

ANÁLISE DE POTENCIAL DE UM SÓLIDO BIDIMENSIONAL UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

Flávia Gonçalves Fernandes (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – Campus Campos Belos) E-mail: flavia.fernandes92@gmail.com

Resumo: A solução de problemas em ciência e em engenharia passa por diversas etapas de simplificação. Entre elas está a proposição do modelo matemático aproximado, utilizando-se equações diferenciais. A escolha do método de solução destas equações diferenciais e a simplificação numérica através da discretização do problema. O método dos elementos de contorno é um dos métodos aproximados utilizados em ciência e em engenharia. Ele é aplicado na solução de equações diferenciais, onde estas são transformadas em equações integrais aplicadas ao contorno do problema. Este por sua vez é discretizado em elementos que podem ser, constantes lineares, quadráticos ou cúbicos. Este método aplica-se aos diferentes problemas em engenharia, tais como: mecânica da fratura, mecânica do contato, barreira acústica, proteção catódica (em casco de navios e torres de distribuição elétrica), e problemas de elasticidade. Nesta linha de raciocínio, o objetivo deste trabalho é a implementação de um programa para análise de potencial de um sólido bidimensional utilizando o Método de Elementos de Contorno.

Palavras-chave: discretização, método de elementos de contorno, modelo matemático.

POTENTIAL ANALYSIS OF A BIDIMENSIONAL SOLID USING THE CONTOUR ELEMENT METHOD

Abstract: Solving problems in science and engineering goes through several stages of simplification. Among them is the proposition of the approximate mathematical model, using differential equations. The choice of the solution method of these differential equations and the numerical simplification through the discretization of the problem. The contour element method is one of the rough methods used in science and engineering. It is applied in the solution of differential equations, where they are transformed into integral equations applied to the contour of the problem. This in turn is discretized in elements that can be, linear constants, quadratic or cubic. This method applies to different engineering problems, such as: fracture mechanics, contact mechanics, acoustic barriers, cathodic protection (in ships' hulls and electrical distribution towers), and elasticity problems. In this line of reasoning, the objective of this work is the implementation of a program for potential analysis of a two-dimensional solid using the Boundary Element Method.

Keywords: discretization, boundary element method, mathematical model.

1. Introdução

Grande parte dos problemas em engenharia apresenta complexidade na geometria do sólido ou é constituído de materiais cujas leis constitutivas são bastante complexas (ALIABADI, 2003). Assim sendo, as soluções analíticas dos mesmos, que correspondem às soluções exatas, são praticamente impossíveis de serem obtidas, sendo então necessário a obtenção de soluções aproximadas através de métodos numéricos, onde faz-se também simplificações nas leis constitutivas dos materiais e na geometria do sólido (ALVES, 2006).

Os métodos numéricos classicamente empregados, como ferramentas básicas na elaboração de sistemas computacionais necessários à análise estrutural, sempre foram os

métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos, desenvolvidos já há algum tempo (BEER & WATSON, 2010). O surgimento do método dos elementos de contorno (MEC) e a sua utilização como uma alternativa para a obtenção de soluções numéricas em quase todos os campos da engenharia representa um avanço significativo que ocorreu nessa área do conhecimento nos últimos anos (BREBBIA, 1978). Em muitos problemas, comprovadamente, esse método é uma alternativa mais precisa e que permite a obtenção de respostas mais confiáveis quando comparadas com as dos métodos usuais (BREBBIA & DOMINGUEZ, 1989). Em algumas aplicações as equações integrais são representações exatas do modelo matemático utilizado para representar o problema físico, o que, em geral, é traduzido como aumento de confiança nos resultados obtidos (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984).

No caso da análise linear de placas, por exemplo, as representações integrais de deslocamentos, momentos e forças cortantes são exatas; o erro introduzido é devido à aproximação dos valores das variáveis nos elementos definidos ao longo do contorno da placa (CHAVES, 1997).

Uma das vantagens do método é que, na grande maioria dos casos, nas análises lineares não é necessário discretizar o domínio da estrutura, apenas o contorno da superfície estudada, simplificando com isso a malha da estrutura, o que facilita eventuais modificações na malha e diminui o tempo de processamento do programa (CHUEIRI, 1994). Além disso, na maioria dos casos, não há necessidade de malhas muito refinadas para se obterem respostas com boa precisão (FERNANDES, 1998). Nas análises não-lineares, no entanto, é necessária também a discretização do domínio da superfície em questão, devido ao surgimento na formulação de integrais de domínio que envolvem os esforços de correção que devem ser dados ao longo do processo não-linear para que a estrutura alcance seu equilíbrio (FERNANDES, 2003).

O método pode ser utilizado para a solução de problemas de análise de temperatura, tensão, torção, difusão, escoamento de fluidos, acústica, eletrostática, dentre outros (FREDHOLM, 1993). Ele é particularmente mais indicado em casos de concentração de tensão (ou outro tipo de variável), assim como nos casos em que o domínio em estudo tenda ao infinito ou semi-infinito (GIL RODRIGUEZ, 1986). Nesse segundo caso, o uso do MEC facilita bastante a análise, já que no estudo de uma estrutura em contato com um meio infinito, por exemplo o mar, não é necessário fazer a discretização do meio infinito, discretiza-se apenas a estrutura em questão (KUPRADZE, 1965). Como exemplos de áreas de estudo que possam ter problemas que envolvam domínios infinitos ou semi-infinitos, podem-se citar: mecânica dos solos, aerodinâmica, fundação, engenharia oceânica, dentre outras (LCHAT, 1975).

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), cuja formulação é baseada em equações integrais, surgiu há apenas 30 anos. Porém, desde o início do século, a partir do trabalho de (LOVE, 1944), as equações integrais são utilizadas para a solução de alguns problemas físicos particulares (TELLES & BREBBIA, 1979). Nos anos sessenta surge a primeira formulação indireta do método dos elementos de contorno, embora ainda não tendo essa denominação, de autoria de (KUPRADZE, 1965), aplicado a problemas potenciais e elásticos.

Somente a partir de 1967, com a publicação do primeiro artigo sobre a formulação direta do método das equações integrais de contorno, para problemas elásticos bidimensionais, de autoria de (RIZZO, 1967), é que os métodos integrais começam a despertar interesse na comunidade científica.

A generalização do método para sua utilização ampla em problemas de engenharia

ocorre em 1975, com o trabalho de (LCHAT, 1975), quando as técnicas de resolução das equações integrais começam a ser vistas como métodos numéricos (TELLES & BREBBIA, 1979).

O método passa a ser conhecido como “Método dos Elementos de Contorno”, com a publicação do primeiro livro sobre o método pelo professor Carlos A. (BREBBIA, 1975), onde o autor formula o método a partir do método dos resíduos ponderados, usando uma função ponderada conveniente (VENTURINI, 1982).

Esse método vem despertando nos pesquisadores dos grandes centros de pesquisa um interesse crescente e que tem resultado em enorme progresso (TEJERINA CALDERÓN, 1991). Praticamente todos os centros de pesquisa importantes dos países mais avançados têm grupos de pesquisadores dedicados ao desenvolvimento dessa técnica (LOVE, 1944).

No Departamento de Estruturas da Universidade de São Paulo em São Carlos, o Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini vem desenvolvendo desde meados dos anos 80 diversos trabalhos que utilizam como método numérico o MEC, sendo a maioria deles voltada para a análise de placas (WROBEL, 2003). O primeiro deles foi a tese de doutorado de (PAIVA, 1987), onde foi feita a análise linear de pavimentos de edifícios através da associação do MEC com o Método dos Elementos Finitos (MEF). Um dos trabalhos mais recentes desenvolvidos nessa área, sob a orientação do Prof. Venturini, é a tese de doutorado de (FERNANDES, 2003), onde foi desenvolvida uma nova formulação não-linear para análise de pavimentos de edifícios utilizando-se apenas o MEC. A seguir faz-se um breve resumo de outros trabalhos desenvolvidos nesse departamento utilizando-se o MEC (VENTURINI, 1988). O trabalho de (RIZZO, 1967) trata-se de placas sobre fundação elástica e na tese (SILVA, 1996), do mesmo autor, são desenvolvidas combinações do MEC e MEF para o estudo de pavimentos considerando-se as hipóteses de Reissner. (TEJERINA CALDERÓN, 1991) e (MANZOLI, 1992) também estudaram placas sobre fundação elástica, sendo que no primeiro trabalho foram introduzidas aproximações alternativas para a integral de domínio e no segundo foi considerada uma solução fundamental própria. (OLIVEIRA NETO, 1991) analisou placas de borda curva; (RIBEIRO, 1992) desenvolveu uma formulação de placas com as hipóteses de Reissner considerando não-linearidade física; (CHUEIRI, 1994) implementou a formulação elastoplástica, com modelos particulares de concreto armado, considerando-se as hipóteses de Kirchhoff; (RIBEIRO, 1992) complementou a formulação desenvolvida por (CHUEIRI, 1994), considerando outros modelos para o concreto; (CHAVES, 1997) desenvolveu e implementou a formulação do MEC para placas de espessura variável.

2. Metodologia

Um algoritmo foi implementado em linguagem de programação Fortran, utilizando o *software Microsoft Power Station 4.0*, para resolução do seguinte problema: obtenção das incógnitas no contorno e os valores de \mathbf{u} e \mathbf{q} em qualquer ponto interno, para o problema potencial, onde se adotam nós duplos em cada ponto de descontinuidade.

Para isso, primeiramente, preparou-se o arquivo para entrada de dados do problema a partir do levantamento dos dados necessários para a solução do problema, que são os seguintes:

- Número de nós do contorno (NumeroNos), número de elementos (NumeroElementos), número de nós duplos, número de pontos internos (NoInterno) onde serão calculados PotencialU e FluxoQ;

- Leitura das coordenadas cartesianas (X, Y) de cada nó do contorno e cada ponto interno;
- Leitura dos nós inicial e final de cada elemento (os elementos devem ser declarados no sentido anti-horário);
- Leitura dos nós duplos;
- Leitura da coordenada $\xi = 0.6$ a ser adotada para o nó duplo e da constante a , que define a posição do ponto de colocação externo;
- Para cada nó do contorno i (Índice), leitura do código da condição de contorno MatrizCoordenadas (exemplo: se MatrizCoordenadas(Índice)=1: indica potencial prescrito no nó i ; MatrizCoordenadas(Índice)=2: indica fluxo prescrito no nó i);
- Leitura dos valores prescritos das variáveis (u ou q) no contorno (os valores são prescritos nos nós do contorno. Definiu-se um nó duplo sempre que há descontinuidade no valor do fluxo ou quando os valores são prescritos nos nós locais dos elementos se o nó duplo somente for definido quando houver duas incógnitas no ponto de descontinuidade);
- Para cada elemento j : calculou-se o comprimento ComprimentoL e os cossenos diretores da direção tangencial s_j ao contorno

$$\vec{s}_j = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_j \\ \sin \alpha_j \end{Bmatrix}$$

, sendo α_j o ângulo que o vetor s_j faz com o eixo X1.

Posteriormente, foi realizada a montagem das matrizes [H] e [G]. Foi montada a equação algébrica do PotencialU em número de nós do contorno (NumeroNos ou pontos de colocação) e calcula-se a contribuição de cada elemento às matrizes [H] e [G]. A fim de facilitar o algoritmo, as equações de u (PotencialU) e q (FluxoQ) referente ao número de nós internos (NoInterno) também foram montadas nas matrizes [H] e [G], após as equações relativas ao número de nós do contorno do sistema de equações. Porém, na hora de resolver o sistema de equações desconsidera as partes das matrizes [H] e [G] referentes aos pontos internos.

Em seguida, foi realizado o cálculo das coordenadas para cada ponto de colocação Índice, sendo $1 \leq \text{Índice} \leq \text{NumeroNos} + \text{NoInterno}$, verificando as seguintes condições:

- Se o nó do contorno é duplo, devem-se recalcular suas coordenadas (X_p, Y_p), através das equações:

$$\Gamma_j = \xi \frac{L_j}{2}$$

$$X_1^P = X_1^M + \xi a x_1$$

$$X_2^P = X_2^M + \xi a x_2$$

- Se o ponto de colocação é externo, suas coordenadas devem ser calculadas, considerando-se a equação:

$$d = aL_m$$

- Se o ponto de colocação está sobre o contorno e não é nó duplo ou se é um ponto interno, suas coordenadas são aquelas dadas na entrada de dados.

Então, é efetuado o cálculo da contribuição do elemento j (sendo $1 \leq j \leq N$) na linha das matrizes [H] e [G], considerando-se dois casos:

a) **Se o ponto de colocação I não pertence ao elemento j:**

A integração é feita numericamente, através da equação abaixo para um coeficiente da matriz H e de forma análoga para um coeficiente da matriz G .

$$h_N^j(S) = \frac{L_j}{2} \sum_{ig=1}^{N_g} q_j^*(S, \xi_{ig}) \phi_N(\xi_{ig}) W_{ig}$$

Para cada ponto de Gauss IG de coordenada adimensional ξ_{IG} procede-se da seguinte forma:

- Calculam-se as coordenadas cartesianas do ponto de Gauss, através da equação vista acima quando o contorno do nó é duplo;
- Calcula-se a distância r entre o ponto de colocação e o ponto de Gauss IG , através da equação:

$$r_{,i} = \frac{x_i(p) - x_i(s)}{r}$$

E $\partial r / \partial n$, através da equação:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,i} n_i = r_{,1} n_1 + r_{,2} n_2 = \cos \beta$$

Sendo:

$$n_1 = \text{sen}(\alpha_j) \text{ e } n_2 = -\text{cos}(\alpha_j)$$

Desse modo, calculam-se os coeficientes h e g relativos ao nó N do elemento j .

b) Se o ponto de colocação I pertence ao elemento j

A integração é analítica, devido às singularidades existentes, pois \mathbf{r} passa pelo $\mathbf{0}$. Nesse caso, $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

- Se o ponto de colocação coincide com o nó inicial do elemento j :

$$g_1^j = \frac{L_j}{4\Pi} (1.5 - \ln(L_j)); \quad g_2^j = \frac{L_j}{4\Pi} (0.5 - \ln(L_j))$$

- B - Se o ponto de colocação coincide com o nó final do elemento j :

$$g_1^j = \frac{L_j}{4\Pi} (0.5 - \ln(L_j)); \quad g_2^j = \frac{L_j}{4\Pi} (1.5 - \ln(L_j))$$

- B - Se o ponto de colocação é um nó duplo:

$$a = \frac{L_j}{2} (1 + \xi); \quad b = \frac{L_j}{2} (1 - \xi)$$

$$g_1^j = -\frac{b}{2\Pi L_j} [a(\ln a - 1) + b(\ln b - 1)] - \frac{1}{4\Pi L_j} \left[a^2 \left(\ln a - \frac{1}{2} \right) - b^2 \left(\ln b - \frac{1}{2} \right) \right];$$

$$g_2^j = \frac{1}{2\Pi} \left(\frac{b}{L} - 1 \right) [a(\ln a - 1) + b(\ln b - 1)] + \frac{1}{4\Pi L_j} \left[a^2 \left(\ln a - \frac{1}{2} \right) - b^2 \left(\ln b - \frac{1}{2} \right) \right]$$

Em seguida, é calculada a soma da contribuição de cada elemento em cada linha das matrizes $[H]$ e $[G]$.

O modo como é feita essa soma depende de como foram definidos os nós duplos, tendo-se duas situações:

a) Se foi definido um nó duplo em cada ponto onde há descontinuidade no valor do fluxo

Nesse caso, as matrizes H e G têm dimensão $((\text{NumeroNos} + \text{NoInterno}) \times \text{NumeroNos})$. Os valores são prescritos nos nós do sólido. Determina-se qual nó do contorno do sólido (NO) corresponde ao nó local NO do elemento j e soma-se na coluna correspondente ao nó NO , o valor do coeficiente h , no caso da matriz H ou do coeficiente g no caso da matriz G , ou seja:

$$H(I, NO) = H(I, NO) + h_N^j$$

$$G(I, NO) = G(I, NO) + g_N^j$$

b) Se foi definido um nó duplo apenas quando há duas incógnitas no canto:

O somatório de h na matriz H de dimensão $((\text{NumeroNos} + \text{NoInterno}) \times \text{NumeroNos})$ é igual ao caso anterior.

Nesse caso, prescrevem-se as variáveis nos nós locais do elemento, portanto a matriz G tem dimensão $((\text{NumeroNos} + \text{NoInterno}) \times N_{pres})$, sendo N_{pres} o número de valores prescritos no contorno, que é igual a: $pres\ nos\ e\ N = N * N$, sendo N_{nos} o número de nós em cada elemento. Soma-se o coeficiente g à coluna NO_{pres} da matriz G , dada por:

$$H(I, NO) = H(I, NO) + h_N^j$$

$$G(I, NO_{pres}) = G(I, NO_{pres}) + g_N^j$$

Dessa maneira, é realizada a soma da constante $K(S)$ em cada linha da matriz $[H]$ (apenas para pontos de colocação sobre o contorno).

Se o ponto de colocação I é externo, tem-se $K(S) = 0$.

$$0 = \int_{\Gamma} u^*(A, P) q(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(P) q^*(A, P) d\Gamma$$

Portanto, devem ser considerados apenas dois casos:

a) Se o ponto de colocação I está sobre o contorno e não é nó duplo: soma-se a constante $K(S)$ ao coeficiente $H(I, I)$ da matriz H .

$$K(S)u(S) + \hat{H}(S)U = G(S)Q$$

Os vetores da equação (4.50) são dados por:

- $\underline{U}^T = \{u^1 \dots u^i \dots u^{N_{nos}}\}$ é o vetor dos valores nodais da variável u no contorno;
- $\underline{Q}^T = \{q^1 \dots q^i \dots q^{N_{nos}}\}$ é o vetor dos valores nodais da variável q no contorno;
- $\hat{H}(S)$ e $G(S)$ são vetores de dimensão $(1 \times N_{noc})$;

b) Se o ponto de colocação I está sobre o contorno e é nó duplo: soma-se a constante $K(S) = 0,5\phi$ ao coeficiente $H(I, NO)$ da matriz H , onde NO indica o nó do contorno, que corresponde ao nó local NO_j do elemento.

$$K(S)[\phi_1 u_j^1 + \phi_2 u_j^2 + \phi_3 u_j^3] + \hat{H}(S)U = G(S)Q$$

Em seguida, fez-se a verificação da propriedade da matriz $[H]$:

• Para pontos de colocação sobre o contorno ou externo, a equação abaixo foi verificada:

$$\sum_{j=1}^{N_{noc}} h_{i,j} = 0$$

• Para pontos internos as equações abaixo foram verificadas.

$$\sum_{j=1}^{N_{noc}} h_{s,j} = -1$$

$$\sum_{j=1}^{N_{noc}} h'_{s,j} = 0$$

Após essas verificações, foi executado o cálculo das incógnitas de contorno. Para o cálculo das incógnitas no contorno, consideram-se apenas as partes das matrizes H e G relativas aos pontos de colocação (número de nós do contorno). Procede-se do seguinte modo:

a) Reordenam-se as colunas do sistema de equações de acordo com as condições de contorno, obtendo a matriz $[A]$ e o vetor $\{B\}$, conforme equação abaixo:

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{B}$$

onde: \underline{X} é o vetor solução, composto pelos potenciais e fluxos incógnitos nos nós do contorno;
 $\underline{B} = \underline{G} \underline{Q}$.

A fim de exemplificar, seja o seguinte sistema de equações, onde $n=N_{noc}$:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1k} & \dots & H_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{k1} & \dots & H_{kk} & \dots & H_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1} & \dots & H_{nk} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ \dots \\ u^k \\ \dots \\ u^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1k} & \dots & G_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{k1} & \dots & G_{kk} & \dots & G_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & \dots & G_{nk} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^1 \\ \dots \\ q^k \\ \dots \\ q^n \end{Bmatrix}$$

b) Solução do Sistema de Equações: o sistema de equações a ser resolvido é dado pela equação abaixo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & -G_{1k} & \dots & H_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{k1} & \dots & -G_{kk} & \dots & H_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1} & \dots & -G_{nk} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u^1 \\ \dots \\ u^k \\ \dots \\ u^n \end{Bmatrix}}_{\{X\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & \dots & -H_{1k} & \dots & G_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{k1} & \dots & -H_{kk} & \dots & G_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & \dots & -H_{nk} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix}}_{[G]} \underbrace{\begin{Bmatrix} q^1 \\ \dots \\ u^k \\ \dots \\ q^n \end{Bmatrix}}_{\{Q\}}$$

Com a solução desse sistema, foram calculadas todas as incógnitas do contorno, obtendo os vetores U e Q , que contêm os valores nodais das variáveis no contorno. Por fim, foram calculadas as variáveis nos pontos internos. As equações algébricas dos pontos internos são dadas pelas equações abaixo:

$$u(s) + \underline{H}(s) \underline{U} = \underline{G}(s) \underline{Q}$$

$$q_m(s) + \underline{H}'(s) \underline{U} = \underline{G}'(s) \underline{Q}$$

Os valores de u e qm nesses pontos são obtidos de forma simples apenas multiplicando a linha da matriz $[H]$, referente à equação do ponto interno, pelo vetor U , que contêm os valores do potencial no contorno, e a respectiva linha da matriz $[G]$ pelo vetor Q , que contêm os valores nodais do fluxo no contorno.

3. Resultados e Discussão

A. Teste 1

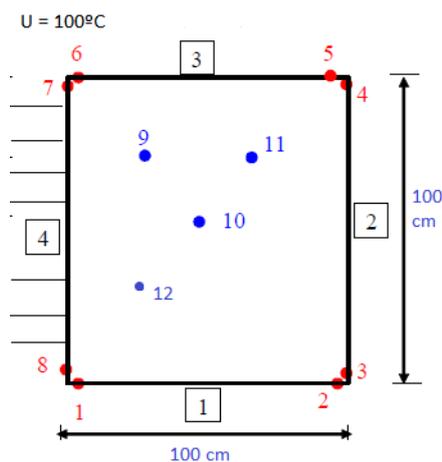


Figura 1 - Malha 1.

Dada a malha/sólido apresentada na Figura 1, representando um teste de condução de calor, onde o contorno foi discretizado em oito nós e quatro elementos, tendo sido adotado, portanto, aproximação linear para as variáveis. Têm-se ainda quatro nós internos, onde se deseja conhecer os valores do potencial e do fluxo. Nos cantos foram definidos nós duplos. Nos nós 3 e 4 foram prescritos potenciais nulos e um potencial $u=100$ foi prescrito para os nós 7 e 8. Nos nós 1, 2, 5 e 6 foi prescrito fluxo nulo. A partir desta malha, foi construída a seguinte entrada de dados no arquivo Bloco de Notas, nomeado “Entrada1.txt”.

Posteriormente, o algoritmo implementado em linguagem de programação Fortran foi executado.

Desse modo, obteve-se o arquivo de saída, nomeado “Saida1.txt”, o qual apresenta os seguintes resultados e informações referentes ao problema abordado:

INCÓGNITAS DO CONTORNO		
NÓ	POTENCIAL	FLUXO
1	30.397840	
2	30.397860	
3		-1.490832
4		.441052
5	80.157720	
6	80.157700	
7		2.493384
8		-1.460279
POTENCIAL NOS PONTOS INTERNOS		
NÓ	POTENCIAL	
9	55.649850	
10	55.080470	
11	50.903920	
12	47.529190	
FLUXO NOS PONTOS INTERNOS		
NÓ	DIREÇÃO X	DIREÇÃO Y
9	-.430164	.542367
10	-.540674	.388986
11	-.592971	.368117
12	-.628151	.539152

A partir dos dados obtidos, observa-se os valores de potencial encontrados nos nós 1, 2, 5 e 6, e os valores de fluxo nos nós 3, 4, 7 e 8. Além disso, também se verifica o valor do potencial nos nós internos 9, 10, 11 e 12, além das respectivas direções X e Y de cada um desses nós internos da malha.

B. Teste 2

Dada a seguinte malha/sólido abaixo, de acordo com a Figura 2, representando um teste de condução de calor, onde o contorno foi discretizado em doze nós e oito elementos, tendo sido adotado, portanto, aproximação linear para as variáveis. Têm-se ainda quatro nós internos, onde se deseja conhecer os valores do potencial e do fluxo. Nos cantos foram definidos nós duplos. Nos nós 4, 5 e 6 foram prescritos potenciais nulos e um potencial $u=100$ foi prescrito para os nós 10, 11 e 12. Nos nós 1, 2, 3, 7, 8 e 9 foi prescrito fluxo nulo.

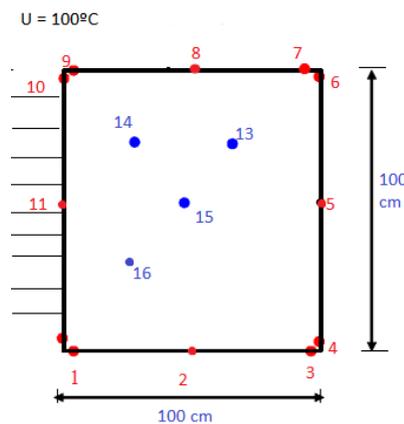


Figura 2 - Malha 2.

A partir desta malha, foi construída a seguinte entrada de dados no arquivo Bloco de Notas, nomeado “Entrada2.txt”.

Posteriormente, o algoritmo implementado em linguagem de programação Fortran foi executado.

Desse modo, obteve-se o arquivo de saída, nomeado “Saida2.txt”, o qual apresenta os seguintes resultados e informações referentes ao problema abordado:

INCÓGNITAS DO CONTO		
NÓ	POTENCIAL	FLUXO
1	60.523570	
2	47.766170	
3	9.273556	
4		.002307
5		-1.746782
6		.435158
7	35.518580	
8	48.515650	
9	86.832730	
10		-.246016
11		2.067041
12		-.791600
POTENCIAL NOS PONTOS INTERNOS		
NÓ	POTENCIAL	
13	69.420800	
14	56.605720	
15	40.769360	
16	27.481760	
FLUXO NOS PONTOS INTERNOS		
NÓ	DIREÇÃO X	DIREÇÃO Y

13	-.770998	.317723
14	-.860866	.092935
15	-.850887	.077150
16	-.766362	.262042

A partir dos dados obtidos, observa-se os valores de potencial encontrados nos nós 1, 2, 3, 7, 8 e 9, e os valores de fluxo nos nós 4, 5, 6, 10, 11 e 12. Além disso, também se verifica o valor do potencial nos nós internos 13, 14, 15 e 16, além das respectivas direções X e Y de cada um desses nós internos da malha.

C. *Teste 3*

Dada a seguinte malha/sólido abaixo, segundo pode ser visto na Figura 3, representando um teste de condução de calor, onde o contorno foi discretizado em vinte nós e dezesseis elementos, tendo sido adotado, portanto, aproximação linear para as variáveis. Têm-se ainda quatro nós internos, onde se deseja conhecer os valores do potencial e do fluxo. Nos cantos foram definidos nós duplos. Nos nós 6, 7, 8, 9 e 10, foram prescritos potenciais nulos e um potencial $u=100$ foi prescrito para os nós 16, 17, 18, 19 e 20. Nos nós 1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14 e 15 foi prescrito fluxo nulo.

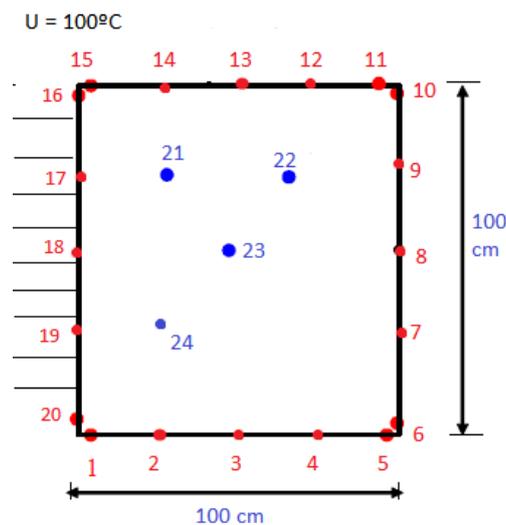


Figura 3 - Malha 3.

A partir desta malha, foi construída a seguinte entrada de dados no arquivo Bloco de Notas, nomeado “Entrada3.txt”.

Posteriormente, o algoritmo implementado em linguagem de programação Fortran foi executado.

Desse modo, obteve-se o arquivo de saída, nomeado “Saida3.txt”, o qual apresenta os seguintes resultados e informações referentes ao problema abordado:

INCÓGNITAS DO CONTO		
NÓ	POTENCIAL	FLUXO
1	79.479220	
2	71.657110	
3	47.532770	
4	24.030430	
5	2.496219	
6		-.271581
7		-1.020814

8	-1.000509	
9	1.438622	
10	-7.236087	
11	-5.552324	
12	7.594666	
13	40.390860	
14	69.747070	
15	98.385980	
16	1.138100	
17	1.244900	
18	1.073345	
19	1.617423	
20	-.057410	
POTENCIAL NOS PONTOS INTERNOS		
NÓ	POTENCIAL	
21	76.830130	
22	57.084070	
23	35.281000	
24	10.379160	
FLUXO NOS PONTOS INTERNOS		
NÓ	DIREÇÃO X	DIREÇÃO Y
21	-.993824	.107685
22	-1.021077	-.027269
23	-1.004612	-.132045
24	-1.024505	-.424663

A partir dos dados obtidos, observa-se os valores de potencial encontrados nos nós 1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14 e 15, e os valores de fluxo nos nós 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19 e 20. Além disso, também se verifica o valor do potencial nos nós internos 21, 22, 23 e 24, além das respectivas direções X e Y de cada um desses nós internos da malha.

4. Conclusões

Neste caso do problema potencial, os valores de potencial e fluxo foram se aproximando da realidade à medida que houve maior discretização do objeto.

Portanto, em virtude do que foi apresentado, verifica-se que quanto mais discretizado o objeto, ou seja, quanto mais pontos de contorno forem incluídos na malha montada para cálculo de algum problema, maior será a sua precisão.

Por isso, o Método de Elementos de Contorno (MEC) é tão importante para a solução de problemas das mais diversas áreas, comprovando-se a partir dos exemplos realizados neste trabalho.

Referências

- ALIABADI, M. H.** *Applications in Solids and Structures*. Queen Mary, University of London, UK, 2003.
- ALVES, L. M.** *Apostila de Método dos Elementos de Contorno*. Curitiba: Universidade Federal do Paraná - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2006.
- BEER G. & WATSON J. O.** *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineering*. 2010.
- BREBBIA, C. A. & DOMINGUEZ, J.** *Boundary Elements – An Introductory Course*. Computational Mechanics Publication -. Mc Graw-Hill Book Company. 1989.
- BREBBIA, C. A.** *The boundary element method for engineers*. London, Pentech Press. 1978.
- BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C.** *Boundary element techniques - theory and applications in engineering*. Berlin: Springer-Verlag. 1984.
- CHAVES, E.W.V.** *Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de*

contorno. São Carlos. 171p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 1997.

CHUEIRI, L.H.M. *Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas.* São Carlos. 219p. Tese. 1994.

FERNANDES, G.R. *Análise não-linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno.* São Carlos. 272p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 2003.

FERNANDES, G.R. *O método dos elementos de contorno aplicado à análise não linear de placas.* São Carlos. 178p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 1998.

FREDHOLM, I. *Sur une Classe d'equations fonctionelles.* Acta Math., 27, p.365-390. 1993.

GIL RODRIGUEZ, J.C. *Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais.* São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 1986.

KUPRADZE, V.D. *Potential methods in the theory of elasticity.* Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations. 1965.

LCHAT, J.C. *A further development of boundary integral techniques for elastostatics.* Southampton. Thesis (Ph.D.) - University of Southampton. 1975.

LOVE, A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* Dover. 1944.

MANZOLI, O.L. *Formulação do método dos elementos de contorno para placas sobre fundação elástica.* São Carlos. Dissertação (Mestrado) - EESC –USP. 1992.

OLIVEIRA NETO, L. *Análise de placas de borda curva pelo método dos elementos de contorno.* São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - USP. 1991.

PAIVA, J.B. *Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estrutura.* São Carlos. 195p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 1987.

RIBEIRO, G. O. *Sobre a formulação do método dos elementos de contorno de placas usando as hipóteses de Reissner.* São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos – USP. 1992.

RIZZO, F. *An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics.* Quaterly of Applied Mathematics, v.25, n.1, p.83-92. 1967.

SILVA, N. A. *Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas.* São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - USP. 1988.

SILVA, N.A. *Aplicação do método dos elementos de contorno às placas com enrijecedores utilizando a teoria de Reissner.* São Carlos. Tese (Doutorado) - EESCUSP. 1996.

TEJERINA CALDERÓN, E. *Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno.* São Carlos, São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - USP. 1991.

TELLES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. *On the application of the boundary element method to plasticity.* Appl. Math. Modelling, n.3, p.466-470. 1979.

VENTURINI W. S. *Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia.* Tese (Livre-Docência) - Escola de Engenharia de São Carlos - USP. 1988.

VENTURINI, W.S. *Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems.* Southampton. Thesis (Ph.D.) - University of Southampton. 1982.

WROBEL, L. C. *Applicaitons in Thermo Fluids and Acoustic.* Brunel University, UK. 2003.