
UTILIZAÇÃO DE EQUAÇÕES DA LINHA ELÁSTICA DE VIGAS E DE DEFORMAÇÃO AXIAL PARA O CÁLCULO DE DESLOCAMENTO DE BARRAS RETICULADAS VIA ANÁLISE MATRICIAL

Luciano Gobo Saraiva Leite – Prof. Dr., Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM. E-mail: luciano.leite@uftm.edu.br

Albert Willian Faria – Prof. Dr., Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM. E-mail: albert.faria@uftm.edu.br

Resumo: Neste trabalho é descrito o cálculo dos deslocamentos de barras reticuladas, utilizando-se a equação da linha elástica de viga e da deformação axial de barras, para a plotagem do gráfico da deformada da estrutura. Tem-se como objetivo a possibilidade de se utilizar o método de Análise Matricial para este fim, pois basta montar a matriz de rigidez apenas para os nós das extremidades das barras, e para os outros nós utilizar a formulação deste trabalho, evitando o uso da formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF), onde se tem a necessidade de se construir uma matriz de rigidez para todos os nós internos e das extremidades da barra, para a plotagem da deformada. Partindo-se das equações da linha elástica de viga para diversos tipos de carregamento, que serão integradas, e utilizando-se das condições de contorno das extremidades, pode-se obter uma expressão de deslocamento de corpo rígido para estes nós e outra da influência do carregamento sobre a barra. Por fim são mostrados três exemplos, comparando a solução deste trabalho com outras formulações. Conclui-se que a formulação apresentou bons resultados, utilizando-se menos recursos computacionais se comparada à análise via MEF.

Palavras-chave: análise matricial, linha elástica, deslocamentos.

USING OF THE ELASTIC LINE EQUATION FOR BEAMS AND THE AXIAL DEFORMATION EQUATION FOR THE CALCULATION OF THE DISPLACEMENT OF RETICULATED BARS BY THE MATRICIAL ANALYSIS.

Abstract: This paper deals with the calculation of the cross-beam displacements, using the equation of the beam elastic line and the axial deformation of bars, for plotting of deformed of the structure. The objective is to evaluate the possibility of using the matrix analysis method for this purpose, since it is enough to assemble the stiffness matrix only for the nodes at the ends of the bars, and for the other nodes to use the formulation of this paper, avoiding the use of the formulation of the Finite Element Method (MEF), where it is necessary to construct a stiffness matrix for all internal and external nodes of the bar, for plotting the deformed of the structure. It is based on the equations of the elastic beam line for various types of loading, which will be integrated and, using the boundary conditions of the extremities, a rigid body displacement expression can be obtained for these nodes and another one of the influence of the loading on the bar. Finally, three examples are shown, comparing the solution of this work with other formulations. It is concluded that the formulation presented good results, using less computational resources compared to the analysis via MEF.

Keywords: matrix analysis, elastic line, displacement.

1. Introdução

O método da Análise Matricial é um método numérico computacional de análise de estruturas de barras reticuladas, bastante utilizado nos softwares de análise estrutural. Consiste na transformação das equações do Método dos Deslocamentos em um sistema matricial, onde se pode encontrar o deslocamento das extremidades das barras, e com estes valores, através da relação constitutiva de cada barra, se determinar os esforços localmente em cada extremidade.

O conceito de análise de estruturas apertadas de barras surgiu durante o período compreendido entre 1850 e 1875, pelos esforços de Maxwell (1864), Castigliano (1879) e Mohr (1868). Ao mesmo tempo, o conceito de matrizes estava sendo desenvolvido por Cayley (1857), dentre outros pesquisadores. Esses conceitos formaram a base da análise matricial de estruturas. Muito pouco progresso teve entre 1875 a 1920 no desenvolvimento das técnicas para análise matricial das estruturas, devendo-se a impossibilidade de se resolver equações algébrica com muitas variáveis desconhecidas.

Em meados de 1920, como resultado dos trabalhos de Maney (1915) nos Estados Unidos e Ostenfeld (1926) na Dinamarca, foram escritas as idéias básicas de análise de treliça e pórticos, definindo os conceitos de análise matricial que ainda estão em uso atualmente. Em 1932 Handy Cross (1932) introduziu um método de distribuição de esforços. Está foi a principal técnica utilizada na análise estrutural de pórticos nos 25 anos subseqüentes. Hoje ainda é utilizada para resolução de pequenos problemas de análise de vigas contínuas para alunos do curso de graduação de Engenharia Civil, pois possibilita uma visualização da distribuição dos esforços segundo a rigidez de cada tramo da viga.

Com o aparecimento dos computadores de grande capacidade de processamento, em meados de 1950, os pesquisadores vislumbraram os impactos do uso destes equipamentos na teoria e prática da análise estrutural, e começaram a escrever os códigos dos algoritmos para a resolução de pórticos com a utilização de matrizes. Com as publicações de Argyris e Kelsey (1960) e Turner, Clough, Martin e Topp (1956), foram formados os conceitos da análise de pórticos e do meio contínuo, utilizando-se de códigos computacionais baseados em análise matricial. Um importante fator para a disseminação da análise estrutural computadorizada na Engenharia Civil foi a série de conferências da ASCE (Association Structural Civil Engineering) sobre computação eletrônica, especificamente as três primeiras conferências (ASCE 1958 1960 1963).

Um dos problemas da utilização da análise matricial de estruturas é o de não ser possível a obtenção direta de esforços e deslocamentos em pontos internos da barra. O conhecimento dos deslocamentos é importante para que se possam ser traçados gráficos que ilustram a situação deformada da estrutura, o que permite analisar se certas respostas em termos de esforços são compatíveis com as deformações ilustradas no gráfico, e também pelo fato de que as normas de dimensionamento estruturais (NBR6118, 2014), (NBR 8800, 2008) tem limitações quanto a deslocamentos em vigas e pórticos, como o limite de utilização de serviço das edificações. Pode-se utilizar o Método dos Elementos Finitos (MEF) (ZIENKIEWICZ, TAYLOR 2000) para este fim, porém é necessário discretizar a estrutura em vários elementos, gerando uma matriz de rigidez maior, utilizando mais memória computacional. Há outras alternativas, como a construção de matrizes locais de transferência de deslocamentos e ações (GERE, WEAVER 1987) , como pode ser visto também em Orrata, Lima (2014), e também a utilização de funções de forma, representada por matrizes locais, para interpolar os deslocamentos da extremidade das barra para um ponto interno (MARTHA 2018). Para contornar este problema, nesse trabalho foi desenvolvida apenas uma única equação que considera todo o tipo de carregamento sobre a barra. Utiliza-se a equação da linha elástica da teoria de flexão de vigas e a equação da deformação axial de barras, que fornece, sem a necessidade da utilização de matrizes, os deslocamentos no ponto desejado no interior das barras. Essa formulação é utilizada no software PERT (Programa de Estruturas Reticuladas Total) (LEITE 2017), que calcula estruturas de barras reticuladas via Análise Matricial. O software possui interface gráfica de entrada e saída de dados, gerando gráficos de esforços e deslocamentos.

2. Desenvolvimento teórico

2.1 Equações diferenciais de deflexão

Para se escrever as equações de deslocamentos de pontos internos de uma barra, são necessárias a utilização de equações diferenciais de deslocamento axial e de vigas (BEER, JOHNSTON,

DeWOLF 2006). São admitidas as seguintes hipóteses: pequenas deformações, o comportamento puramente elástico do material, a seção transversal das vigas permaneça plana após a rotação da mesma e seção transversal constante das barras.

2.1.1 Deflexão em vigas

Considerando as hipóteses do item 2.1, têm-se as seguintes equações diferenciais para viga:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M \quad EI \frac{d^3v}{dx^3} = V \quad EI \frac{d^4v}{dx^4} = -q \tag{1}$$

Sendo I o momento de inércia, v o deslocamento vertical em vigas e q a taxa de carregamento transversal ao eixo da viga.

Para cada tipo de carregamento, devem ser analisadas as condições descritas na equação (1) e aplicar as condições de contorno. A ideia central neste trabalho foi considerar os deslocamentos globais nas extremidades da barra, somando-se aos deslocamentos causados pela carga atuante somente nesta barra, como mostra a Figura 1.

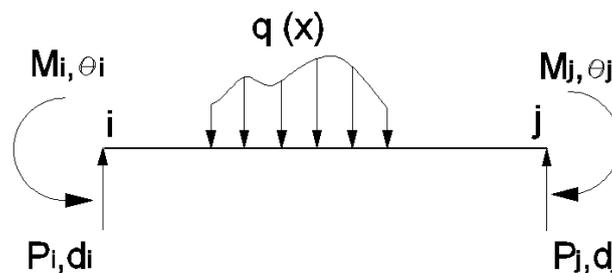


Figura 1 - Carregamento geral, deslocamentos na extremidade da barra e reações ao carregamento aplicado na barra.

Onde os termos Θ_i , Θ_j , d_i e d_j são as rotações e deslocamentos verticais globais, dos nós i e j , respectivamente. E os termos M_i , M_j , P_i e P_j são os momentos e forças verticais dos nós i e j , respectivamente, causados apenas pela carga $q(x)$, ilustrada na Figura 1. No caso de vigas, as orientações dos eixos locais das barras coincidem com os eixos globais da estrutura. A estrutura, carregamento e deslocamentos nos nós da Figura 1, podem ser divididos em duas partes:

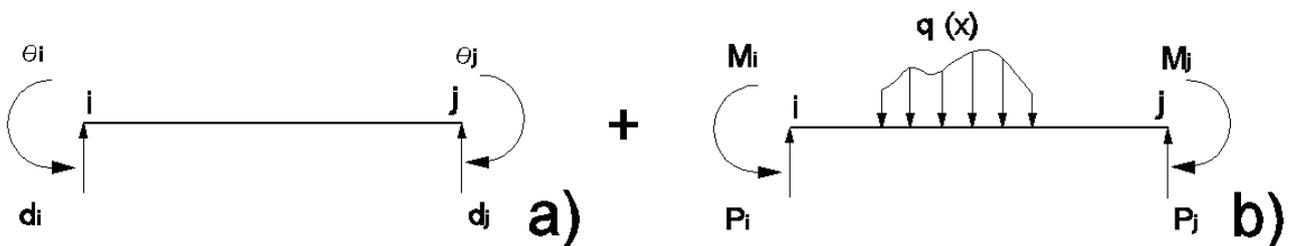


Figura 2: Divisão entre deslocamentos e carregamento em uma barra

Os vetores da Figura 2-a são os deslocamentos globais da estrutura, obtidos, enquanto na Figura 2-b aparecerá somente o carregamento na barra, sendo adotado deslocamento nulo em suas extremidades. Ao se integrar o último termo da equação (1), adotando neste caso o valor nulo da taxa de carregamento, tem-se a seguinte expressão para os deslocamentos ao longo da barra.

$$\frac{d^4v}{dx^4}EI = 0$$

$$\frac{dv}{dx}EI = C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

$$vEI = C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4 \tag{2}$$

onde C_i com $i=1,2,3,4$ são as constantes de integração, que com as condições de contorno impostas na Figura 2-a:

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dx} = \theta_i \\ v = d_i \end{cases} \quad x = L \rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dx} = \theta_j \\ v = d_j \end{cases} \tag{3}$$

Podem ser obtidas as constantes de integração da equação (2).

$$C_1 = EI \left[-\frac{12}{L^3}(d_j - d_i) + \frac{6}{L^2}(\theta_j - \theta_i) \right] \quad C_3 = EI\theta_i$$

$$C_2 = EI \left[\frac{6}{L^2}(d_j - d_i) - 2(\theta_j + 2\theta_i) \right] \quad C_4 = EId_i \tag{4}$$

Tem-se assim a equação de deslocamentos globais da barra em análise, sendo denominado de deslocamento externo da barra (v_{ext}):

$$v_{ext} = \frac{1}{EI} \left(C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4 \right) \tag{5}$$

O carregamento mostrado na Figura 2-b terá um papel específico na deformação desta barra, portanto, para se construir uma equação de deslocamentos para este carregamento, deve-se impor deslocamentos nulos nas extremidades, pois neste local os deslocamentos devem ser os mesmos da equação (3). Portanto, a barra deverá estar engastada em suas extremidades, e deverão ser consideradas as reações de apoio para esta de vinculação, segundo o tipo de carregamento aplicado. Para se ter uma visão prática, considerou-se neste trabalho que a barra esteja sujeita a uma carga uniformemente distribuída:

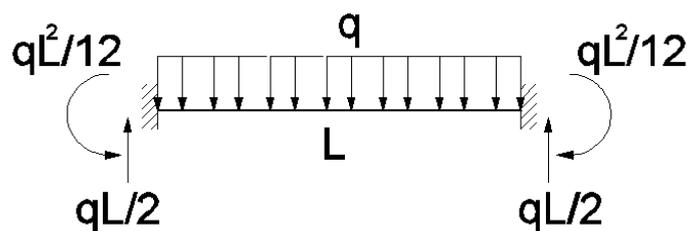


Figura 3 - Barra com carregamento uniformemente distribuído e engastado nas extremidades

Com a utilização das expressões da equação (1), e com as condições de contorno ilustradas na Figura 3, tem-se as equações de momento fletor na barra causadas pela carga distribuída.

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M = -\frac{qx^2}{2} + \frac{ql}{2}x + \frac{ql^2}{12} \quad (6)$$

Integrando a equação (6) duas vezes, e adotando as condições de contorno ilustradas na Figura 3, tem-se a seguinte equação de deslocamento deste carregamento para esta barra, que neste trabalho foi denominado como um deslocamento do carregamento na barra (v_{carr}):

$$v_{carr} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{qx^4}{24} + \frac{qlx^3}{12} + \frac{ql^2x^2}{24} \right) \quad (7)$$

Podem-se encontrar as equações de deslocamento para qualquer tipo de carregamento, sejam cargas distribuídas ou não e momentos concentrados. Se a barra possuir mais de um tipo de carregamento, as expressões de deslocamentos devem ser somadas. Somando-se as equações (5) e (7), tem-se uma equação geral de deslocamentos verticais em uma barra.

$$v = v_{ext} + v_{carr} \quad (8)$$

2.2 Equação de deslocamento linear axial de barras

Para se computar o deslocamento axial de barra, é necessário utilizar a equação de deformação para cargas axiais:

$$u = \frac{PL}{EA} \quad (9)$$

onde u e P são o deslocamento axial dos nós e o carregamento aplicado na direção axial da barra, respectivamente e A é a área da seção transversal da barra. Porém, há situações onde o esforço normal varia ao longo do comprimento da barra, como é caso de cargas distribuídas uniformemente e linearmente, não perpendiculares à barra. Neste caso é necessário fazer o incremento do acréscimo de esforços para cada trecho da barra analisado.

2.3 Rotação de eixos

As equações de (1) até (9) foram desenvolvidas segundo orientação dos eixos locais da barra, sendo que a direção do eixo x local é paralela ao comprimento da barra. Porém para estruturas como pórtico plano e grelhas, há necessidade da transformação do carregamento, que está orientado segundo os eixos globais, para a direção dos eixos locais (Figura 4), sendo que a diferença angular entre estes dois eixos é representado pela letra α .

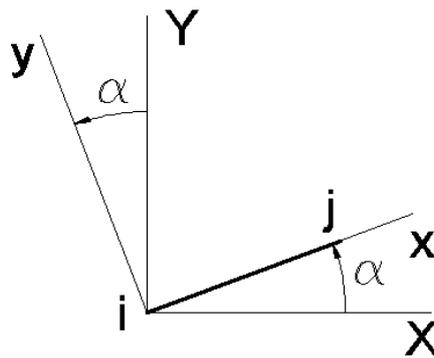


Figura 4 - Relação entre os eixos locais (barra) e globais

Os eixos globais são representados pelas letras maiúsculas, ou seja, X, Y e Z, enquanto que nos eixos locais, esta representação se dá por meio de letras minúsculas, ou seja, x, y e z. A matriz de rotação dos eixos globais para local para o carregamento, em estruturas bidimensionais, é dada por:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_X \\ q_Y \end{Bmatrix} \tag{10}$$

Para análise de pórticos espaciais, há a necessidade da transformação do carregamento orientado nos três eixos globais para os eixos locais e a matriz de rotação ne (GERE, WEAVER 1987):

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ R_4 & R_5 & R_6 \\ R_7 & R_8 & R_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_X \\ q_Y \\ q_Z \end{Bmatrix} \tag{11}$$

Após o cálculo dos deslocamentos (axiais e perpendiculares à direção do eixo y local) da barra, estes deslocamentos devem ser rotacionados para a direção global de cada ponto, sendo que para estruturas planas (pórtico plano e grelha), a matriz de rotação é dada por:

$$\begin{Bmatrix} u_X \\ v_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \end{Bmatrix} \tag{12}$$

E no caso de pórtico espacial:

$$\begin{Bmatrix} u_X \\ v_Y \\ w_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & R_4 & R_7 \\ R_2 & R_5 & R_8 \\ R_3 & R_6 & R_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ w_z \end{Bmatrix} \tag{13}$$

onde os termos R_i são encontrados em Gere e Weaver (1987). Após este processo, têm-se os deslocamentos segundo os eixos globais em cada ponto da barra, bastando somar estes deslocamentos

às coordenadas destes pontos, para que possa ser plotada a deformada da estrutura. O fluxograma da Figura 5 ilustra o processo:

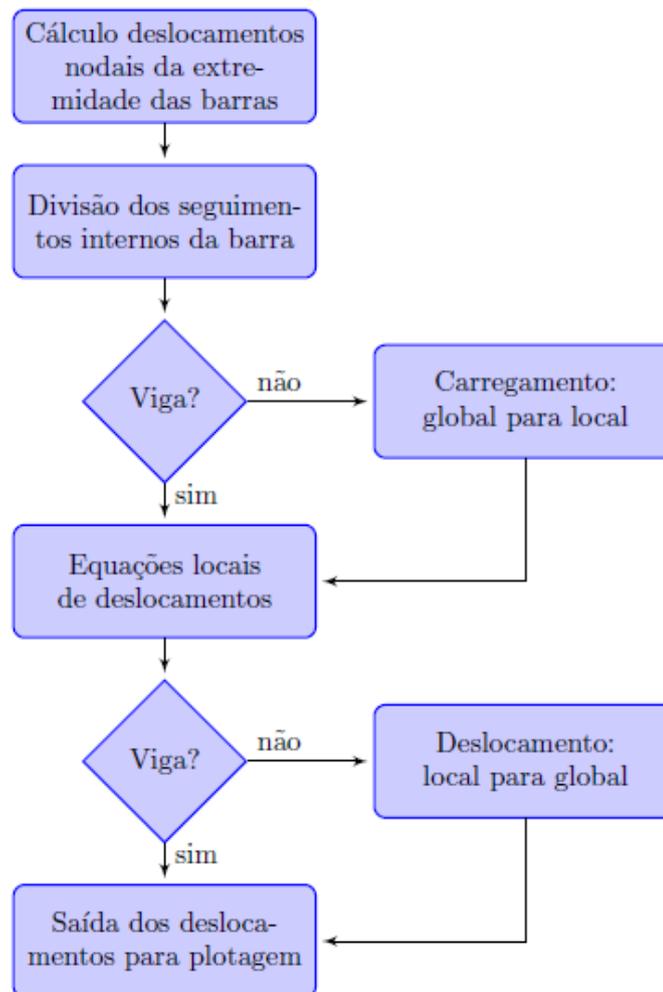


Figura 5 - Fluxograma de cálculo dos deslocamentos na barra

A aplicação desta formulação no software PERT foi feita pela divisão da barra em 100 partes, sendo que foi construído um vetor para armazenar os 100 dados de cada deslocamento desses pontos. Usa-se esse vetor para plotar a deformada de cada barra, sendo o vetor zerado e utilizado para a barra seguinte.

3 Aplicação numérica

Para este artigo foram selecionadas duas estruturas bidimensionais e outra tridimensional, que são uma viga contínua (GERE, WEAVER 1987), um pórtico plano e um espacial, respectivamente. Foi feita uma comparação entre o gráfico da estrutura deformada obtida no software PERT, que utiliza a formulação descrita neste trabalho, com a gerada pelo software ANSYS, sendo a análise deste último feita com a utilização do MEF. No caso da viga contínua, só foi feita a comparação de resultados de deslocamento em dois pontos internos às barras e comparada com a formulação de matrizes de transferência de deslocamentos (GERE, WEAVER 1987).

3.1 Viga contínua

A Figura 6 mostra a geometria e as condições de contorno de uma viga contínua (GERE e WEAVER, 1987).

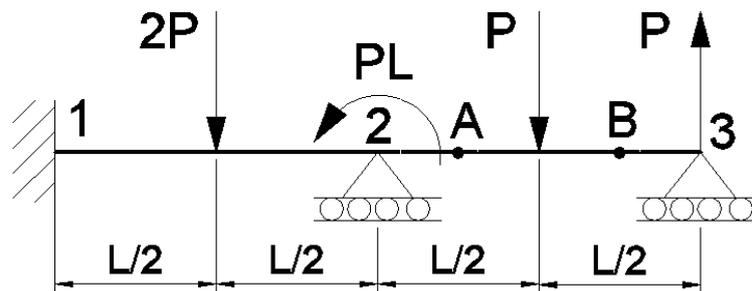


Figura 6 - Viga contínua: Geometria e condições de contorno

O comprimento L é igual a 4 metros, a carga P igual a 10kN, o módulo de elasticidade E é igual a 210GPa e a seção transversal das barras tem a dimensão de 20cm x 40cm. Os nós internos A e B estão a distância de $L/4$ e $3L/4$ do nó 2, respectivamente. A Figura 7 ilustra, ao final da análise elástica, a plotagem da deformada da estrutura. A estrutura foi discretizada no software PERT e em Gere e Weaver (1987) em duas barras e três nós, sendo adotado o modelo estrutural de viga contínua. Com as condições de contorno, a matriz de rigidez global tem a dimensão de 2x2 (duas linhas e duas colunas).

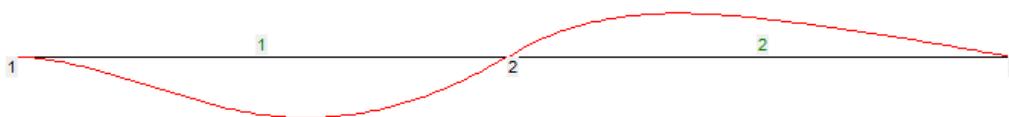


Figura 7 - Viga contínua: deformada

Os valores dos nós A e B são comparados com valores calculados por Gere e Weaver (1987), utilizando matrizes de transferência de deslocamentos.

Tabela 1 - Valores numéricos dos deslocamentos do nó A e B

Deslocamento linear em y (m)			
Nós	PERT	(Gere, Weaver)	Diferença (%)
A	$5,9523809 \times 10^{-5}$	$5,9523791 \times 10^{-5}$	$3,024 \times 10^{-5}$
B	$3,0824829 \times 10^{-5}$	$3,0824820 \times 10^{-5}$	$2,920 \times 10^{-5}$

3.2 Pórtico plano

A Figura 8 ilustra a geometria, as restrições de deslocamentos e o carregamento do pórtico plano:

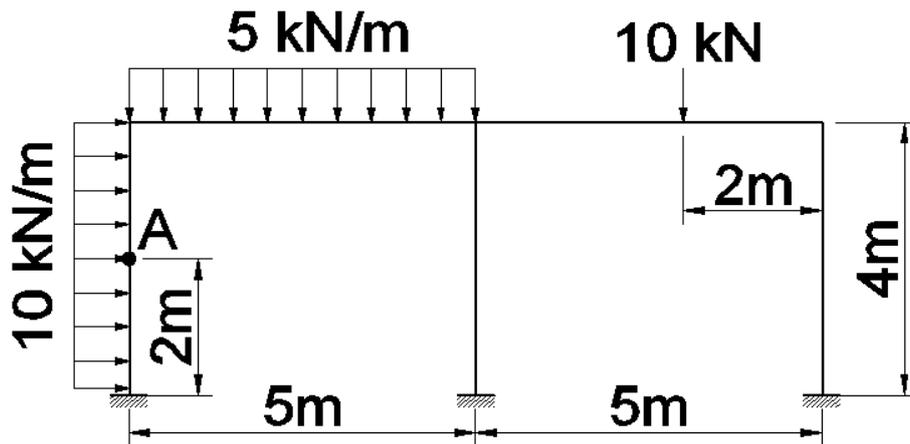


Figura 8 - Pórtico plano: geometria e condições de contorno

Cada barra tem seção transversal quadrada (40cm x 40cm) e o módulo de elasticidade é de $E=210\text{GPa}$, e os apoios são do 3º gênero (engaste). A estrutura foi discretizada no software PERT em 5 barras e 6 nós, sendo adotado o modelo estrutural de pórtico plano. Com esta discretização e considerando-se as restrições de apoio, tem-se uma matriz de rigidez global de dimensões 9x9 (nove linhas e nove colunas).

Na modelagem utilizada no software ANSYS, cada barra foi discretizada em 100 elementos finitos, perfazendo um total de 500 elementos e 501 nós. A matriz de rigidez global tem a dimensão de 1476x1476. Ao final da análise elástica, a Figura 9 ilustra a estrutura íntegra e deformada de ambas as análises:

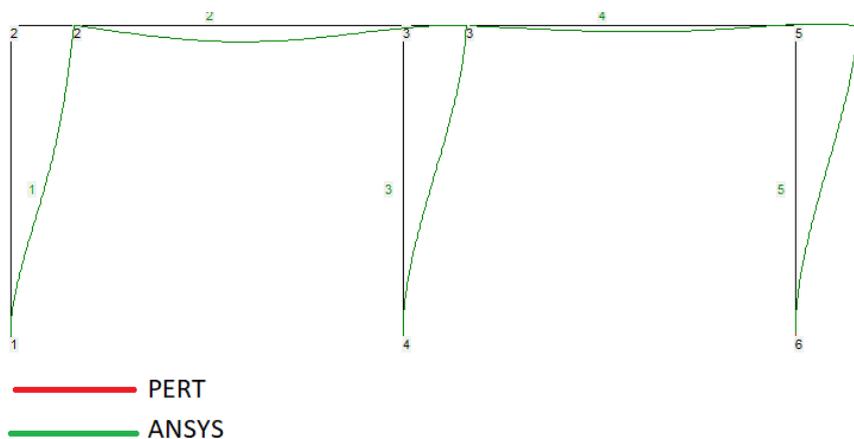


Figura 9 - Pórtico plano: deformada

Na Figura 9, os resultados dos deslocamentos entre os dois métodos são iguais, havendo uma sobreposição entre os dois gráficos. A Tabela 2 mostra os deslocamentos lineares do nó A, ilustrado na Figura 8:

Tabela 2 - Valores numéricos dos deslocamentos do nó A, pórtico plano

Deslocamento linear: nó A (m)			
	ANSYS	PERT	Diferença (%)
dir. x	$9,2030 \times 10^{-4}$	$9,2030 \times 10^{-4}$	0
dir. y	$-2,4171 \times 10^{-6}$	$-2,4171 \times 10^{-6}$	0

3.3 Pórtico espacial

Na Figura 10 pode ser visto a geometria da estrutura, as vinculações de apoio e o carregamento aplicado no pórtico espacial:

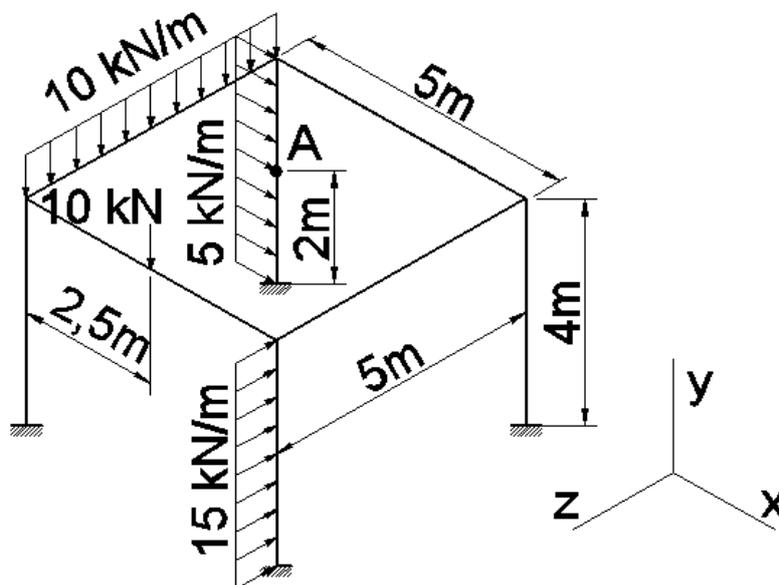


Figura 10 - Pórtico espacial: geometria e condições de contorno

Neste exemplo, cada barra tem uma seção transversal quadrada (40cm x 40cm), módulo de elasticidade $E=210\text{GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu=0,33$, e todos os apoios são de 3º gênero (engastados). No software PERT foi feita uma discretização da estrutura em 8 barras e oito nós, sendo adotado o modelo estrutural de pórtico espacial. Com esta discretização e o modelo estrutural proposto, tem-se uma matriz de rigidez global de 24×24 , já considerando as restrições de apoio. No software ANSYS, cada barra foi discretizada em 50 elementos finitos, perfazendo um total de 400 elementos e 400 nós e a matriz de rigidez global tem a dimensão de 2376×2376 (linhas x colunas). Ao final do processo de cálculo, no regime elástico, tem-se o gráfico da estrutura íntegra e deformada de ambas as análises (Figura 11).

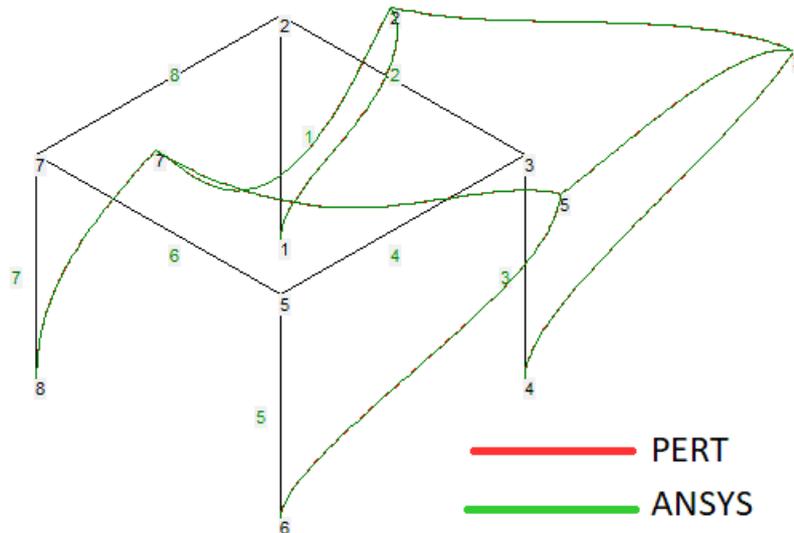


Figura 11 – Pórtico espacial: deformada

Na Figura 11 pode-se visualizar uma sobreposição entre os resultados das duas análises. A Tabela 3 mostra os deslocamentos lineares no ponto A ilustrado na Figura 11.

Tabela 3 - Valores numéricos dos deslocamentos do nó A, pórtico espacial

Deslocamento linear: nó A (m)			
	ANSYS	PERT	Diferença (%)
dir. x	$-1,5754 \times 10^{-6}$	$-1,5754 \times 10^{-6}$	0
dir. y	$-2,6015 \times 10^{-5}$	$-2,6015 \times 10^{-5}$	0
dir. z	$-3,6527 \times 10^{-5}$	$-3,6527 \times 10^{-5}$	0

4 Conclusão

Devido a confiabilidade já comprovada do software ANSYS, e também do método de matrizes de transferências locais de deslocamentos (GERE e WEAVER 1987), pode-se concluir que o método utilizado no software PERT se mostrou altamente preciso. Deve-se considerar que no método proposto neste trabalho, houve uma grande redução do tamanho da matriz de rigidez global da estrutura. Para estruturas maiores, esta redução acarreta uma grande redução no tempo de processamento e também na quantidade de memória utilizada, pois o processo de inversão de matriz necessita de uma grande utilização de memória e também um aumento do tempo de análise. Com a utilização da solução exata, para nós internos da barra, este cálculo é feito nó por nó da barra e não há a necessidade da criação e da inversão de matrizes, sendo assim, este processo requer pouca utilização de memória e gera uma diminuição no tempo de processamento.

Na plotagem da deformada da barra, utiliza-se um vetor de 100 posições para cada tipo de deslocamento, sendo que no caso mais complexo, que são os pórticos espaciais, utiliza-se 3 vetores de 100 posições, para os deslocamentos u, v e w, respectivamente. Com a utilização apenas desses vetores e com os resultados da análise matricial nas extremidades da barra, pode-se plotar toda a estrutura, ao contrário de uma formulação baseada no MEF, onde teria que se construir uma matriz de rigidez levando-se em conta vários pontos da barra, para se ter uma plotagem precisa.

É importante salientar que o mesmo procedimento pode ser efetuado com os esforços em pontos centrais da barra. Podendo-se obter os valores e desta forma traçar os diagramas de esforços, sendo esta formulação já utilizada no software PERT.

Referências

- ARGYRIS, J.H., KELSEY, S., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth Scientific Publications, London, 1960.
- ASCE, *Proceedings of the Conference on Electronic Computation*. Held in Kansas City, MO, 1958.
- _____, *Proceedings of the 2nd. of the Conference on Electronic Computation*. Held in Pittsburgh, PA, 1960.
- _____, *Proceedings of the 3rd. of the Conference on Electronic Computation*. Held in Boulder, CO, 1963.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **NBR 6118** – *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*, 238 pp., 2014.
- _____, *NBR 8800 – Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*, 237 pp., 2008.
- BEER, F.P., JOHNSTON Jr., E.R., DEWOLF, J.T., *Resistência dos Materiais*, 4^a Edição, McGraw Hill, São Paulo, SP, 2006.
- CASTIGLIANO, A., *Theorie de l'Equilibre des Systemes Elastiques*, Turin, 1879.
- CAYLEY, A., *A memoir on the Theory of Matrices*, Phil. Trans. , 148, 17-37, 1857.
- CROSS, H. *Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments*. Trans. ASCE, 96,1-10, 1932.
- GERE, J.M., WEAVER Jr., W. , *Análise de estruturas reticuladas*, Editora Guanabara, Rio de Janeiro, RJ, 1987.
- LEITE, L.G.S.. *PERT - Programa de Estruturas Reticuladas Total*. UFTM, Universidade Federal do Triângulo Mineiro (Uberaba-MG) ,Registro de software n°: BR 51 201000585-0, 13 julho de 2017.
- MANEY, G.B., *Studies in Engineering – No.1.* , University of Minnesota, Minneapolis, 1915.
- MARTHA, L.F. . *Análise matricial de estruturas com orientação a objetos*. Editora PUC Rio, Elsevier. Rio de Janeiro, 2018.
- MAXWELL, J.C., *On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames*, Phil. Mag (4), 27, 294, 1864.
- MOHR, O., *Beitrag zur Theorie der Holz-und Eisen Konstruktionen*, Zeit des Architekten und Ingenieur Verienes zu Hannover, 1868.
- ORRATA, W.F.H. LIMA, S.S., *Matrizes de Transferência de Forças e Deslocamentos para Seções Intermediárias de Elementos de Barra*, Engenharia Estudo e Pesquisa – ABPE, v. 14 - n. 2 - p. 46-53 - jul./dez. 2014 .
- OSTENFELD, A., *Die Deformationsmethode*, Springer-Verlag OHG, Berlin, 1926.
- TURNER, M.J., CLOUGH, R, MARTIN, H., TOPP, L., *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, J. Aero Sci. (23), 9, 805-823, 1956.
- ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., *The Finite Element Method – The basis.*, Fifth Edition, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.