

MODELAGEM PARA SIMULAÇÃO E ANÁLISE NUMÉRICA DO FENÔMENO *STICK-SLIP* EM FREIOS A DISCO

Gabriel Rodrigues Nobre Dalto (Laboratório de Vibrações - UFC) E-mail: nobredalto@gmail.com

Rômulo do Nascimento Rodrigues (Laboratório de Vibrações - UFC) E-mail: rodrigues@ufc.br

Roberto de Araujo Bezerra (Laboratório de Vibrações - UFC) E-mail: roberto.bezerra@ufc.com

Pierre Lamary (Laboratório de Vibrações - UFC) E-mail: pierre.lamary@ufc.br

Resumo: O fenômeno tribológico *stick-slip* consiste em um mecanismo de geração de ruídos presente em freios a disco e o estudo de sua ocorrência é de suma importância para a melhoria do conforto de motoristas e passageiros. Apesar de variados modelos estarem presentes na literatura, não há um consenso sobre qual modelo é mais próximo de sistemas de freios reais. O presente trabalho é baseado no modelo massa-mola de um grau de liberdade, relacionando este com diferentes modelos de transição entre coeficientes de atrito estático e dinâmico, dependendo da velocidade relativa entre as superfícies. Desta forma, este trabalho contribui para essa discussão simulando variados modelos de transição entre coeficientes de atrito, por meio da simulação, avaliando a influência dos parâmetros relacionados e confrontando as simulações com dados experimentais encontrados na literatura. Os resultados das simulações apontam as diferenças entre os comportamentos dos modelos numéricos. A análise das propriedades indica que o fenômeno *stick-slip* é amenizado pelos aumentos de velocidade e de rigidez e pelas reduções de massa e de diferença entre coeficientes de atrito. Já o estudo de fatores de forma aponta que transições com menores descontinuidades e com decaimentos muito abruptos ou muito suaves também contribuem para a menor ocorrência do fenômeno. Enquanto a comparação das simulações com dados experimentais sugere que para determinadas condições diferentes modelos fornecem resultados mais aproximados.

Palavras-chave: *Stick-slip*. Simulação. Freios a disco.

MODELING FOR SIMULATION AND NUMERICAL ANALYSIS OF THE *STICK-SLIP* PHENOMENON IN DISC BRAKES

Abstract: The stick-slip tribological phenomenon consists of a noise generation mechanism present in disc brakes and the study of its occurrence is extremely important to improve the comfort of drivers and passengers. Although several models are present in the literature, there is no consensus on which model is closest to real brake systems. The present work is based on the mass-spring model of a degree of freedom, relating it to different transition models between static and dynamic friction coefficients, depending on the relative speed between the surfaces. Thus, this work contributes to this discussion by simulating various transition models between friction coefficients, through the simulation, evaluating the influence of related parameters and comparing the simulations with experimental data found in the literature. The results of the simulations point out the differences between the behavior of the numerical models. The analysis of properties indicates that the stick-slip phenomenon is mitigated by increases in speed and stiffness and by reductions in mass and difference between friction coefficients. The study of form factors points out that transitions with less discontinuities and with very abrupt or very smooth decays also contribute to the less occurrence of the phenomenon. While the comparison of simulations with experimental data suggests that for certain conditions, different models provide more approximate results.

Keywords: Stick-slip. Simulation. Disc Brake

1. Introdução

O sistema de freios é um conjunto complexo de componentes estritamente necessários para a utilização de qualquer automóvel. Com os avanços tecnológicos e de engenharia de materiais, freios automotivos se tornaram sofisticados e de alta eficiência, porém ainda existem lacunas no conhecimento que são possibilidades de melhorias, como ruídos

durante a frenagem. O sistema de freios ideal transforma, por meio do atrito, toda energia cinética do carro em energia térmica, armazenando-a em si e então a dissipando. Todavia parte da energia total do sistema é transformada em outros tipos de energia, como, por exemplo, energia vibracional que pode ser, conseqüentemente, dissipada em vibrações acústicas, ou seja, ruídos. Existe na literatura cerca de 25 diferentes designações relacionadas aos ruídos e vibrações em freios.(AKAY,2002; BARTON E FIELDHOUSE,2018).

Akay (2002) argumenta que mesmo em um freio idealizado em que as pastilhas e o disco de freio possuem geometrias perfeitas, a carga normal e o coeficiente de atrito são constantes e a distribuição de forças normal e tangencial é uniforme, o movimento relativo entre as superfícies causa distorções à distribuição de forças, gerando vibrações no plano, as deformações nas superfícies alteram a área de contato e força de atrito causa um momento nas pastilhas, levando a oscilações relativas à pinça que as suporta. Estes são alguns dos possíveis mecanismos de geração de ruídos. Diferentes tipos de vibração em sistemas de freios podem ter diferentes origens. Elmaianet al. (2013) conclui que dos estudos realizados sobre ruídos induzidos por atrito tem-se três principais mecanismos excitadores de vibrações: *stick-slip*, *sprag-slip* e instabilidades de acoplamento modal.

O fenômeno *stick-slip* é considerado um dos mecanismos mais importantes de geração de vibrações autoexcitadas – conseqüentemente de ruídos – e, portanto, um dos mais estudados, tendo vários ruídos em sistemas de freios atribuídos a este fenômeno, como, por exemplo, o *creepgroan* e o *brake squeal*, além de fenômenos corriqueiros como o rangido de dobradiças não lubrificadas de uma porta ou de giz contra um quadro negro ou ainda o som de um violino produzido por meio de um arco friccionado contra suas cordas (DENNY, 2004). Desta forma, faz-se necessária a investigação profunda deste fenômeno para que seja amenizado já na fase de projeto do sistema de freios. Há diversos estudos sobre o assunto, porém não existe consenso sobre o modelo matemático que mais se aproxima do comportamento real, devido à complexidade deste fenômeno tribológico.

2. Modelo de estudo para o fenômeno Stick-Slip

O atrito seco caracteriza-se por dois estados distintos: uma resistência à saída de um equilíbrio inercial, chamado *stick*, e uma resistência contra um movimento existente, conhecido como *slip*. Cada uma dessas fases de movimento apresenta valores diferentes de coeficiente de atrito, somado ao fato de que em um movimento oscilatório estes dois estados acontecem sucessivamente formando um ciclo, tem-se o surgimento do fenômeno *stick-slip* (POPP e STELTER, 1990). Encontra-se na literatura diversos modelos para o estudo do *stick-slip*, como Popp e Stelter (1990) que analisam modelos contínuos e discretos de um ou dois graus de liberdade, ou como Bermanet al. (1996) que estudam a influência da rugosidade das superfícies, da distância percorrida e da velocidade na ocorrência do *stick-slip*.

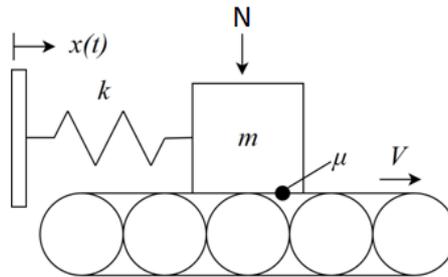


Figura 1 – Modelo Stick-Slip com um grau de liberdade

O modelo discreto de um grau de liberdade, apresentado na Figura 1, consiste em um sistema massa-mola sem amortecimento em que a massa m , representando uma pastilha de freio, está apoiada em uma esteira, ou cinta, representando o disco de freio, com coeficiente de atrito μ , força normal N e que assume uma velocidade constante V , fornecendo energia para o sistema, enquanto a posição é definida por $x(t)$.

$$F_{mola} = kx \quad \text{Eq.(1)}$$

$$F_{atrito} = \mu_s N \quad \text{Eq.(2)}$$

$$x_0 = \frac{\mu_s N}{k} \quad \text{Eq.(3)}$$

Considerando que inicialmente o sistema encontra-se em repouso e a mola de constante k não distendida, inicia-se o movimento da cinta à velocidade constante e a massa à acompanha devido ao atrito estático com velocidade relativa nula – fase *stick* – até um ponto x_0 em que a força elástica da mola F_{mola} distendida (Equação 1) se igualará a força de atrito (Equação 2), o que resulta na Equação 3, onde ao superá-la faz com que a massa deslize – fase *slip* – no sentido contrário ao movimento inicial (SUETTI, 2011).

A velocidade relativa v_{rel} entre a massa e a esteira (Equação 4) em que V é a velocidade da esteira e \dot{x} é a velocidade instantânea da massa – altera o coeficiente de atrito e, conseqüentemente, a força de atrito, tem-se assim uma variação no comportamento do sistema. A fase *slip* ocorre até o momento em que a força de atrito vence a força da mola e a massa adere novamente à cinta, assumindo uma velocidade relativa nula e assim retornando à fase *stick*, na qual o coeficiente de atrito sofre outra alteração e o ciclo *stick-slip* se repete.

$$v_{rel} = V - \dot{x} \quad \text{Eq.(4)}$$

Uma vez que a velocidade da massa não ultrapassa a da esteira, a velocidade não se torna negativa em nenhum momento, a força de atrito não muda de direção. Este sistema tem o movimento governado pela Equação 5. (KANGET AL.,2009):

$$m\ddot{x} + kx = F. \quad \text{Eq.(5)}$$

Neste modelo, por considerar um movimento exclusivamente horizontal, é possível inferir que a força normal depende apenas da massa e da gravidade, assim tem-se a Equação 6:

$$N = mg. \quad \text{Eq. (6)}$$

A solução para a Equação 5, ou seja, a equação que descreve a posição x da massa ao longo do tempo é dada pela Equação 7 e sua derivada (Equação 8) define a velocidade \dot{x} da massa em função do tempo.

$$x(t) = A \text{sen}(\omega t + \varphi) + C \quad \text{Eq.(7)}$$

$$\dot{x}(t) = A \omega \text{cos}(\omega t + \varphi) \quad \text{Eq. (8)}$$

Considerando uma força de atrito dinâmico constante, ou seja, transição de coeficientes de atrito instantânea, é possível determinar a constante de integração C , como mostra a Equação 9, a partir do equilíbrio entre a força da mola e a força de atrito cinético (SUETTI, 2011).

$$C = \frac{\mu_k N}{k} \quad \text{Eq. (9)}$$

Por meio da solução matemática das Equações 5, 7 e 8 é possível extrair a frequência natural angular ω do sistema (Equação 10), o ângulo de fase φ (Equação 11) e a amplitude de vibração (Equação 12).

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Eq. (10)}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{N(\mu_s - \mu_k)\omega}{V k} \right) \quad \text{Eq.(11)}$$

$$A = \frac{N(\mu_s - \mu_k)}{k \text{sen } \varphi} \quad \text{Eq.(12)}$$

3. Metodologia

Para a realização da simulação, foi escolhido o modelo massa-mola de um grau de liberdade para a representação física e os diferentes modelos de transição entre os coeficientes de atrito, foram simulados na ferramenta Simulink® que trata-se de um *software* que tem como principal aplicação modelagem, simulação e análise de sistemas dinâmicos, sendo muito utilizado para controle de sistemas embarcados.

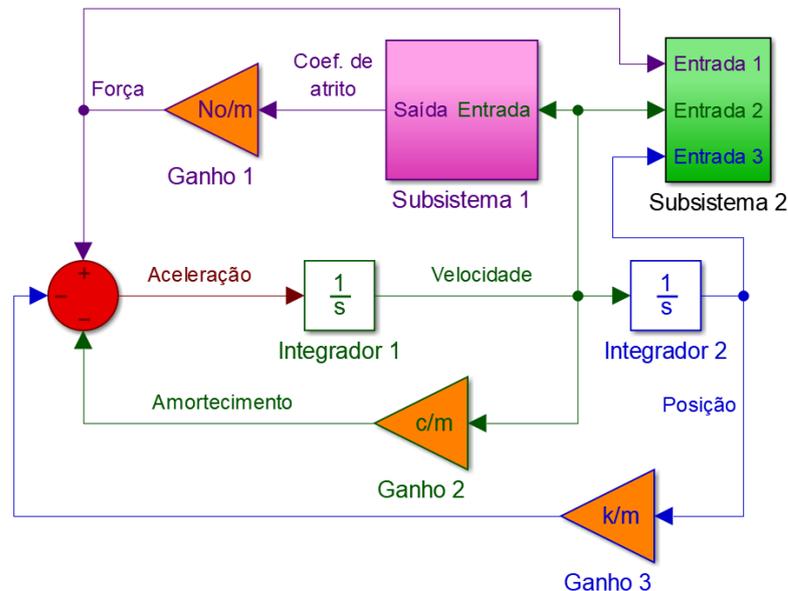


Figura 2 – Sistema gráfico da simulação

Um sistema gráfico de simulação (Figura 2) foi desenvolvido para a resolução, não apenas da Equação 5 que considera apenas um sistema massa-mola, mas para considerar também um sistema que inclui um possível amortecedor com coeficiente de amortecimento c .

Toda a rotina responsável pelo cálculo do coeficiente de atrito instantâneo foi englobada no Subsistema 1, enquanto os blocos de geração de gráficos relacionados a posição, velocidade e força foram incluídos no Subsistema 2. Desta forma a Equação 5 precisa incluir um elemento de amortecimento relacionado à velocidade, tomando a seguinte forma apresentada pela Equação 13:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad \text{Eq.(13)}$$

Para resolver uma equação diferencial utilizando o Simulink[®] é necessário isolar o elemento diferencial de maior ordem para que este seja integrado quantas vezes forem necessárias, portanto a Equação 14 representa a Equação 13 com as manipulações algébricas necessárias para sua aplicação.

$$\ddot{x} = \frac{N}{m}\mu - \frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x \quad \text{Eq.(14)}$$

Desta perspectiva é possível perceber os passos de integração necessários para configurar o sistema gráfico, pois a soma dos três fatores da Equação 14 resulta na segunda derivada da posição em função do tempo, ou seja, a aceleração. Da integração da aceleração obtêm-se a primeira derivada de x que consiste na velocidade e tanto o fator de amortecimento quanto o coeficiente de atrito dependem desta. A segunda integração resulta na própria posição e assim o ciclo para a programação do sistema é estabelecido.

Para a simulação foram variados propriedades do sistema como massa, rigidez do sistema, velocidade e também foram variados os coeficientes de atrito. Para o coeficiente de atrito foram usados alguns modelos matemáticos de comportamento do atrito: Modelo de transição instantânea entre coeficientes de atrito (Equação 15), Modelo de transição linear entre coeficientes de atrito (Equação 16), Modelo de transição exponencial entre coeficientes de atrito (Equação 17), Modelo de transição contínua entre coeficientes de atrito de um fator de forma (Equação 18) e Modelo de transição contínua entre coeficientes de atrito de dois fatores de forma (Equação 19) (SUETTI, 2011; DENNY,2004; KANG ET AL.,2009).

$$\begin{cases} F = \mu_s N, & v_{rel} = 0 \\ F = \mu_k N, & v_{rel} \neq 0 \end{cases} \quad \text{Eq.(15)}$$

$$\mu(v_{rel}) = \mu_k + \frac{(\mu_s - \mu_k) - (h - v_{rel})}{h} \quad \text{Eq.(16)}$$

$$\mu(v_{rel}) = \mu_k + (\mu_s - \mu_k)e^{-h v_{rel}} \quad \text{Eq.(17)}$$

$$\mu(v_{rel}) = \left(2\sqrt{\mu_s(\mu_s - \mu_k)} + \frac{\mu_k m g v_{rel}}{h}\right) \left(\frac{v_{rel}/h}{1+(v_{rel}/h)^2}\right) \left(\frac{1}{m g}\right) \quad \text{Eq. (18)}$$

$$\mu(v_{rel}) = (1 - e^{-d|v_{rel}|})(\mu_k - (\mu_s - \mu_k)e^{-h|v_{rel}|}) \quad \text{Eq.(19)}$$

A Figura 3 mostra os blocos do Subsistema 1, onde a entrada do subsistema, a velocidade \dot{x} indicada pela cor verde da seta, é subtraída da velocidade da cinta V resultando na velocidade relativa v_{rel} . O sinal então passa por um filtro de saturação, cujo qual é responsável por impor o limite inferior igual a zero, representando a limitação física da velocidade, uma vez que a velocidade da massa não pode ultrapassar a velocidade da cinta. A velocidade relativa, indicada pelas setas marrons, é a entrada do bloco retangular

magenta. Nele está contida a equação que governa o comportamento do coeficiente de atrito em função da velocidade relativa. Esta equação, como já visto anteriormente, será ajustada de acordo com o modelo de transição entre coeficientes de atrito desejado (Equações 15,16,17,18 e 19).

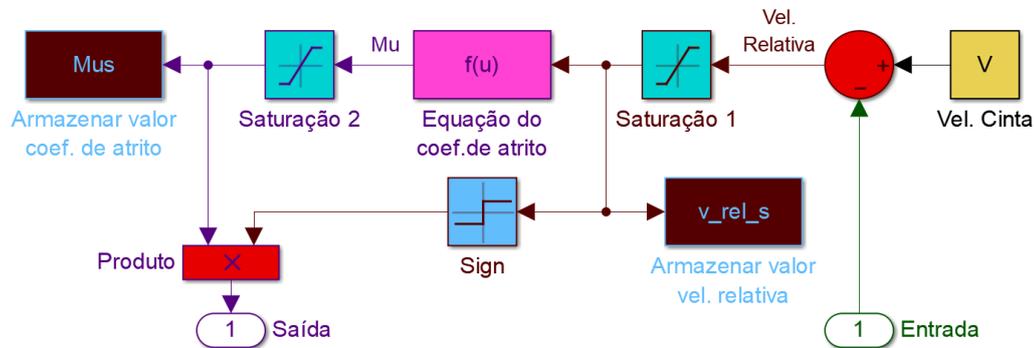


Figura 3 – Subsistema 1

Então o sinal passa pela Saturação 2, necessária para o equacionamento de transição linear entre coeficientes de atrito, uma vez que a Equação 15 define apenas a inclinação da reta na qual a variação acontece, porém não há uma limitação inferior em si própria, logo, sem a saturação, o coeficiente de atrito decairia indefinidamente. Em seguida o valor instantâneo de μ é armazenado por meio do bloco marrom com contorno azul claro, assim como a v_{rel} , para possibilitar a análise ponto a ponto de suas variações ao longo do tempo.

Além disso, o valor do coeficiente de atrito é multiplicado pelo resultado da velocidade de atrito filtrada pela função sinal, na qual recebe um valor de entrada e dá como saída os valores 1, caso a entrada seja positiva, 0, caso o número seja nulo, ou -1, caso a entrada seja negativa. Este passo tem a função de garantir o bom funcionamento do sistema. Previamente ao início da simulação por meio do sistema gráfico é necessário o carregamento dos valores das constantes utilizadas no sistema. Por comodidade utiliza-se um código auxiliar que define as constantes e atribui seus valores de maneira ao sistema possa pegar tais valores e realizar a simulação.

4. Resultados e Discussões

A primeira etapa de simulação foi realizada com o intuito de observar a influência das propriedades físicas e utilizou-se para essa etapa apenas o modelo de transição instantânea (Equação 15). No equacionamento do modelo de transição instantânea não há a presença de fatores de forma, apenas as propriedades físicas do sistema, como velocidade da cinta, rigidez da estrutura, massa e gravidade, além dos valores dos coeficientes de atrito estático e dinâmico estão presentes. Os gráficos a seguir mostram velocidade por deslocamento sobrepostos de modo a facilitar a visualização das fases *stick* e *slip* e o comportamento dos resultados com a variação dos parâmetros.

Na Figura 4a os diagramas de fase diferem no valor do coeficiente de atrito estático, em que μ_s assume os valores de 0.4, 0.5 e 0.6, respectivamente com as linhas das cores magenta, ciano e marrom. As variáveis restantes tem os seguintes valores: $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $m = 1 \text{ kg}$, $\mu_k = 0.3$, $V = 1 \text{ m/s}$ e $k = 50 \text{ N/m}$. Com o aumento da diferença entre coeficientes de atrito, observa-se na Figura 4a, crescentes amplitudes de deslocamento e de velocidade, influenciando também no fenômeno *stick-slip* de forma a aumentar a fase

stick, portanto, quanto maior a diferença entre os coeficientes de atrito estático e dinâmico maior a ocorrência do *stick-slip*.

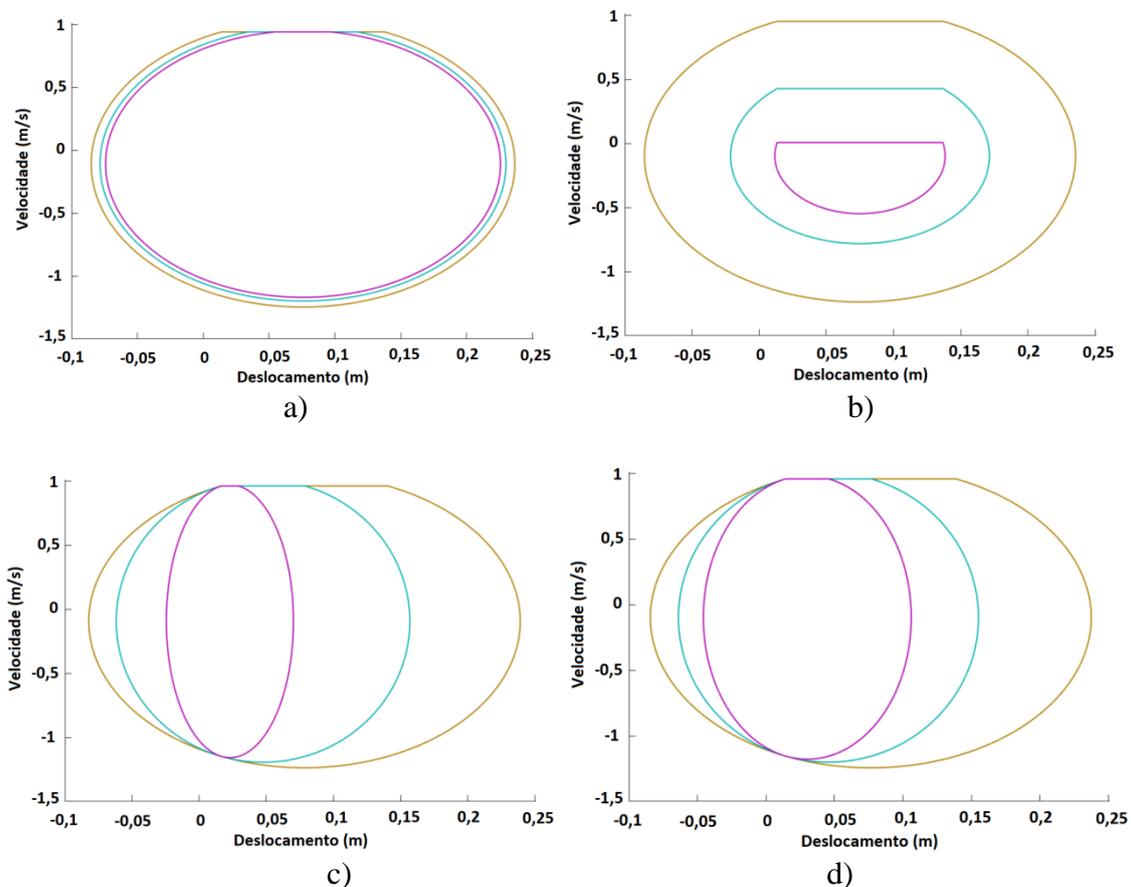


Figura 4 – Diagramas de fase do modelo de transição instantânea. a) Influência da diferença entre coeficientes de atrito. b) Influência da velocidade. c) Influência da massa. d) Influência da rigidez

Na Figura 4b estão expostos respectivamente os diagramas de fase que a velocidade da cinta é a propriedade variante, onde V assume os valores 0.1, 0.5 e 1.0 m/s representados pelas cores magenta, ciano e marrom, respectivamente. As outras variáveis têm os valores a seguir: $k = 50$ N/m, $\mu_s = 0.6$, $\mu_k = 0.3$, $g = 9.81$ m/s² e $m = 1$ kg. Constata-se que na medida em que a velocidade da cinta decresce, o limite da velocidade alcançada pela massa também diminui, pois a cinta impõe esta limitação física, além da redução também na amplitude de deslocamento. Ademais, é observado um aumento na fase *stick* quando comparada sua proporção à fase *slip*, portanto, quanto menor a velocidade maior a ocorrência de *stick*. Em contraste, o sistema tende a apresentar apenas a fase *slip* a medida que a velocidade aumenta.

A Figura 4c apresenta os diagramas de fase sobrepostos quando variada a massa do sistema, em que m assume os valores 0.1, 0.5 e 1.0 kg representados respectivamente pelas cores magenta, ciano e marrom. As variáveis restantes têm os seguintes valores: $k = 50$ N/m, $\mu_s = 0.6$, $\mu_k = 0.3$, $g = 9.81$ m/s² e $V = 1$ m/s. Neste caso, nota-se que a amplitude de vibração é a característica mais afetada com a variação do valor da massa, impactando diretamente o fenômeno *stick-slip*. Pelo gráfico pode ser inferido que a fase *stick* é mitigada com a redução da massa.

Por último, na Figura 4d apresenta os diagramas de fase para valores de rigidez variados, em que a constante k assume valores de 50, 100 e 200 N/m representados pelas cores marrom, ciano e magenta, respectivamente. As outras variáveis são mantidas com os seguintes valores: $\mu_s = 0.6$, $\mu_k = 0.3$, $m = 1$ kg, $g = 9.81$ m/s² e $V = 1$ m/s. Nestas condições é possível avaliar que a rigidez tem grande influência na amplitude de vibração, assim como a massa, entretanto de maneira inversamente proporcional. Este efeito impacta diretamente a duração da fase *stick*. Assim, quanto maior o valor da rigidez do sistema menor a ocorrência do fenômeno *stick-slip*, tendendo a acontecer apenas a fase *slip*. As tendências de mudança de comportamento observadas com a alteração das propriedades físicas são semelhantes para todos os modelos de transição (Equações 15,16,17,18 e 19) entre coeficientes de atrito. Desta forma, não se faz necessário o mesmo estudo para cada modelo. Assim prossegue-se com a análise da influência dos fatores de forma para os modelos de transição que os possuem no equacionamento.

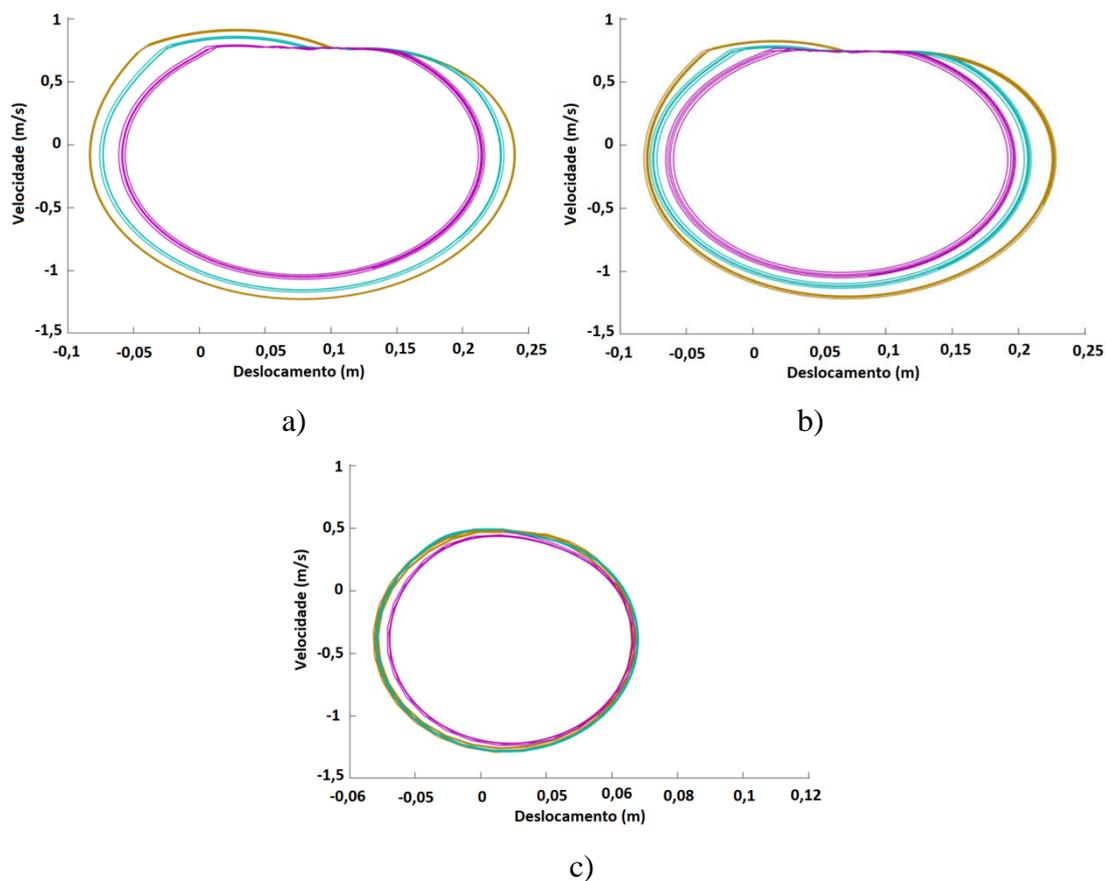


Figura 5 – Diagramas de fase dos modelos de transição. a) Influência do fator de forma para o modelo de transição linear. b) Influência do fator de forma para o modelo de transição exponencial. c) Influência do fator de forma para o modelo de transição contínua de um fator.

A Figuras 5a apresenta os diagramas de fase sobrepostos para o modelo de transição linear entre coeficientes de atrito com diferentes valores do fator de forma em que h assume os valores 0.1, 0.5 e 1.5, representados pelas linhas das cores magenta, ciano e marrom, respectivamente. Enquanto as variáveis restantes foram mantidas com os seguintes valores: $k = 50$ N/m, $\mu_s = 0.6$, $\mu_k = 0.3$, $m = 1$ kg, $g = 9.81$ m/s² e $V = 1$ m/s. A fase *stick*

não se apresenta como uma reta, diferindo do previsto pela fundamentação teórica e pelo modelo de transição instantânea. De fato, há uma região da fase *stick* que se aproxima de uma reta, entretanto o início desta fase se dá com a velocidade da massa ultrapassando e então retornando à velocidade da cinta, indicando a necessidade de aperfeiçoamento das considerações teóricas. Neste caso, quanto maior o valor do fator de forma, mais suave a transição entre coeficientes de atrito e mais a velocidade da massa supera e flutua em torno da velocidade da cinta.

A influência do fator de forma para o modelo de transição exponencial é demonstrada na Figura 5b onde foram variados os valores de h que assumiu os valores 1, 10 e 50, representados pelas linhas das cores marrom, ciano e magenta, respectivamente. Enquanto as variáveis restantes foram mantidas com os seguintes valores: $k = 50$ N/m, $\mu_s = 0.6$, $\mu_k = 0.3$, $m = 1$ kg, $g = 9.81$ m/s² e $V = 1$ m/s. Comparando a Figura 5a com a Figura 5b não se percebe uma variação significativa no comportamento do sistema, apenas a amplitude de deslocamento é reduzida em relação ao modelo de decaimento linear, assim como a flutuação do valor da velocidade da massa acima da velocidade da cinta. Essa tendência de redução no movimento é observada mesmo no valor mais alto do fator de forma, este que faz com que o sistema se aproxime do modelo de transição instantânea.

Até o momento, foram utilizados nas simulações os mesmos valores para os parâmetros físicos do sistema, porém, o modelo de transição contínua de um fator de forma na prática tem o comportamento do coeficiente de atrito dependente de três constantes: o fator de forma, a massa e a gravidade. Desta maneira, considerando a gravidade invariável, faz-se necessário realizar as simulações com um valor otimizado para a massa de 0.1 kg. A Figura 5c apresenta os diagramas de fase para o modelo de transição exponencial onde o fator h assume os valores 0.25, 0.1 e 0.01, representados pelas linhas das cores magenta, ciano e marrom, respectivamente. Enquanto as variáveis restantes foram mantidas com os seguintes valores: $k = 50$ N/m, $\mu_s = 0.6$, $\mu_k = 0.3$, $g = 9.81$ m/s² e $V = 1$ m/s. Os resultados demonstram que os diagramas de fase resultantes destas simulações são semelhantes coincidindo em algumas regiões das linhas ciano e marrom. Percebe-se também que a fase *stick* é mais sutil quando comparada às simulações anteriores, sendo difícil distinguir as transições com a fase *slip*.

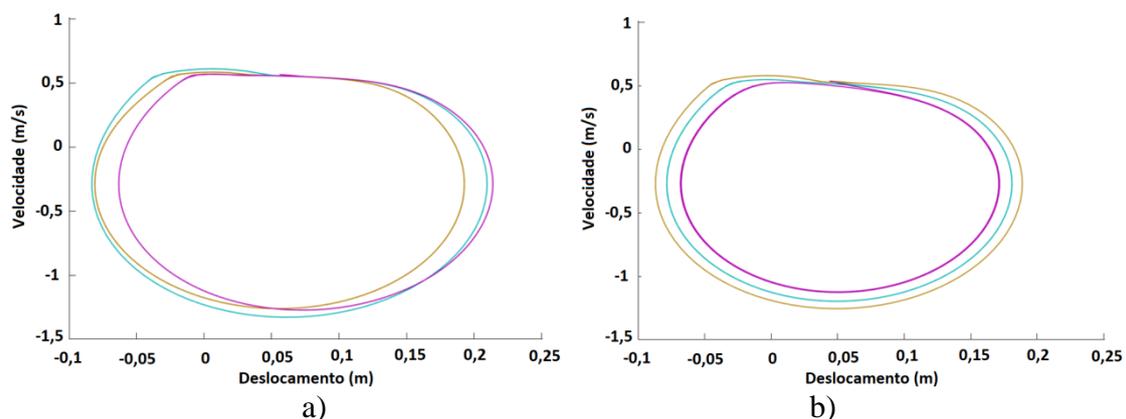


Figura 6 – Diagrama de fase para o modelo de transição contínua de dois fatores de forma. a) Variação do decaimento b) Variação da suavidade.

Como o modelo de transição contínua entre coeficientes de atrito dois fatores de forma possui uma constante que define suavidade da continuidade e outra que define o

decaimento da transição, faz-se necessária a análise de cada uma das duas propriedades separadamente. As Figuras 6a apresenta os diagramas de fase sobrepostos para o modelo em questão em que d é definido como 50, enquanto h assume os valores 0.5, 1 e 5, representados pelas linhas das cores magenta, ciano e marrom, respectivamente. Enquanto as variáveis restantes foram mantidas com os seguintes valores: $k = 50$ N/m, $\mu_s = 0.6$, $\mu_k = 0.3$, $m = 1$ kg, $g = 9.81$ m/s² e $V = 1$ m/s. Com análise dos diagramas de fase da Figura 6a pode-se observar que o decaimento de valor intermediário, de cor ciano, apresenta a maior extensão da fase *stick* em relação ao deslocamento e a maior flutuação de valor da velocidade da massa acima da velocidade da cinta. Isto se dá uma vez que, nestas condições, o coeficiente de atrito tem a maior de variação de valores na fase *slip* em relação às outras duas condições simuladas.

A Figuras 6b apresenta os diagramas de fase para o modelo de transição contínua entre coeficientes de atrito de dois fatores em que h é definido como 1, enquanto d assume os valores 10, 20 e 50, representados pelas linhas das cores magenta, ciano e marrom, respectivamente. Enquanto as variáveis restantes foram mantidas com os seguintes valores: $k = 50$ N/m, $\mu_s = 0.6$, $\mu_k = 0.3$, $m = 1$ kg, $g = 9.81$ m/s² e $V = 1$ m/s. A Figura expõe de maneira análoga o aumento das velocidades atingidas pelo sistema à medida que o fator de continuidade é elevado, além do crescimento da amplitude de vibração. Nota-se que a velocidade na curva magenta decai rapidamente no primeiro ciclo e, conseqüentemente, não apresentando o fenômeno *stick-slip*.

Todos esse resultados se mostraram muito eficientes no estudo do fenômeno *stick-slip*, bem como muito próximo de resultados de experimentos reais encontrados na literatura. Zhao (2018) apresenta dois experimentos para a avaliação do fenômeno *stick-slip*, como disposto na Figura 7, em que o primeiro teste consistiu em um sistema de freio simplificado – gráfico superior – e o segundo teste – gráfico inferior – se tratava de um freio a disco real. Para ambos os casos, tem-se gráficos de diagramas de fase variando a pressão de frenagem, medida em bar.

Como pode ser observado pelas legendas dos gráficos, as medições e unidades adotadas referem-se à rotação, diferindo da metodologia adotada no presente trabalho. Porém, com as medidas dos sistemas de freio e a posição dos instrumentos de medição, seria possível a conversão do ângulo e da velocidade de rotacionais para lineares. Todavia, percebe-se que o comportamento da fase *stick* varia para cada situação. Nota-se que os diagramas de fase de menores pressões de frenagem assemelham-se com os comportamentos apresentados pelos modelos de transição contínua entre coeficientes de atrito – Figuras 5c, 6a e 6b – enquanto à medida que a pressão é elevada, os diagramas tendem aos comportamentos dos modelos de transições linear e exponencial – Figuras 5a e 5b.

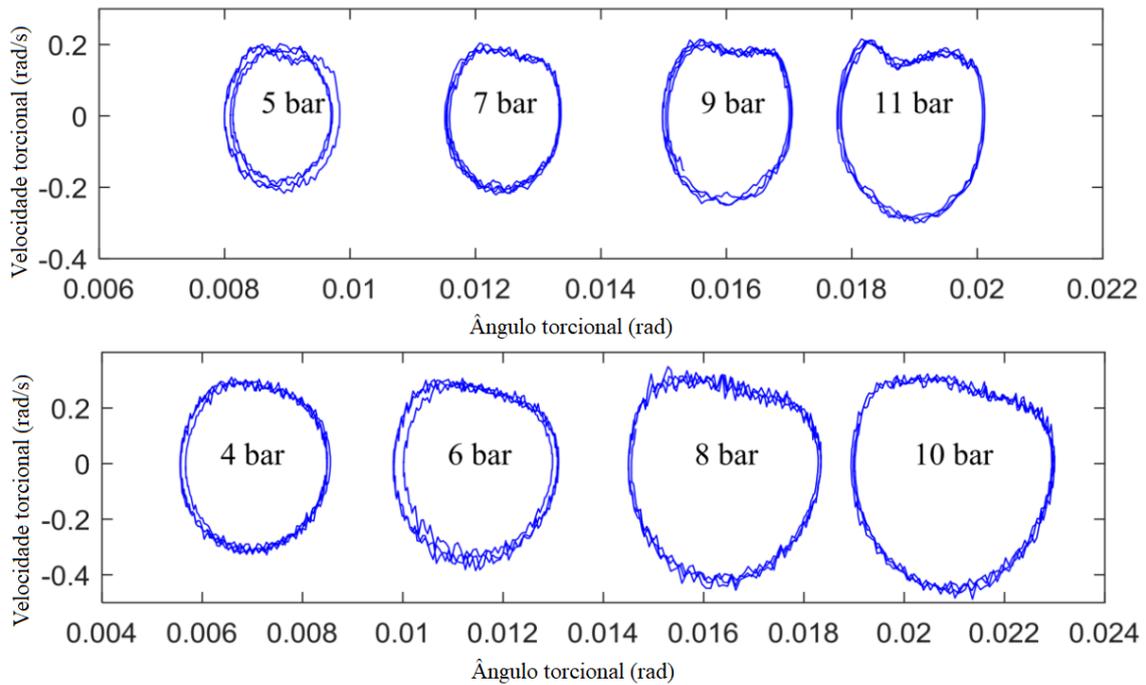


Figura 7 – Diagramas de fase adaptado de Zhao(2008)

5. Conclusões

O estudo da variação de parâmetros permitiu avaliar a influência de cada variável na ocorrência do fenômeno *stick-slip*. A partir do estudo de propriedades físicas pode-se concluir tendências: o aumento da diferença entre coeficientes de atrito estático e cinético contribui para o aumento da fase *stick*, já o aumento da velocidade da cinta e da rigidez, assim como a diminuição da massa mitigam a ocorrência do *stick-slip*. A análise da influência dos fatores de forma varia de acordo com cada modelo de transição entre coeficientes de atrito. A partir dos modelos de transição linear e exponencial tem-se que decaimentos mais abruptos contribuem para uma menor presença da fase *stick*.

O modelo de transição contínua de um fator de forma não apresenta claramente as mudanças entre as fases, além do comportamento do coeficiente de atrito ser dependente da força normal presente no sistema, o que limita sua aplicabilidade em diferentes condições. A partir da análise do modelo de transição contínua de dois fatores de forma pode-se concluir que tanto decaimentos muito abruptos como muito suaves apresentam resultados com menor ocorrência do fenômeno *stick-slip*, quando comparados a decaimentos intermediários, por apresentarem uma menor variação do valor do coeficiente de atrito, assim como transições com menor descontinuidade.

A comparação com dados experimentais presentes na literatura indica que situações distintas podem apresentar comportamentos variados e assim cada modelo avaliado neste trabalho tem aplicabilidades diferenciadas de acordo com as propriedades de cada sistema.

Referências

- AKAY, A.** *Acoustics of Friction*. Journal of Acoustical Society of America, 2002.
- BARTON, D. C; FIELDHOUSE, J. D.** *Automotive Chassis Engineering*. 1ed. Springer International Publishing, 2018.
- BERMAN, A. D; DUCKER, W. A. Ducker; ISRAELACHVILI J. N.** Origin and Characterization of Different Stick-Slip Friction Mechanisms. Langmuir, 1996.
- DENNY, M.** *Stick-slip motion: an important example of self-excited oscillation*. European Journal of Physics, 2004.
- ELMAIAN, A; GAUTIER, F; PEZERAT, C; DUFFAL, J. M.** *How can automotive friction-induced noises be related to physical mechanisms?* Applied Accoustics, 2013.
- KANG, J; KROUSGRILL, C. M; SADEGUI, F.** Oscillation pattern of stick-slip vibrations. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2009.
- POPP, K; STELTER, P.** *Stick-slip vibrations and chaos*. Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering, 1990.
- SUETTI, A. G. L.** *Estudo do fenômeno stick-slip aplicado às vibrações de freios automotivos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.
- ZHAO, X.** *Theoretical and experimental investigations of creep groan in automotive disk brakes*. Dissertação de Doutorado, Technischen Universität Berlin, Berlin, 2018.

ANEXO

Lista de Símbolos

k – Constante de rigidez da mola (N/m)	A – Amplitude de vibração
m – Massa do sistema (kg)	C – Constante de integração
c – Constante de amortecimento (Ns/m)	x - Deslocamento do sistema(m)
μ - Coeficiente de atrito	\dot{x} – Velocidade do sistema (m/s)
μ_s - Coeficiente de atrito estático	\ddot{x} – Aceleração do sistema (m/s ²)
μ_k - Coeficiente de atrito dinâmico	x_0 – Deslocamento inicial (m)
V – Velocidade da esteira (m/s)	v_{rel} - Velocidade relativa (m/s)
ω - Frequência natural do sistema (Hz)	h – Fator decaimento
N – Força normal (N)	d – Fator de suavidade
φ – Ângulo de Fase	