

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DAS FORMULAÇÕES POSICIONAL E CORROTACIONAL DE ELEMENTOS FINITOS PARA TRELIÇAS 2D

Luiz Antonio Farani de Souza (UTFPR) E-mail: lasouza@utfpr.edu.br

Resumo: Neste artigo são implementadas computacionalmente as formulações Posicional e Corrotacional de Elementos Finitos para análise estática não linear geométrica de treliças bidimensionais. O sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural é solucionado com o Método de Newton-Raphson padrão, associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. A relação constitutiva para o material é adotada elástica linear. As trajetórias de equilíbrio completas com pontos limites de força e/ou de deslocamento das treliças são obtidas, e os resultados numéricos concernentes aos números totais de passos de carga e iterações acumuladas até a solução do problema, bem como o tempo de CPU, obtidos das simulações com o programa Matlab são apresentados. Os resultados apontam que a solução dos problemas estudados com a formulação posicional foi alcançada com um tempo de processamento inferior, visto que foram necessárias menos iterações até o final das simulações para uma dada tolerância.

Palavras-chave: Comprimento de Arco Linear, não linearidade geométrica, Newton-Raphson, algoritmo, Elementos Finitos.

COMPUTATIONAL IMPLEMENTATION OF THE POSITIONAL AND CO-ROTATIONAL FORMULATIONS OF FINITE ELEMENTS FOR 2D TRUSSES

Abstract: In this paper are implemented computationally the Positional and Co-rotational Finite Element formulations for nonlinear static analysis of two-dimensional trusses. The nonlinear equations system that describes the structural problem is solved with the standard Newton-Raphson Method, associated to the Linear Arc-Length path-following technique. The constitutive relation for the material is adopted linear elastic. The complete equilibrium path with limit points of load and/or displacement of trusses are obtained, and the numerical results concerning the total numbers of load steps and accumulated iterations until the problem solution, as well as CPU time, obtained from the simulations with the Matlab software are shown. The results indicate that the solution of the problems studied with the positional formulation was achieved with a lower processing time, since fewer iterations were necessary until the end of the simulations for a given tolerance.

Keywords: Linear Arc-Length, geometric nonlinearity, Newton-Raphson, algorithm, Finite Elements.

1. Introdução

As treliças são um dos sistemas estruturais mais eficientes e utilizados em projetos na atualidade e, devido a sua grande resistência, podem sustentar consideráveis carregamentos utilizando menos quantidade de materiais. Desde o início do seu uso comercial, os sistemas treliçados têm se tornado cada vez mais populares, especialmente em grandes áreas abertas com pouco ou nenhum apoio intermediário (SEÇER, 2009).

A tendência de utilizar estruturas mais esbeltas com maior resistência torna a análise de estabilidade estrutural um assunto de fundamental importância (GRECO; VENTURIN, 2006). Problemas com não linearidade geométrica apresentam em geral pontos críticos ou limites ao longo do caminho de solução. Esses pontos na trajetória de equilíbrio são pontos em que a estrutura perde estabilidade (por exemplo, flambagem) ou ocorre a bifurcação (ou seja, a solução muda para dois ou mais caminhos) (LEON et al., 2011).

Assim, estratégias capazes de traçar o caminho completo de equilíbrio não linear devem ser eficientes o suficiente para identificar e ultrapassar esses pontos (REZAIIEE-PAJAND; SALEHI-AHMADABAD; GHALISHOOYAN, 2014).

A não linearidade geométrica está associada a: equações de equilíbrio, que são escritas considerando a configuração deformada da estrutura; e equações que relacionam a deformação e o deslocamento da estrutura considerada. Medidas de tensões e deformações adequadas devem ser introduzidas ao problema não linear, tais como o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e o tensor de deformações de Green-Lagrange. Além disso, deve-se utilizar uma estratégia incremental para relacionar as diferentes configurações de equilíbrio às intensidades de aplicação da carga, adequando-se às equações de equilíbrio (RODRIGUES; VARELA; SOUZA, 2008).

O método de Newton-Raphson é um dos métodos mais utilizados para solucionar o sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural. Esse método fornece a solução de pontos na trajetória de equilíbrio por meio de um procedimento incremental-iterativo (HAISLER; STRICKLIN; STEBBINS, 1972). A solução próxima a um ponto limite no caminho pode divergir, devido ao mau condicionamento da matriz de rigidez tangente, ou apenas porque, para o nível de carga estabelecido, não há solução (SILVEIRA; ROCHA; GONÇALVEZ, 1999).

A fim de resolver esses problemas de convergência, técnicas de continuação associadas ao método de Newton-Raphson foram desenvolvidas, podendo-se destacar: Deslocamento Constante (BATOZ; DHATT, 1979); Trabalho Externo Constante (POWELL; SIMONS, 1981); Comprimento do Arco (RIKS, 1972; RIKS, 1979; RAMM, 1981; CRISFIELD, 1981); Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais (CHAN, 1988); Norma Mínima das Forças Desequilibradas (BERGAN et al., 1978); Resíduo Ortogonal (KRENK; HEDEDAL, 1995); e Controle de Deslocamento Generalizado (YANG; KUO, 1994). Na técnica de Controle de Carga Constante, o parâmetro de força é mantido invariável durante o ciclo iterativo. A ideia dos métodos de continuação é tratar o parâmetro de força como uma variável, adicionando uma condição de restrição ao sistema de equações para a determinação de si mesmo.

O Método dos Elementos Finitos é frequentemente aplicado em análises não lineares de estruturas (LACERDA, 2014). Há duas formulações de elementos finitos bastante difundidas na análise estrutural não linear geométrica - a formulação posicional e a formulação corrotacional.

A formulação posicional foi desenvolvida por Coda (2003) e é baseada no princípio da mínima energia potencial, cujas incógnitas fundamentais do problema são as coordenadas nodais do elemento finito, ao invés dos deslocamentos, que são as incógnitas na formulação padrão dos elementos finitos para sólidos. Essa formulação é classificada como sendo uma formulação Lagrangeana total.

A formulação corrotacional foi desenvolvida por Crisfield (1981), e é fundamentada na separação explícita dos movimentos de corpo rígido (translações e rotações) e dos movimentos deformacionais.

Neste artigo são apresentadas e implementadas computacionalmente as formulações Posicional e Corrotacional de Elementos Finitos para a análise não linear estática de treliças bidimensionais com não linearidade geométrica (grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações). O método de Newton-Raphson padrão, associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear, é empregado na solução do sistema de equações não lineares. A relação constitutiva do material é adotada elástica

linear.

Simulações de problemas de treliças planas encontrados na literatura são efetuadas com o *software* Matlab, a fim de comparar as respostas numéricas das formulações, bem como a eficiência dos algoritmos implementados. As trajetórias de equilíbrio com pontos limites de força e/ou deslocamento das treliças são obtidas. Os resultados numéricos apontam que a solução dos problemas estudados com a formulação posicional foi alcançada com um menor tempo de processamento, visto que foram necessárias menos iterações até a convergência para uma dada tolerância.

2. Formulação Posicional de Elementos Finitos

O elemento de treliça é descrito pela formulação Posicional de Elementos Finitos (CODA, 2003; CODA; GRECO, 2004). Esse elemento transmite somente forças axiais e tem área da seção transversal constante A . As coordenadas (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) representam a configuração inicial do elemento de barra (também conhecida como coordenadas de referência). Após uma mudança de configuração devido a deslocamentos da treliça, a barra passa a ter novas coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . O comprimento inicial (ou referencial) L_0 e o comprimento atual L da barra são calculados, respectivamente, por:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}, \quad (1)$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2)$$

A matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_{el} e o vetor de forças internas \mathbf{F}_{el} elementares são obtidos conforme as equações, respectivamente:

$$\mathbf{K}_{el} = \frac{EA}{L_0^3} \mathbf{B} + \frac{EA\varepsilon_G}{L_0} \mathbf{C}, \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_{el} = \frac{EA\varepsilon_G}{L_0} \mathbf{m}, \quad (4)$$

nas quais EA é a rigidez axial. A deformação de Green ε_G é dada pela expressão:

$$\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}. \quad (5)$$

Na Equação (3), as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} são definidas, respectivamente, por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{m}\mathbf{m}^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

em que \mathbf{I}_2 é a matriz identidade de ordem 2 e $\mathbf{m} = [x_1-x_2, y_1-y_2, x_2-x_1, y_2-y_1]^T$.

O vetor de deslocamentos na iteração k ($\mathbf{u}^{(k)}$) é determinado por:

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k)} - {}^0\mathbf{d}, \quad (8)$$

na qual ${}^0\mathbf{d}$ é o vetor de coordenadas nodais no passo de carga 0 (estrutura indeformada) e $\mathbf{d}^{(k)}$ é o vetor de coordenadas nodais na iteração k .

3. Formulação Corrotacional de Elementos Finitos

A estrutura da treliça pode sofrer grandes deslocamentos e rotações no nível global, mas pequenas deformações no nível local. Considere o elemento de treliça nas configurações inicial e corrente como mostrado na Figura 1. Os comprimentos inicial L_0 e corrente L são determinados conforme as Equações (1) e (2), respectivamente. As coordenadas globais permanecem fixas na formulação corrotacional. O ângulo corrente do elemento corrotacionado com relação ao sistema de coordenadas globais é denotado por θ . Na formulação bidimensional, os valores do seno e cosseno desse ângulo são determinados por, respectivamente (YAW, 2009; CRISFIELD, 1991):

$$\cos(\theta) = \frac{(X_2 + u_2) - (X_1 + u_1)}{L}, \tag{9}$$

$$\sin(\theta) = \frac{(Y_2 + v_2) - (Y_1 + v_1)}{L}. \tag{10}$$

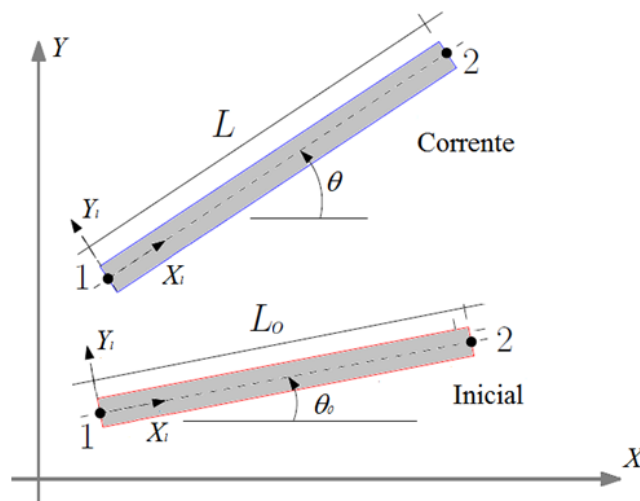


Figura 1: Configurações inicial e corrente do elemento de treliça

Fonte: Adaptada de Yaw (2009)

Considere $c = \cos(\theta)$ e $s = \sin(\theta)$. O vetor de força interna elementar F_{el} é avaliado pela seguinte expressão:

$$F_{el} = \frac{NL}{L_0} \mathbf{r}, \tag{11}$$

na qual $\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad c \quad s]^T$ e N é a força axial interna local dada por:

$$N = AE \varepsilon_G, \tag{12}$$

em que EA é a rigidez axial e ε_G é a deformação de Green dada pela Equação (5). A matriz de rigidez elementar K_{el} é composta por dois termos:

$$K_{el} = K_M + K_G, \tag{13}$$

na qual K_M é a matriz de rigidez material e K_G é a matriz de rigidez geométrica, sendo determinadas por, respectivamente:

$$K_M = \frac{AE}{2L_0} \left(3 \frac{L^2}{L_0^2} - 1 \right) \mathbf{r} \mathbf{r}^T, \tag{14}$$

$$K_G = \frac{N}{L} \frac{L}{L_0} \begin{bmatrix} I_2 & -I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

4. Método de solução do problema estrutural

Metodologias eficientes de solução de sistemas não lineares devem ser capazes de percorrer todo o caminho de equilíbrio do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos (ponto limite de carga, ponto limite de deslocamento e ponto de bifurcação) que possam existir (PINHEIRO; SILVEIRA, 2004; LEON et al., 2011; SOUZA et al., 2017).

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural com comportamento não linear geométrico é descrita por (MAXIMIANO; SILVA; SILVEIRA, 2014):

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int} = \mathbf{0}, \quad (16)$$

na qual \mathbf{g} é o vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F}_r é o vetor de referência que caracteriza a direção da força externa, λ é o parâmetro de força e \mathbf{F}_{int} é o vetor de forças internas.

A solução do problema estrutural dado pela Equação (16) é obtida por meio de um esquema iterativo e incremental. Para uma sequência do parâmetro de carga λ , uma sequência do respectivo incremento de deslocamentos nodais \mathbf{u} é calculado. Como \mathbf{g} é uma função não linear dos deslocamentos, iterações para correção do parâmetro de carga são necessárias para obter a solução.

Com a consideração de que λ passa a ser uma incógnita e varia ao longo das iterações, e aplicando o método de Newton-Raphson, tem-se o problema estrutural não linear:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k)} \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}^{(k-1)}, \quad (17)$$

em que $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}$ é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural e $\delta \mathbf{u}^{(k)}$ é o subincremento de deslocamentos. O superíndice $(k-1)$ indica a iteração anterior e (k) indica a iteração corrente. Os parâmetros totais de força (λ) e do vetor de deslocamentos nodais (\mathbf{u}) no passo de carga $t + \Delta t$ e iteração k são atualizados por, respectivamente:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \quad (18)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (19)$$

Com a combinação das Equações (17) e (18), chega-se à expressão para $\delta \mathbf{u}^{(k)}$ (CRISFIELD, 1991):

$$\delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)}, \quad (20)$$

na qual $\delta \lambda^{(k)}$ é o subincremento do parâmetro de carga que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo, e $\delta \mathbf{u}_g^{(k)}$ e $\delta \mathbf{u}_r^{(k)}$ são obtidos por, respectivamente:

$$\delta \mathbf{u}_g^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)}, \quad (21)$$

$$\delta \mathbf{u}_r^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{F}_r. \quad (22)$$

O cálculo explícito de $[\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1}$ pode ser evitado resolvendo-se o sistema de equações lineares via decomposição (por exemplo, fatoração LU), visto que uma única fatoração no início da iteração é necessária.

Os parâmetros incrementais do parâmetro de carga ($\Delta\lambda$) e do vetor de deslocamentos nodais ($\Delta\mathbf{u}$) no passo de carga $t+\Delta t$ e iteração k são avaliados por, respectivamente:

$$\Delta\lambda^{(k)} = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}, \quad (23)$$

$$\Delta\mathbf{u}^{(k)} = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)}. \quad (24)$$

Para a determinação do parâmetro de carga, foi utilizada a estratégia de continuação Comprimento de Arco Linear proposta por Riks (1972, 1979), em que a trajetória de iteração é mantida sempre ortogonal à direção tangente inicial em cada passo. A expressão para o incremento inicial do parâmetro de carga (solução predita) é dada por:

$$\Delta\lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta\mathbf{u}_r\|}, \quad (25)$$

na qual Δl representa o incremento de comprimento de arco. Esse incremento pode ser utilizado como um parâmetro de controle no passo de carga corrente de acordo com a expressão:

$$\Delta l = \Delta l^{(0)} \left(\frac{Nd}{t_k} \right)^{0,5}, \quad (26)$$

em que $\Delta l^{(0)}$ representa o incremento de comprimento de arco no passo de carga inicial, Nd é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente, e t_k é o número de iterações que foi necessário para convergir no passo de carga anterior. No processo iterativo subsequente, a equação de restrição usada para calcular $\delta\lambda^{(k)}$ é obtida fazendo com que a solução iterativa ($\delta\mathbf{u}^{(k)}$) seja ortogonal à solução incremental predita ($\Delta\mathbf{u}^{(0)}$):

$$\delta\mathbf{u}^{(k)T} \Delta\mathbf{u}^{(0)} = 0. \quad (27)$$

Com a substituição da Equação (20) na Equação (27), obtém-se a equação para a determinação da correção do subincremento de carga ($k > 1$):

$$\delta\lambda^{(k)} = - \frac{\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}. \quad (28)$$

O critério de convergência adotado para cada passo de carga é expressado pela norma da vetor de força desequilibradoras e do vetor de força de referência:

$$\|\mathbf{g}\| < tol \|\mathbf{F}_r\|, \quad (29)$$

em que tol é a tolerância fornecida pelo usuário.

O método de Newton-Raphson só fornece a solução de um simples ponto no caminho de equilíbrio. Para obter outros pontos, combina-se as iterações de Newton-Raphson com um procedimento incremental. Esse procedimento incremental-iterativo é ilustrado pelo algoritmo no Quadro 1.

Os dados de entrada no algoritmo são: comprimento inicial de arco ($\Delta l^{(0)}$); número máximo de iterações em cada passo de carga ($k_{máx}$); número de iterações desejadas em cada passo de carga (Nd); tolerância (tol); incremento de carga (ΔP); e número máximo de passos de carga ($n_{máx}$). As saídas do algoritmo são: vetor de deslocamentos nodais (\mathbf{u}); parâmetro de carga total λ ; número total de passos de carga (NP); número total de iterações acumuladas até a convergência para a solução (k_{total}); e número médio de iterações por passo de carga ($k_{médio}$).

1. $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{0}, \Delta\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{0}, \lambda \leftarrow 0$
2. Para $NP \leftarrow 1, \dots, N_{\text{máx}}$
3. $\delta\mathbf{u}_r \leftarrow [\mathbf{K}(\mathbf{u})]^{-1} \mathbf{F}_r$
4. $\Delta\lambda \leftarrow \Delta l / \|\delta\mathbf{u}_r\|$
5. Se $\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u}_r < 0$
6. $\Delta\lambda \leftarrow -\Delta\lambda$
7. Fim-Se
8. $\Delta\mathbf{u}^{(0)} \leftarrow \Delta\lambda \delta\mathbf{u}_r$
9. $\Delta\mathbf{u} \leftarrow \Delta\mathbf{u}^{(0)}$
10. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})$
11. Para $k \leftarrow 1, \dots, k_{\text{máx}}$
12. $\delta\mathbf{u}_g \leftarrow [\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{g}$
13. $\delta\lambda \leftarrow -(\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_g) / (\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_r)$
14. $\delta\mathbf{u} \leftarrow \delta\mathbf{u}_g + \delta\lambda \delta\mathbf{u}_r$
15. $\Delta\mathbf{u} \leftarrow \Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$
16. $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda + \delta\lambda$
17. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})$
18. Se $\|\mathbf{g}\| < \text{tol} \|\mathbf{F}_r\|$
19. Terminar a execução do Para
20. Fim-Se
21. Calcular $\mathbf{K}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})$
22. $\delta\mathbf{u}_r \leftarrow [\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{F}_r$
23. Fim-Para
24. $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$
25. $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta\lambda$
26. $\Delta l \leftarrow \Delta l^{(0)} (N_d/k)^{0,5}$
27. Fim-Para

Quadro 1 - Algoritmo: Procedimento incremental-iterativo para o Método de Newton-Raphson associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear.

5. Resultados numéricos

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas de treliças planas encontrados na literatura, levando-se em conta na análise estática a não linearidade geométrica, com o intuito de aplicar e comparar as formulações Posicional e Corrotacional de Elementos Finitos.

Os algoritmos desenvolvidos para a solução do problema não linear descrito pela Equação (16) foram implementados usando o *software* Matlab, versão 8.6 R2015b (MATLAB, 2015). Os testes computacionais foram realizados em um computador Core i7 - 3537U com 8GB de memória.

O peso próprio das estruturas é desprezado nas análises. Ressalta-se, ainda, que não estão contabilizadas no tempo de processamento a geração da malha e a visualização dos resultados. Para o término das análises, foi estabelecida uma condição envolvendo o deslocamento máximo em um nó determinado da estrutura e/ou um valor máximo para a carga total.

5.1 Treliça abatida com dez barras

Seja a treliça plana com dez barras, cuja geometria e o carregamento são apresentados na Figura 2. As barras têm módulo de elasticidade $E = 5000 \text{ kN/cm}^2$ e área da seção transversal $A = 1,0 \text{ cm}^2$. Na Figura 3 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio da

estrutura (curvas deslocamento vertical no nó 3 *versus* força P) obtidas com as formulações, havendo boa concordância com os resultados obtidos por Wriggers, Wagner e Miehe (1988). Os parâmetros considerados nas simulações são: $\Delta l^{(0)} = 0,01$; $k_{máx} = 100$; $Nd = 3$; $tol = 1,0 \times 10^{-7}$; e $\Delta P = 100$ kN.

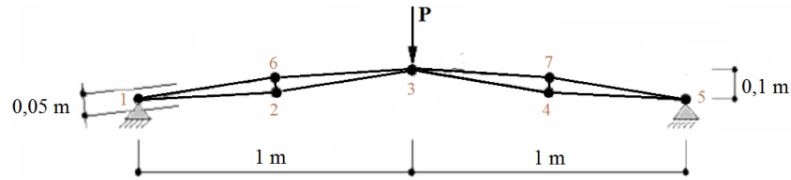


Figura 2 – Modelo estrutural da treliça abatida com 10 barras

Fonte: Adaptada de Wriggers, Wagner e Miehe (1988)

Na Figura 3, o primeiro ponto limite de força (tangente horizontal) representa a força máxima em que a estrutura pode suportar antes do *snap-through*. Nas posições intermediárias, a força P decresce e reverte de sinal duas vezes enquanto o deslocamento u continua a crescer. Entretanto, é impossível permanecer em uma das posições intermediárias porque elas são posições de equilíbrio instável. Quando o efeito *snap-through* termina, a estrutura começa a suportar valores adicionais de carga. Na Tabela 1 são mostrados os resultados numéricos (NP , k_{total} , $k_{médio}$ e t) obtidos das simulações.

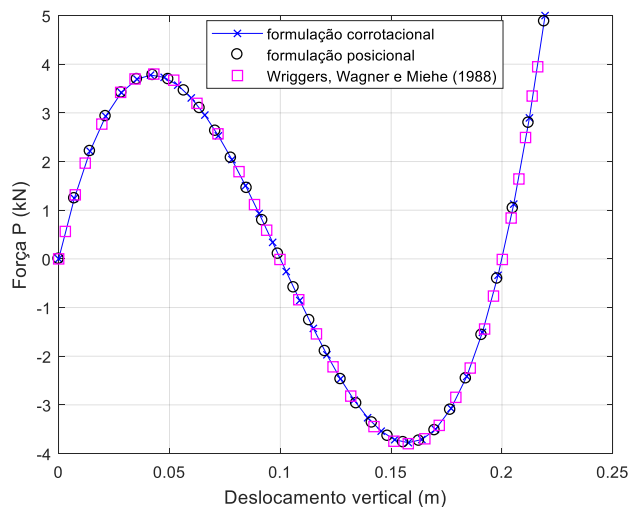


Figura 3 – Trajetórias de equilíbrio para a treliça abatida com 10 barras

Tabela 1 – Treliça abatida com 10 barras: resultados numéricos

Formulação de Elementos Finitos	NP	$k_{máx}$	$k_{médio}$	t (s)
Corrotacional	34	124	3,6471	0,191089
Posicional	31	93	3,0000	0,167659

5.2 Treliça não simétrica

Considere a estrutura correspondente a uma cobertura articulada plana, abatida e não simétrica, conforme ilustrada na Figura 4. Essa estrutura foi estudada por Powell e Simons (1981) e Menin (2006), apresentando 18 nós e 33 elementos de barra, com

rigidez axial adimensional $EA = 9,0 \times 10^6$ e está submetida ao efeito de três forças P de igual magnitude. Na Figura 5 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio não lineares para o deslocamento vertical do nó cinco *versus* força P , obtidas com as formulações Corrotacional e Posicional de Elementos Finitos. Nas simulações foram considerados $\Delta l^{(0)} = 2,0$, $k_{m\acute{a}x} = 100$, $Nd = 3$, $tol = 1,0 \times 10^{-7}$ e $\Delta P = 100$.

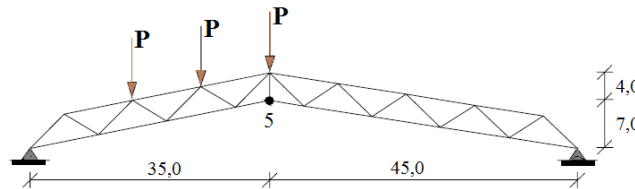


Figura 4 – Modelo estrutural da treliça abatida não simétrica

Fonte: Adaptada de Menin (2006)

Tabela 2 – Treliça abatida não simétrica: resultados numéricos

Formulação de Elementos Finitos	NP	$k_{m\acute{a}x}$	$k_{m\acute{e}d}i$ o	t (s)
Corrotacional	43	313	7,2791	0,735926
Posicional	31	110	3,5484	0,292966

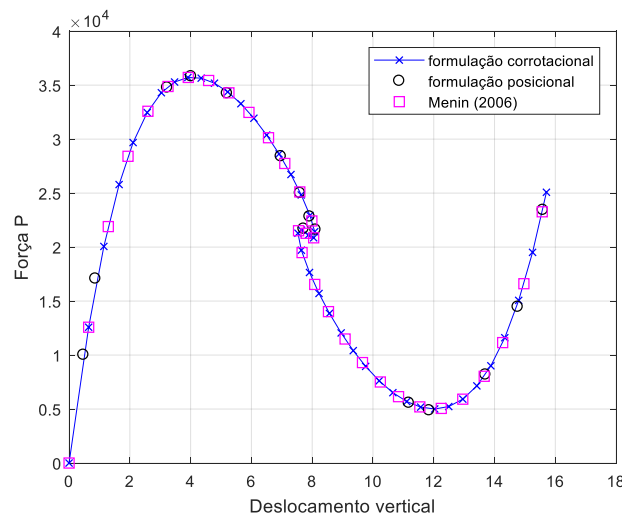


Figura 5 – Trajetórias de equilíbrio para a treliça abatida não simétrica

5.3 Arco treliçado

Seja o arco treliçado com 19 nós e 35 barras, mostrado na Figura 6. As barras têm módulo de elasticidade $E = 7,03 \times 10^5$ Kgf/cm² e área da seção transversal $A = 10,0$ cm². Este problema foi adaptado de Seçer (2009). Nas simulações foram considerados $\Delta l^{(0)} = 6,0$, $k_{m\acute{a}x} = 100$, $Nd = 5$, $tol = 1,0 \times 10^{-7}$ e $\Delta P = 1,0$ kgf. Na Tabela 3 são apresentados os resultados numéricos.

Os caminhos de equilíbrio (curvas deslocamento vertical no nó 10 *versus* força P) são apresentados na Figura 7. Nessa figura, vê-se que as trajetórias possuem três pontos

limites de força (tangentes horizontais) e um ponto limite de deslocamento (tangente vertical). Genericamente, uma configuração de equilíbrio pode ser estável ou instável. Configurações estáveis ocorrem com o aumento da carga e do deslocamento, enquanto que configurações instáveis podem ocorrer com a diminuição da carga e com o aumento do deslocamento, ou com a diminuição da carga e do deslocamento.

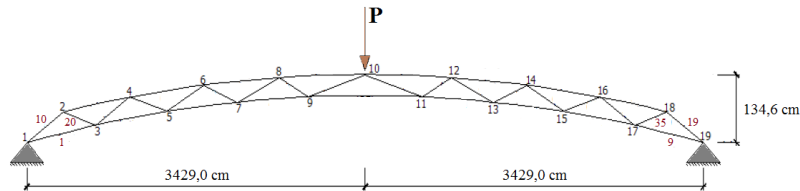


Figura 6 – Esquema estrutural do arco treçado

Fonte: Adaptada de Seçer (2009)

Tabela 3 - Arco treçado: resultados numéricos

Formulação de Elementos Finitos	NP	$k_{máx}$	$k_{médio}$	t (s)
Corrotacional	139	550	3,9568	1,107072
Posicional	123	379	3,0813	0,617124

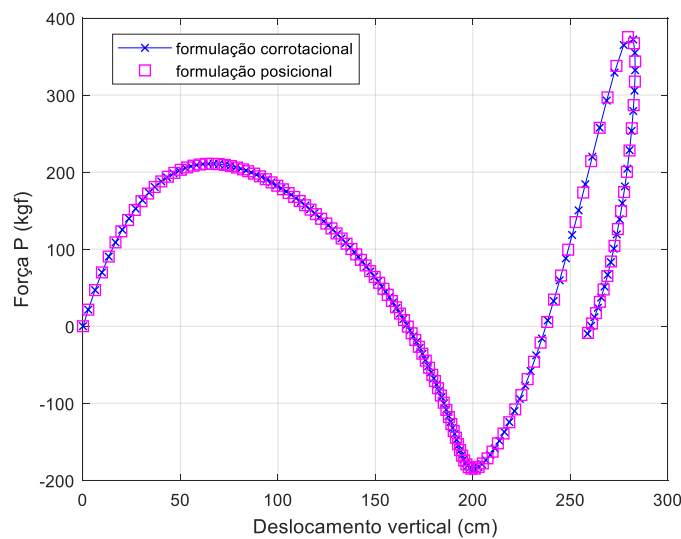


Figura 7 – Trajetórias de equilíbrio para o arco treçado

6. Conclusão

Um dos principais objetivos da Engenharia Estrutural é tornar as estruturas mais econômicas, por meio da redução do seu peso próprio e consumo de materiais sem, no entanto, diminuir sua segurança e durabilidade. Assim, à proporção que o elemento estrutural se torna mais esbelto, a não linearidade geométrica se torna mais importante, e dá origem a vários fenômenos que não são encontrados em sistemas estruturais com comportamento linear.

Uma estrutura treliçada passando por grandes mudanças na geometria frequentemente exhibe pontos críticos na trajetória de equilíbrio. Observou-se que as formulações posicional e corrotacional, juntamente com o esquema iterativo de Newton-Raphson associado à técnica de Comprimento de Arco Linear, conseguiram obter as trajetórias de equilíbrio completas das estruturas, passando por pontos limites de força e de deslocamento.

O dispositivo utilizado para a determinação do sinal do incremento de força $\Delta\lambda^{(0)}$ (ver linha cinco do algoritmo no Quadro 1), baseado no produto interno entre o deslocamento incremental obtido no passo de carga anterior e o incremento de deslocamento corrente, mostrou-se eficiente na passagem por esses pontos.

Para os problemas estudados, verificou-se que a formulação posicional foi mais eficiente computacionalmente do que a formulação corrotacional, uma vez que aquela obteve a solução com números totais de passos de carga e iterações acumuladas menores do que os valores obtidos por esta (ver Tabelas 1, 2 e 3).

Se na análise estrutural as deformações são pequenas (ou infinitesimais), o equilíbrio na configuração indeformada fornece resultados suficientemente precisos. No entanto, se as deformações são finitas o equilíbrio deve ser feito na configuração deformada. A análise de estabilidade deve ser realizada em estruturas que têm potencialidade de ocorrer flambagem. Dessa maneira, as formulações estudadas neste artigo são adequadas para este tipo de análise, e são relativamente simples de serem implementadas em programas computacionais de análise não linear.

Sugere-se como pesquisa futura, a inclusão da não linearidade física e do fenômeno de flambagem nas análises, a implementação de outras técnicas de continuação (deslocamento generalizado, resíduo ortogonal, entre outras) e a aplicação de outros métodos de solução com ordem de convergência maior, como o de Potra-Pták de dois passos.

Referências

- BATOZ, J. L. & DHATT, G.** Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, n. 8, p. 1262-1267, 1979.
- BERGAN, P. G., HERRIGMOE, G., BRAKELAND, B. & SOREIDE, T. H.** *Solution techniques for non-linear finite element problems*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, n. 11, p. 1677-1696, 1978.
- CHAN, S. L.** *Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, n. 12, p. 2657-2669, 1988.
- CODA, H. B.** *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF*. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular, SET-EESC-USP).
- CODA, H. B. & GRECO, M.** *A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, n. 33-35, p. 3541-3557, 2004.
- CRISFIELD, M. A.** *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd., 1981.
- GRECO, M. & VENTURIN, W. S.** *Stability analysis of three-dimensional trusses*. *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 3, n. 3, p. 325-344, 2006.
- HAISLER, W. E.; STRICKLIN, J. A. & STEBBINS, F. J.** *Development and evaluation of solution*

procedures for geometrically nonlinear structural analysis. AIAA Journal, Vol. 10, n. 3, p. 264-272, 1972.

KRENK, S. & HEDEDAL, O. *A dual orthogonality procedure for non-linear finite element equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 123, n. 1-4, p. 95-107, 1995.

LACERDA, E. G. M. *Análise não linear de treliças pelo Método dos Elementos Finitos Posicional*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

LEON, S. E.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. & LAGES, E. N. *A unified library of nonlinear solution schemes*. Applied Mechanics Reviews, Vol. 64, n. 4, p. 040803, 2011.

MATLAB, version 8.6.0 (R2015b). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2015.

MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D. & SILVEIRA, R. A. M. *Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches*. Rem: Revista Escola de Minas, Vol. 67, n. 2, p. 143-150, 2014.

MENIN, R. C. G. M. *Aplicação da Descrição Cinemática Co-Rotacional na Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliças, Vigas e Cascas*. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2006.

PINHEIRO, L. & SILVEIRA, R. A. M. *Análise da estabilidade elástica de treliças espaciais*. Rem: Revista Escola de Minas, Vol. 57, n. 2, p. 85-92, 2004.

POWELL, G. & SIMONS, J. *Improved iteration strategy for nonlinear structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, n. 10, p. 1455-1467, 1981.

RAMM, E. *Strategies for tracing the non-linear response near limit-points, nonlinear finite element analysis in structural mechanics*. Wunderlich, W. (ed.). Berlin: Springer-Verlag, p. 63-89, 1981.

REZAIIEE-PAJAND, M.; SALEHI-AHMADABAD, M. & GHALISHOOYAN, M. *Structural geometrical nonlinear analysis by displacement increment*. Asian Journal of Civil Engineering (BHRC), Vol. 15, n. 5, p. 633-653, 2014.

RIKS, E. *The application of Newton's methods to the problems elastic stability*. Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, n. 4, p. 1060-1065, 1972.

RIKS, E. *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*. International Journal of Solids and Structures, Vol. 15, n. 7, p. 529-551, 1979.

RODRIGUES, P. F. N.; VARELA, W. D. & SOUZA, R. A. *Análise de Estratégias de Solução do Problema Não-linear*. Revista Ciência e Tecnologia, Vol. 8, n. 2, p. 36-49, 2008.

SEÇER, M. *Inelastic and large deformation analyses of plane trusses*. Technology, Vol. 12, n. 3, 2009.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I. & MACHADO, R. D. *Métodos iterativos de terceira e quarta ordem associados à técnica de comprimento de arco linear*. Ciência & Engenharia, Vol. 26, n. 1, p. 39-49, 2017.

SILVEIRA, R. A. M.; ROCHA, G. & GONÇALVEZ, P. B. *Estratégias numéricas para análises geometricamente não lineares*. In: XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindóia. 1999, p. 117-120.

WRIGGERS, P.; WAGNER, W. & MIEHE, C. *A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis*. Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 70, n. 3, p. 329-347, 1988.

YANG, Y. B. & KUO, S. R. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Singapore: Prentice - Hall, 1994.

YAW, L. L. *2D Co-rotational Truss Formulation*. Walla Walla University, 2009.