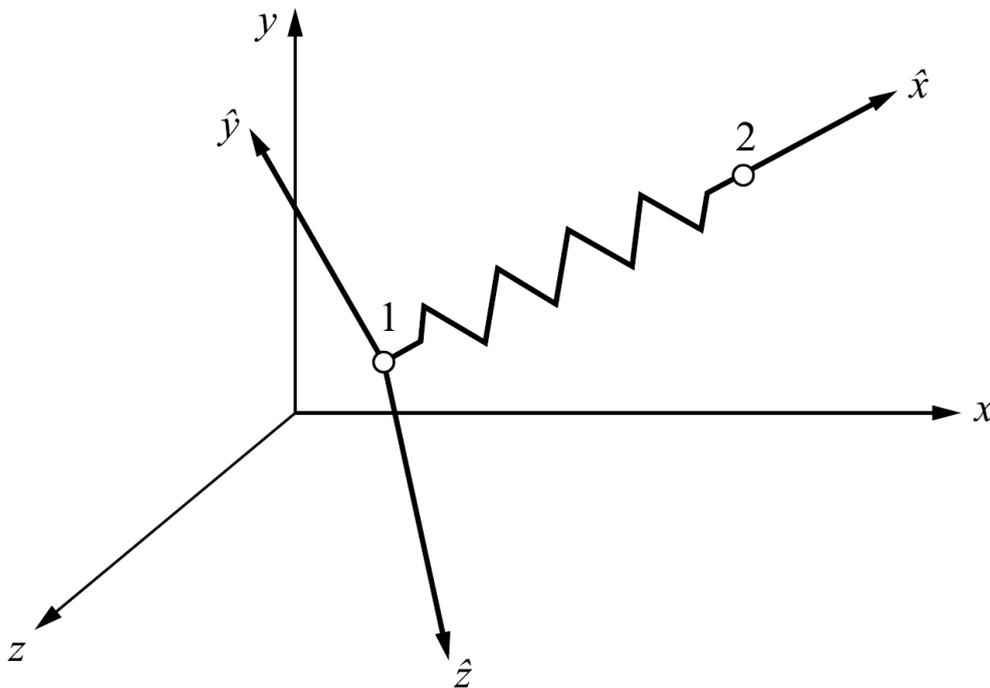


Figura 1: Sistema de coordenadas locais e globais.

Fonte: Logan (2007)

Ainda de acordo com Logan (2007), a variação de temperatura em corpos rígidos deve ser considerada, já que esta pode resultar em grandes tensões, os quais, se não estiverem devidamente dimensionados para suportá-las, podem vir a ruptura. O que ocorre é a mudança das dimensões do corpo de acordo com a variação da temperatura, e seu coeficiente de expansão térmica indica o quanto cada material é capaz de se expandir; ele é representado por α e sua unidade se dá em $(1/^\circ\text{C})$. A força gerada pela variação térmica é dada por:

$$f_{\Delta T} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \quad (3)$$

Onde E representa o módulo de elasticidade ou de Young do material, α como descrito anteriormente, ΔT a variação de temperatura e A é a área da seção transversal da barra estudada.

Para a obtenção dos esforços e deslocamentos nodais finais será feita a superposição das duas análises.

Definido o Método da Rigidez Direta, o próximo item tratará sobre o passo a passo teórico da aplicação do Método em uma barra sujeita a aplicação de forças e variação de temperatura.

2. Metodologia e procedimentos

O presente item trata sobre o procedimento utilizado para calcular os deslocamentos nodais e as reações nos nós restringidos de uma barra submetida a força axial e variação de temperatura. Os dois cálculos são tratados separadamente e superpostos após obtidos os resultados finais. O Método da Rigidez Direta é utilizado obtendo-se a matriz de rigidez global dessa barra, para a qual é considerado que: não há incidência de momento fletor e não é considerado o esforço cortante; as forças aplicadas são apenas do tipo axiais; e é válida a Lei de Hooke.

2.1 Procedimento do método da rigidez direta

Seja para a barra genérica de material isotrópico de comprimento L , área A e módulo de elasticidade E a seguir (Figura 2). São discretizados 3 nós, sendo dois nos extremos e um na metade da barra; não há transferência de momento fletor para os extremos, ou seja, são rotulados; ambos possuem movimentos de translação restringidos e foi desconsiderada a influência do esforço cortante.

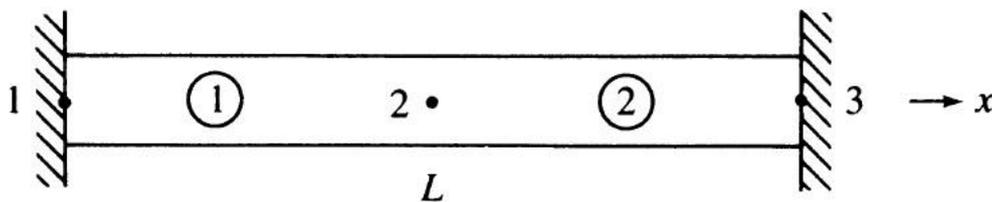


Figura 2: Barra genérica de estudo

Fonte: Logan (2007), adaptado

A obtenção da matriz de rigidez global (K) da barra se dá pela associação das matrizes de rigidez locais (k) de cada elemento desta. Por exemplo, a matriz de rigidez local da barra 1 é relativa ao elemento compreendido entre os nós 1 e 2 da mesma. Assim, fica:

$$[K] = \frac{EA}{L} \sum_{i=1}^N k_i \quad (4)$$

Ou, em notação indicial:

$$K = \frac{EA}{L} k_{ij} \quad (5)$$

Para a matriz de rigidez global da barra genérica da Figura 2, a qual possui 3 nós, tem-se:

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

A relação entre as forças nodais e os deslocamentos globais é descrita pela equação (2), a qual pode ser escrita matricialmente como:

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (7)$$

Ou, em notação indicial:

$$F_{ix} = K_{ij} d_{ix} \quad (8)$$

Onde i e j representam os nós da barra e x , a direção axial da mesma.

Assim, por exemplo, para se obter a força no nó 1 da barra genérica da Figura 2, basta fazer:

$$F_{1x} = K_{11} d_{1x} + K_{12} d_{1x} + K_{13} d_{1x} \quad (9)$$

Há maneiras alternativas para a obtenção das deformações, uma delas relaciona-se com as tensões internas que atuam no corpo.

De acordo com as considerações de Lai, Krempl e Ruben (2009), o tensor de tensões normais, em notação indicial, é:

$$T_{ij} = \sigma \delta_{ij} \quad (10)$$

As componentes de deformação podem ser escritas em função das componentes de tensão; desta forma, é possível representar a deformação através do tensor de deformação infinitesimal, o qual se dá, em notação indicial, por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} T_{ij} - \frac{\nu}{E} T_{kk} \delta_{ij} + \alpha(\Delta t) \delta_{ij} \quad (11)$$

Nota-se, na equação acima, que há uma parcela relacionada à variação de temperatura ΔT , a qual será discutida nos itens seguintes, e as parcelas restantes são relativas aos efeitos mecânicos que atuam sobre o corpo. Desta forma, pode-se resumir esta equação como:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(m)} + \varepsilon_{ij}^{(t)} \quad (12)$$

2.2 Método da rigidez direta para diferença de temperatura

No item anterior foi abordado o Método da Rigidez Direta para tratar dos deslocamentos e forças nodais em uma barra genérica. Neste item, será apresentada a aplicação do Método nos casos em que há a ocorrência de diferença de temperatura,

utilizando-se, como exemplo, a mesma barra genérica de comprimento L , área A e módulo de elasticidade E , contida na Figura 2.

A obtenção da matriz de rigidez global (K) da barra independe da relação com a variação de temperatura, e é feita de maneira similar ao item anterior, associando-se as matrizes de rigidez locais (k) de cada elemento da barra.

A diferença, quando há variação de temperatura, se dá na obtenção da matriz de força térmica em cada elemento da barra, que é dada por:

$$f^{(1)} = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \\ E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \end{bmatrix} \text{ e } f^{(2)} = \begin{bmatrix} f_{2x} \\ f_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \\ E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \end{bmatrix} \quad (13)$$

Onde $f^{(1)}$ e $f^{(2)}$ representam as forças térmicas para os elementos 1 e 2 da barra. Estas matrizes, se relacionadas, formarão uma matriz de força equivalente (F_0). Observa-se que há correlação dos fatores relacionados à temperatura e a Equação 11, a qual contém a parcela condizente à variação de temperatura.

Para se encontrar as forças que a variação de temperatura provoca nos nós restringidos da barra, basta aplicar o Método da Rigidez Direta, da mesma forma como foi explicado no item anterior; onde, deve-se encontrar a matriz de rigidez global da barra e aplicar a relação entre forças e deslocamentos. Porém, deve-se atentar a aparição de forças térmicas, resultando em:

$$F_{ix} = K_{ij} \cdot d_{ix} - F_0 \quad (14)$$

Para a obtenção dos resultados finais, deve-se aplicar as condições de contorno pertinentes.

3. Resultados e discussões

No presente item será tratado um exemplo prático, com valores arbitrários aplicados na barra genérica da Figura 2, que é considerada como sendo de aço, submetida à uma variação de $\Delta T = 10^\circ\text{C}$. Para suas dimensões e propriedades, são arbitrados valores, sendo eles:

$$L = 3\text{m}$$

$$A = 0,10 \times 0,10 = 0,01\text{m}^2$$

$$E = 205 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$\alpha_{aço} = (12 \times 10^{-6} - 06) / ^\circ\text{C}$$

Para validação dos valores, foi feita a mesma análise com o auxílio do programa Ftool (2019), sendo este gratuito e desenvolvido pelo professor Luiz Fernando Martha da PUC-Rio. Portanto, todos os dados aqui expostos foram introduzidos no programa, assim como o modelo da barra (Figura 3).

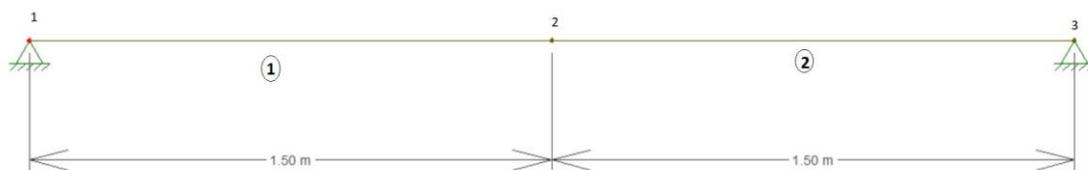


Figura 3: Barra modelada no Ftool (2019).

Na Figura 3, os valores circulos representam os elementos da barra, e os valores não circulos representam os nós. Há um nó (2) no meio da barra no qual será aplicada uma força axial de 100 kN, conforme o exemplo.

3.1 Barra submetida a uma força axial

Para melhor visualização deste item, a Figura 4 a seguir mostra a posição da força aplicada na barra, assim como sua intensidade.

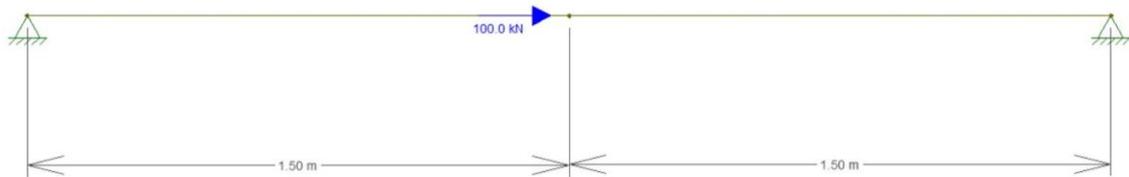


Figura 4: Barra com força aplicada.

O primeiro passo se dá pela obtenção da matriz de rigidez local dos elementos 1 e 2 da barra, os quais estão circulos na Figura 3.

$$k^{(1)} = k^{(2)} = \frac{(205 \times 10^6)(10^{-3})}{1,5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pelo Método da Rigidez Direta é possível fazer a montagem da matriz de rigidez global, dada por:

$$K = \frac{(205 \times 10^6)(10^{-3})}{1,5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando a relação entre forças e deslocamentos, descrita no item 2.1, tem-se:

$$F_{ix} = K_{ij}d_{ix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{bmatrix} = \frac{(205 \times 10^6)(0,01)}{1,5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{3x} \end{bmatrix}$$

Se for considerado, de acordo com as condições de contorno, que os deslocamentos nos nós 1 e 3 estão restringidos, e a força está sendo aplicada no nó 2, então:

$$d_{1x} = 0, d_{3x} = 0 \text{ e } F_{2x} = 100 \text{ kN}$$

Substituindo-se os valores e resolvendo a matriz, obtém-se o deslocamento no nó 2:

$$F_{2x} = \frac{EA}{L}(-d_{1x} + 2d_{2x}) \rightarrow d_{2x} = \frac{(100)(1,5)}{2(205 \times 10^6)(0,01)} = 3,66 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Este deslocamento também pode ser obtido através da aplicação da Equação 11, em que, para tensão de tração simples, o tensor \vec{T} fica assim representado:

$$[\vec{T}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O tensor de deformações infinitesimais (Equação 11), em função do tensor de tensão, fica:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \sigma/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\sigma/E & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\sigma/E \end{bmatrix}$$

No qual ε_{11} representa a deformação que ocorre na mesma direção de onde está sendo aplicada a tensão, ou seja, deformação axial, que no caso deste trabalho é o eixo x. Já, ε_{22} e ε_{33} representam as deformações transversais, que se relacionam com a deformação axial, através do coeficiente de *Poisson* (ν).

Sendo assim, a deformação axial no nó 2 da barra em estudo é:

$$\varepsilon_{11} = \frac{F/A}{E} = 4,88 \times 10^{-5}$$

Para a barra 1, que está submetida a um esforço axial de tração, tem-se que o deslocamento em seu extremo (nó 2) é de:

$$d_{2x} = \frac{(4,88 \times 10^{-5})(1,5)}{2} = 3,66 \times 10^{-5} \text{ m}$$

O resultado é o mesmo do obtido anteriormente neste item, validando-se assim esta alternativa de cálculo de deslocamentos.

Com este valor do deslocamento obtido, é possível encontrar as forças nos nós restringidos, ou seja, nos apoios. Segue que:

$$F_{1x} = \frac{EA}{L} (d_{1x} - d_{2x}) = \frac{(205 \times 10^6)(0,01)}{1,5} (-3,66 \times 10^{-5}) = -50 \text{ kN}$$

$$F_{2x} = 100 \text{ kN}$$

$$F_{3x} = \frac{EA}{L} (d_{3x} - d_{2x}) = \frac{(205 \times 10^6)(0,01)}{1,5} (-3,66 \times 10^{-5}) = -50 \text{ kN}$$

Organizando-se os valores em forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \text{ kN} \\ 100 \text{ kN} \\ -50 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

Desta forma, é representado o exemplo prático do uso do Método da Rigidez Direta para uma barra carregada axialmente. O valor obtido coincide com o que foi encontrado no programa Ftool (2019) (Figura 5).

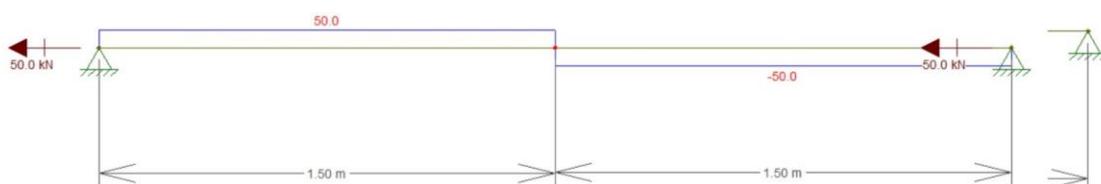


Figura 5: Resultado da barra carregada axialmente.

3.2 Barra submetida a uma variação de temperatura

Para melhor visualização deste item, a Figura 6 a seguir ilustra a barra sujeita a uma variação de temperatura de 10°C, a qual também foi modelada no programa Ftool (2019).

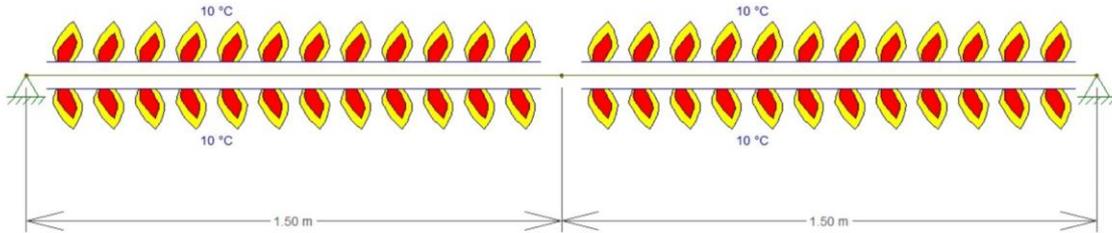


Figura 6: Barra com variação de temperatura aplicada.

Assim como no item anterior, o primeiro passo é a obtenção da matriz de rigidez local dos elementos 1 e 2 da barra, circulosados na Figura 3.

$$k^{(1)} = k^{(2)} = \frac{(205 \times 10^6)(10^{-3})}{1,5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como se trata da mesma barra, mantém-se a matriz de rigidez global, ou seja:

$$K = \frac{(205 \times 10^6)(10^{-3})}{1,5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando há variação de temperatura, considera-se a matriz de força térmica, como descrito no item 2.2. Assim sendo, para os elementos 1 e 2 da barra, tem-se que:

$$f^{(1)} = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \\ E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(205 \times 10^6)(12 \times 10^{-6})(10)(0,01) \\ (205 \times 10^6)(12 \times 10^{-6})(10)(0,01) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -246 \text{ kN} \\ 246 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

$$f^{(2)} = \begin{bmatrix} f_{2x} \\ f_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \\ E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(205 \times 10^6)(12 \times 10^{-6})(10)(0,01) \\ (205 \times 10^6)(12 \times 10^{-6})(10)(0,01) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -246 \text{ kN} \\ 246 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

Assim, para a relação entre forças e deslocamentos:

$$F_{ix} = K_{ij}d_{ix} - F_0$$

Onde:

$$F_{ix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ 0 \\ F_{3x} \end{bmatrix}$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x}^{(1)} + f_{2x}^{(2)} \\ f_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -246 \text{ kN} \\ 246 \text{ kN} - 246 \text{ kN} \\ 246 \text{ kN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -246 \text{ kN} \\ 0 \\ 246 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

$$K_{ij} = \frac{(205 \times 10^6)(10^{-3})}{1,5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por fim, a matriz resulta:

$$\begin{bmatrix} F_{1x} & -f_{1x} \\ F_{2x} + f_{2x}^{(1)} - f_{2x}^{(2)} \\ F_{3x} & -f_{3x} \end{bmatrix} = \frac{(205 \times 10^6)(0,01)}{1,5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{3x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{1x} - 246 \\ 0 \\ F_{3x} + 246 \end{bmatrix} = \frac{(205 \times 10^6)(0,01)}{1,5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{3x} \end{bmatrix}$$

Aplicando-se as condições de contorno nas quais os deslocamentos nos nós 1 e 3 estão restringidos, então:

$$d_{1x} = 0, d_{3x} = 0, \text{ logo } d_{2x} = 0$$

Para validar o resultado do deslocamento d_{2x} acima, pode ser feita a verificação com a Equação 11, cujo tensor de tensão é:

$$[\vec{T}] = \begin{bmatrix} -E\alpha(\Delta T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a barra é restringida na direção x, ao utilizar-se da Equação 11 para obtenção das deformações, conclui-se que não haverá deformações na direção axial, e sim nas outras direções transversais, as quais não serão abordadas neste trabalho. Desta forma, o tensor de deformações infinitesimais é:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(\Delta T)(\nu + 1) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(\Delta T)(\nu + 1) \end{bmatrix}$$

Substituindo-se os devidos valores na equação global, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -246 \\ 0 \\ 246 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 246 \text{ kN} \\ 0 \\ -246 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

Assim, fica representado o exemplo prático do uso do Método da Rigidez Direta para uma barra submetida a uma variação de temperatura. O valor obtido coincide com o que foi encontrado no programa Ftool (2019) (Figura 7).

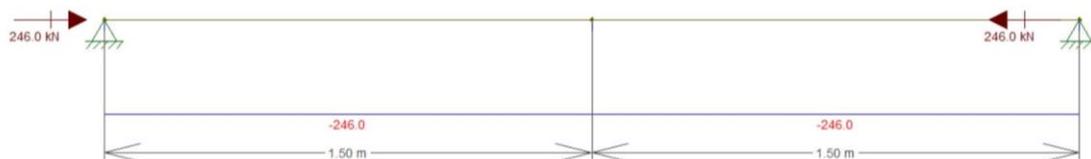


Figura 7: Resultado da barra submetida a uma variação de temperatura.

3.3 Resultado final

Para a obtenção dos esforços finais na barra, basta fazer a superposição dos efeitos encontrados nos itens 3.1 e 3.2; desta forma, as forças nos nós 1 e 3, ou seja, os nós que são restringidos a movimentos de translação, dispõem que:

$$F_{1x} = -50 + 246 = 196 \text{ kN}$$

$$F_{3x} = -50 - 246 = 296 \text{ kN}$$

O deslocamento no nó 2, mesmo com a superposição dos efeitos, se mantém, já que seu valor foi nulo na análise de variação de temperatura aplicada à barra. Assim sendo, o deslocamento final neste nó é de:

$$d_{2x} = 3,66 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Para validação dos resultados, foram comparados com os obtidos no programa Ftool (2019). Observa-se, na Figura 8, que são coincidentes; portanto, está correta a aplicação do Método da Rigidez Direta para o presente exemplo.

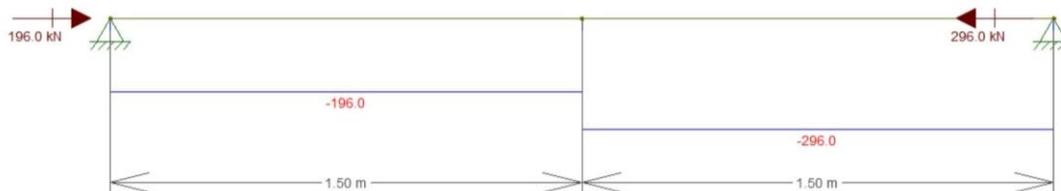


Figura 8: Resultado final das reações na barra.

4. Conclusão

Em suma, pode-se inferir que este trabalho atingiu seus objetivos principais, entre os quais: a aplicação do Método da Rigidez Direta em uma barra; a obtenção das matrizes de rigidez local e global da mesma; a abordagem teórica e prática do método; e a utilização da notação matricial e indicial onde aplicável.

Notou-se que o Método é pertinente, uma vez que foi feita a validação dos resultados através da modelagem no programa Ftool, e os resultados foram similares; concluindo, que o método está correto.

O exemplo abordado no artigo possui alta simplicidade; desta forma, como sugestão, pode-se analisar estruturas mais complexas através do Método da Rigidez Direta e validar os resultados em programas computacionais, de forma semelhante a este trabalho.

Referências

FTOOL. Disponível em: <<https://www.ftool.com.br/Ftool/>>. Acesso em: 17 jun. 2019.

LAI M.; KREMPL E.; RUBEN D. **Introduction to continuum mechanics**. Butterworth-Heinemann, 2009.

LOGAN, D. L. **A first course in the finite element method**. Platteville: University of Wisconsin, 2007.

MARTHA, L. F. **Ftool: A Frame Analysis Educational Software**. Rio de Janeiro, 2002. Disponível em: <http://www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm>.

MARTHA, L. F. **Método da rigidez direta para modelos estruturais lineares e elásticos**. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC – Rio.

RIBEIRO L. F. S.; RODRIGUES E. C.; SILVA L. S. F.; JUNIOR P. M. **Aplicação do método da rigidez direta na análise matricial de treliças planas indeterminadas estaticamente**. In: SEMANA DA EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA – SECITEC, 2017, Itumbiara. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, 2017. p. 1-5.