

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA DIFUSÃO DE CALOR EM PEÇAS COM CAVIDADES DE RESFRIAMENTO COM VARIAÇÃO GEOMÉTRICA E DE CONDIÇÕES DE CONTORNO

Daniel Magalhães da Cruz (Universidade Federal do Rio Grande) E-mail: dacruz.daniel@hotmail.com

Resumo: No estudo de transferência de calor a modelagem matemática é muito trabalhosa do ponto de vista analítico. Olhando ainda para o lado interativo e iterativo dos problemas de transferência de calor, isto dificulta muito a resolução e análise dos resultados. Neste contexto a solução numérica se torna uma ferramenta bastante eficiente olhando para a sua capacidade de velocidade de resolução variando diferentes parâmetros e ainda gerando os devidos gráficos que representam o resultado numérico de um dado problema. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é inserido nesse contexto a partir do uso de algum software exatamente por ser um procedimento numérico para determinar soluções de equações diferenciais sobre condições de contorno. Se tratando de resfriamento de peças com geração de calor pode-se destacar a geometria e as condições de contorno, tais como condutividade e geração de calor, como as determinantes neste processo de análise. Na proposição de duas geometrias este trabalho repete as condições de contorno para ambas para analisar o campo de temperatura. Como resultado uma das geometrias apresenta menor gradiente de temperatura e conseqüentemente menor temperatura máxima, sendo melhor para cavidades de resfriamento pois mostra-se mais eficaz. As condições de independência de malha dentro de condições de contorno iguais ainda geram uma interpretação do motivo de se refinar uma malha, mostrando a diferença discrepante entre uma malha refinada e uma não refinada.

Palavras-chave: Difusão do calor, simulação numérica, PDETool, cavidades de resfriamento, análise geométrica.

NUMERICAL SOLUTION OF HEAT DIFFUSION IN PARTS WITH COOLING CAVITIES WITH GEOMETRIC VARIATION AND CONTOUR CONDITIONS

Abstract: In the study of heat transfer, mathematical modeling is very laborious from an analytical point of view. Still looking at the interactive and iterative side of heat transfer problems, this makes it very difficult to solve and analyze the results. In this context, the numerical solution becomes a very efficient tool looking at its speed of resolution capacity by varying different parameters and even generating the appropriate graphics that represent the numerical result of a given problem. The Finite Element Method (FEM) is inserted in this context from the use of some software exactly because it is a numerical procedure to determine solutions of differential equations under boundary conditions. When it comes to cooling parts with heat generation, geometry and boundary conditions, such as conductivity and heat generation, can be highlighted as determining factors in this analysis process. In the proposition of two geometries, this work repeats the boundary conditions for both to analyze the temperature field. As a result, one of the geometries has a lower temperature gradient and consequently a lower maximum temperature, being better for cooling cavities as it is more effective. Mesh independence conditions within equal boundary conditions still generate an interpretation of why a mesh is refined, showing the discrepant difference between a refined mesh and an unrefined mesh.

Keywords: Heat diffusion, numerical simulation, PDETool, cooling cavities, geometric analysis.

1. Introdução

Todo conhecimento a qual tem-se acesso, e todo conhecimento que se desenvolve como raça humana, objetivou e objetiva compreender os fenômenos nos quais ocorrem à volta, e dentro dos quais o homem está imerso. Dentre diversos fenômenos, um dos essenciais e que pode ainda ser citado como um dos mais antigos está relacionado as diferenças de temperatura e ao calor. Com o desenvolvimento ao passar do tempo

grandes cientistas e até anônimos contribuíram para que se facultasse uma formulação matemática do calor, um conjunto de modelos matemáticos, de técnicas também conhecidas pela exploração do campo experimental. Essas equações governantes que foram desenvolvidas, chamadas também de técnicas analíticas tiveram diversas implementações ao longo do tempo: equações diferenciais, método de separação de variável, funções de Green, séries de Taylor, séries de Fourier, Transformada de LaPlace, dentre outros.

De acordo com a evolução da tecnologia e a proposição de problemas cada vez mais complexos afetando não só os problemas analíticos pela dificuldade de resolução, mas também os experimentais pelo alto custo para execução, impulsionou-se o campo de soluções numéricas computacionais. Na contemporaneidade, é inegável o ritmo frenético de avanço computacional que existe em todo o mundo. Graças a esses avanços e as implementações em métodos numéricos é possível simular o comportamento de uma vasta classe de aplicações de interesse da ciência e da engenharia.

Os materiais de alta condutividade térmica para resfriamentos de corpos com geração de energia, com aplicação principalmente em componentes eletrônicos, vem sendo amplamente explorados e estudados nos últimos vinte anos. O ganho computacional acumulado ao longo desse tempo, foi imenso, e ao mesmo tempo os tamanhos das máquinas computacionais diminuíram, embora diversas outras aplicações, os estudos em difusão do calor, são em essência voltados para a computação e para as condições de resfriamentos de corpos com geração de energia. Dentre estes estudos pode-se ressaltar Bejan (1997), Bejan (2000) e Bejan & Lorente (2008), que propuseram uma forma eficiente de retirada de calor por condução do volume aquecido. Um material de alta condutividade, com formação de canais sobre a superfície reduzindo assim a resistência térmica equivalente entre o ambiente e o corpo que está gerando calor. Essa otimização consiste em manter fixo determinadas especificações como volume ou área, definir o regime em permanente ou transiente, dentre outras, e a partir daí iterar.

Na valorização das geometrias, que exatamente é o propósito deste trabalho, há historicamente na literatura vários estudos de caminhos preenchidos com materiais de alta condutividade, e até em condição de não uniformidade. Algumas geometrias específicas como o perfil “I” e o perfil “Y”, podem ser citadas como estudos já feitos por Almogbel & Bejan (1999) e por Horbach et al. (2014), respectivamente. Lorenzini et al. (2013a) e Lorenzini et al. (2013b), abordou geometrias mais complexas melhorando a distribuição do campo de temperatura. Nesta literatura citada há o desenvolvimento de outras teorias, que embora não seja o propósito do presente trabalho, é importante ressaltá-las. Uma em especial é o Design Construtal que afirma que a geometria do sistema de escoamento segue toda uma lógica física indispensável e irrefutável em qualquer escoamento, esta é conhecida como Lei de Construtal (BEJAN, 2000). Embora não haja o aprofundamento nesta parte específica, é importante ver o desenvolvimento constante nesta área de transferência de calor.

Concomitante a este contexto, o estudo de difusão do calor por métodos numéricos é feito ao redor do mundo por diversas instituições acadêmicas e de pesquisa. Este estudo da difusão de calor é encontrado na literatura com diversas nuances: variações de condições de contorno, variações de propriedades termofísicas, análise de determinado tipo de regime, as condições geométricas, etc. Este estudo foca em especial nas condições geométricas e condições de contorno da difusão do calor.

O objetivo é entender o mecanismo da difusão do calor, a distribuição do campo de temperatura, e a capacidade de realizar uma avaliação quantitativa e qualitativa na

comparação de duas geometrias com cavidades de resfriamento em um corpo com geração de calor, em regime permanente e domínio 2D.

Na solução numérica será implementada pelo método dos elementos finitos, através da ferramenta PDETOOL (Partial Differential Equation Toolbox), do software MATLAB. Com as geometrias definidas, o domínio é feito em duas dimensões e gerado em uma malha em coordenadas triangulares, que pode passar por refino até que se adeque à condição de independência de malha. Pode-se definir as condições de contorno, as taxas de geração de energia, a condutividade, o regime.

2. Modelagem matemática

Segundo Incropera e DeWitt (1998), “um dos principais objetivos da análise da condução do calor é a determinação do campo de temperatura em um meio resultante da imposição de condições em suas fronteiras”. Uma vez que se tem domínio sobre como é a distribuição desse campo, qualquer ponto pertencente ao meio ou a superfície descrita pelas equações pode ser determinado pela lei de Fourier. Já se sabe que por taxas relacionadas, o campo de temperatura dependerá de derivadas parciais da temperatura em relação a posição, no tridimensional do sistema retangular de coordenadas (base canônica), eixo x, y e z.

A equação da difusão parte da análise de um corpo, em meio homogêneo, no qual não existe movimento (advecção). Metodologicamente é aplicada a conservação da energia em um volume de controle infinitesimal. As taxas de transferência de calor por condução ocorrem perpendicularmente a cada superfície, nas superfícies opostas é adotada uma expansão da série de Taylor.

Na peça pode-se ter um termo fonte de energia que está associada a quantidade de geração de energia térmica no volume de controle, matematicamente é um diferencial do calor pelo volume. Esta parcela de energia gerada é matematicamente definida por:

$$\dot{E}_g = q''' \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (1)$$

onde q''' é a taxa na qual a energia é gerada por unidade de volume do meio [W/m^3].

Além disso, a construção da equação da difusão do calor, leva em conta o termo de taxa de energia acumulada no volume de controle. Considerando a densidade e capacidade calorífica à pressão constante como propriedades termofísicas constantes, pode-se escrever este acúmulo de energia como:

$$\dot{E}_{acu} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (2)$$

onde ρ é a massa específica [kg/m^3] e c_p é o calor específico [$J/(kgK)$].

Realizando o balanço de energia:

$$\dot{E}_{acu} = \dot{E}_g + \dot{E}_e - \dot{E}_s \quad (3)$$

onde \dot{E}_{acu} é a energia acumulada, \dot{E}_g é a energia gerada, \dot{E}_e é a energia que entra no volume de controle, \dot{E}_s é a energia que sai do volume de controle.

O equacionamento de conservação de energia, combinado com as equações descritas anteriormente, e a utilização da lei de Fourier, gera em coordenadas cartesianas a equação da difusão do calor:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4)$$

onde k é a condutividade térmica do material [W/(mK)], T é o campo de temperaturas [°C] ou [K], q''' é a taxa volumétrica de geração de energia [W/m³], ρ é a massa específica do material [kg/m³], c_p é o calor específico do material [J/(kgK)] e t é o tempo [s].

Essa equação fornece a ferramenta básica para análise da condução do calor. Como o próprio livro do Incropera e DeWitt (1998), enfatiza, deve-se ter uma clara compreensão do significado físico de cada uma das parcelas da equação. O primeiro termo apresentado é um bom exemplo, pois nos termos descritos está relacionada ao fluxo líquido de calor por condução para o interior do volume de controle através da direção x .

Da equação (4), pode-se surgir diversas simplificações das quais modelem da melhor maneira o que está sendo proposto, ou mesmo por manipulação matemática. A primeira dessas considerações em nossa modelagem matemática é a consideração em regime estacionário (permanente), esta consideração faz com que não haja qualquer variação da quantidade de energia acumulada no volume de controle ao longo do tempo. A segunda consideração, é o domínio da resolução que está sendo proposta como um domínio em duas dimensões (2D), o termo que desenvolve a difusão em z se anula simplificando a equação. A terceira e última simplificação é a divisão de toda equação pela condutividade térmica k , isto porque esta forma de avaliar a equação, pode ser importante nos resultados para situações onde a razão de geração de energia pela condutividade térmica for igual.

Com as devidas simplificações, a equação da difusão do calor que será aplicada as geometrias selecionadas fica em termos de:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \quad (5)$$

Nesta modelagem matemática, para posterior solução numérica é importante ainda as condições do problema. É muito comum na resolução desse tipo de problema de difusão de calor, a existência de paredes adiabáticas e de paredes não adiabáticas. Essas condições são conhecidas como condições iniciais e de contorno.

Na literatura essas condições das paredes que contornam o volume de controle pode ser de primeira, segunda ou terceira espécie, também conhecida como condição de Dirichlet, Neumann e Robin, respectivamente.

A de terceira espécie ou condição de Robin ela leva em conta a parcela convectiva que no caso da nossa modelagem não será contemplada. A modelagem de primeira espécie ou Dirichlet, é uma situação onde a superfície é mantida a uma temperatura fixa pelo fluxo de calor. Ou seja, esta condição é proposta pra os casos de paredes que permitem a transferência de calor na superfície. Esta condição será utilizada em todas as paredes das cavidades. E a modelagem de segunda espécie ou Neumann é uma situação onde o fluxo térmico está relacionado ao gradiente de temperatura na superfície segundo a lei de Fourier, em particular dessa condição corresponde a uma superfície perfeitamente isolada, ou adiabática para o qual a variação da temperatura em relação a coordenada naquele pedaço infinitesimal é nula, e esta condição de isolamento será utilizada em todas as paredes externas do sólido.

3. Proposição das geometrias e condições de contorno

O problema consiste em duas geometrias, e na resolução da equação da difusão do calor para ambas. As considerações que foram feitas foi o regime permanente, o domínio

bidimensional, não há parcelas radiantes, não há parcelas convectivas, as paredes das cavidades apresentam condição de Dirichlet, as paredes externas do sólido apresentam condição de Neumann, o perímetro de cavidade em ambas as geometrias é igual, foram considerados 10 condutividades diferentes, e 5 gerações de energia diferentes.

A forma geométrica é desenvolvida com cavidades num quadrado 1x1 de um dimensional de distância. As geometrias são mostradas na Figura 1:

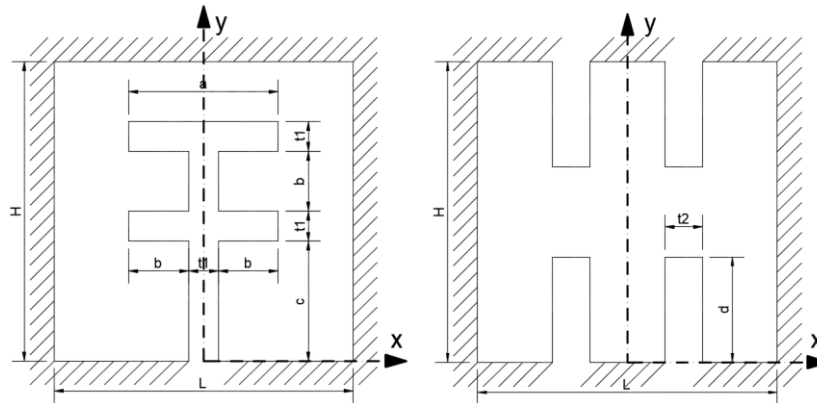


Figura 1. Geometrias, perfil duplo T (a esquerda), perfil aleta invertida (a direita).

As dimensões referentes nas Figura 1 são em unidades dimensionais de distância: H=1; L=1; a=0,5; b=0,2; c=0,4; d=0,35; t1=0,1; t2=0,125. Importante ainda que os nomes dados aos perfis são para facilitar posterior referência dentro do próprio trabalho.

Como a difusão do calor em relação a uma superfície é em função da área, onde o fluxo de calor acontece normal a mesma, é importante que nessa comparação geométrica haja uma coerência em relação a esta nuance. Se tratando do domínio que se tem a análise se torna válida se os perímetros das cavidades forem iguais em unidades de distância.

$$2 \cdot (0,4 + 4 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1) + 0,5 = 4 \cdot (2 \cdot 0,35 + 0,125) = 3,3 \quad (6)$$

Sobre as condições de iteração, tem-se sempre as mesmas simplificações descritas acima iterando cada uma das geometrias para diferentes coeficientes de condutividade térmica e para diferentes taxas de energia gerada no volume de controle. Os valores que serão atribuídos estão dispostos na Tabela 1:

Tabela 1 – Parâmetros de condutividade térmica k e geração de energia q'''

k [W/(mK)]	q''' [W/m³]
1	1
2	5
3	10
4	50
5	100
6	
7	
8	
9	
10	

Fonte: O autor

Assim, na descrição dos resultados, por análise combinatória é previsto 100 resultados das iterações na solução numérica da difusão do calor. Para cada uma das geometrias é esperado 50 simulações (variações de k e de q''').

4. Simulação numérica no PDETool do MATLAB

Para realizar a simulação numérica é necessário abrir a ferramenta do PDETool dentro do software MATLAB. É preciso indicar o tipo de equação de transporte que está sendo modelada. Na guia opções, em aplicações deve ser escolhido transferência de calor. Todos os procedimentos posteriores serão as geometrias, hipóteses simplificativas e condições de contorno do problema que serão inseridos para a solução numérica.

O sistema de coordenada adotado segue o representado nas geometrias. Onde no eixo y todo o sólido desenvolve-se no sentido positivo (já que o eixo x se encontra na base de cota 0 da peça), e no eixo x desenvolve-se no sentido positivo e negativo (já que o eixo y se encontra no meio geométrico da peça).

As determinações das condições de contorno das paredes são feitas na ferramenta do PDETool, no “Boundary mode”. Onde o duplo clique sobre a parede faz aparecer uma interface onde facilmente pode-se determinar condição de Neumann ou de Dirichlet. Aplicando o que já foi previsto das condições de Neumann para isolamento nas paredes externas e a condição de Dirichlet nas paredes da cavidade, representa-se as condições de contorno na Figura 2 indicado em vermelho a condição de primeira espécie e em azul a condição de segunda espécie.

Nas determinações das hipóteses simplificativas e das condições de iterações, é a parte da ferramenta que se especifica por fim a equação diferencial parcial a ser resolvida. Essas determinações são feitas na guia “PDE” e na opção “PDE Specification”, onde o modelo de regime estacionário é selecionado na opção de equação diferencial parcial elíptica. Na janela que se abre, fica-se com a condutividade e o termo de geração de calor que serão iterados, depois de todo o procedimento, muda-se apenas essa etapa para novos valores, e gera-se a solução.

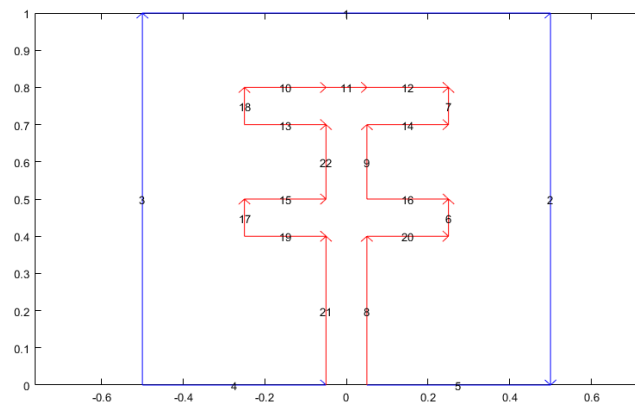


Figura 2. Condições de contorno das paredes do perfil duplo T.

5. Independência de malha

Para a malha ser gerada, deve-se na ferramenta ir na guia “Mesh” e selecionar a opção “Initialize Mesh”. A malha gerada é em coordenadas triangulares e na parte inferior consta a quantidade de nós e de elementos que a malha possui.

Esta malha deve ter uma atenção especial em seu tratamento. Isto porque a baixa quantidade de nós/elementos, pode levar a resultados imprecisos. À medida que se aumenta a quantidade de pontos, a malha é refinada, fazendo com que os resultados converjam para um valor.

A busca é por uma condição de independência de malha, onde a diferença das temperaturas máximas de refinamentos subsequentes seja bem pequena.

Matematicamente essa condição de independência é expressa pela Equação (7), e usualmente na literatura é comum a utilização de valores na ordem de 10^{-4} .

$$R = \frac{|T_{max}^{j+1} - T_{max}^j|}{T_{max}^j} < 5 \cdot 10^{-4} \quad (7)$$

Foi feito o teste de independência de malha para ambos os perfis aplicando condutividade térmica de $k=1 \text{ W/(mK)}$ e geração de calor de $q'''=1 \text{ W/m}^3$. Exportando as temperaturas máximas e aplicando a expressão acima. O resultado para independência de malha está nas Tabela 2 e Tabela 3 abaixo:

Tabela 2. Independência de malha para perfil duplo T

	$R= (T_{j+1})-(T_j) /T_j < 5 \times 10^{-4}$						
Quant. Nós	181	648	2443	9477	3732	148113	590113
Tmax	0,069210	0,070201	0,070617	0,070790	0,070861	0,070890	0,070902
		0,014315	0,005928	0,002452	0,001005	0,000408	0,000165

Fonte: O autor

Tabela 3. Independência de malha para perfil aleta invertida

	$R= (T_{j+1})-(T_j) /T_j < 5 \times 10^{-4}$						
Quant. Nós	188	671	2525	9785	38513	152801	608705
Tmax	0,039508	0,040512	0,040922	0,041086	0,041152	0,041177	0,041188
		0,025411	0,010133	0,004006	0,001586	0,000629	0,000250

Fonte: O autor

A própria figura gerada da malha refinada quando comparada a malha inicializada demonstra o refino, se torna impossível sem o zoom visualizar os elementos e os nós independentemente, Figura 3.

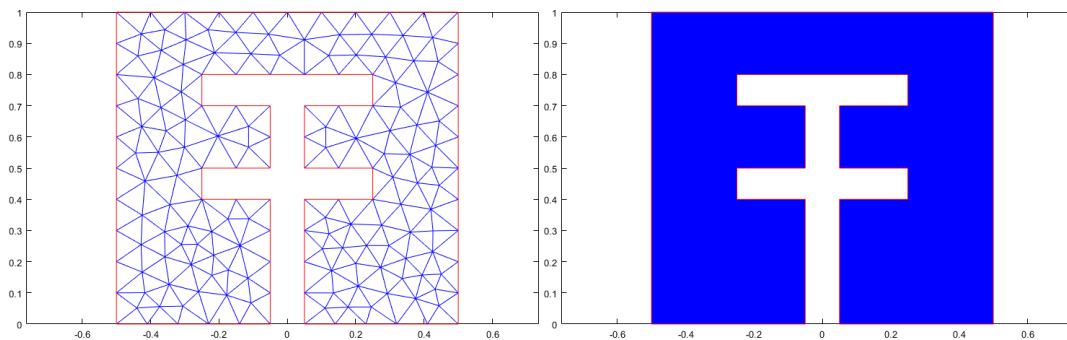


Figura 3. Comparação da malha inicializada e da malha refinada

Com todo o problema já descrito no software, configura-se o Plot para gerar a representação da solução. Para colormap foi selecionada a opção “jet”, e ainda se determinou que aparecesse flechas no sentido do fluxo de calor.

Após a simulação, exporta-se o resultado nomeado com alguma letra, uma variável u, por exemplo. Para analisar a capacidade de resfriamento utiliza-se esse dado exportado para tirar o “max(u)” na janela de comando do MATLAB, e assim poder determinar a melhor geometria para o resfriamento.

6. Resultados

Dentre os resultados obtidos, é importante dizer que em relação ao sentido do fluxo de

calor, não houve variação dentro de cada geometria. Mas as distribuições do campo de temperatura e as temperaturas máximas para cada condição foram se alterando de acordo com as iterações. Naturalmente sabe-se o comportamento em linhas gerais, quanto maior a geração de calor maior a temperatura máxima, e quanto maior a condutividade térmica menor a temperatura máxima obtida.

As tabelas que nos interessam no resultado é exatamente as temperaturas máximas para as 50 iterações em condição de independência de malha para cada geometria, onde pode-se verificar exatamente as condições ditas de acréscimo e decréscimo da temperatura máxima em função da condutividade térmica e do termo de geração de energia. Na Tabela 4, estão representados os resultados de temperatura máxima para o perfil duplo T. E na Tabela 5, estão representados os resultados de temperatura máxima para o perfil aleta invertido.

Tabela 4. Temperaturas máximas nas iterações para o perfil duplo T.

		q''' [W/m ³]				
		1	5	10	50	100
k [W/(mK)]	1	0.0709017513350	0.3545087566752	0.7090175133505	3.5450875667529	7.0901751335058
	2	0.0354508756675	0.1772543783376	0.3545087566752	1.7725437833762	3.5450875667525
	3	0.0236339171116	0.1181695855584	0.2363391711168	1.1816958555840	2.3633917111681
	4	0.0177254378337	0.0886271891688	0.1772543783376	0.8862718916882	1.7725437833764
	5	0.0141803502670	0.0709017513350	0.1418035026700	0.7090175133501	1.4180350267003
	6	0.0118169585558	0.0590847927792	0.1181695855584	0.5908479277920	1.1816958555840
	7	0.0101288216192	0.0506441080964	0.1012882161928	0.5064410809644	1.0128821619288
	8	0.0088627189168	0.0443135945844	0.0886271891688	0.4431359458440	0.8862718916881
	9	0.0078779723705	0.0393898618527	0.0787797237055	0.3938986185277	0.7877972370554
	10	0.0070901751335	0.0354508756675	0.0709017513350	0.3545087566751	0.7090175133502

Fonte: O autor

Tabela 5. Temperaturas máximas nas iterações para o perfil aleta invertido.

		q''' [W/m ³]				
		1	5	10	50	100
k [W/(mK)]	1	0.0411876752512	0.2059383762562	0.4118767525124	2.0593837625623	4.1187675251247
	2	0.0205938376256	0.1029691881280	0.2059383762561	1.0296918812808	2.0593837625616
	3	0.0137292250837	0.0686461254186	0.1372922508373	0.6864612541869	1.3729225083738
	4	0.0102969188128	0.0514845940640	0.1029691881281	0.5148459406405	1.0296918812811
	5	0.0082375350502	0.0411876752512	0.0823753505024	0.4118767525121	0.8237535050243
	6	0.0068646125418	0.0343230627093	0.0686461254186	0.3432306270934	0.6864612541869
	7	0.0058839536073	0.0294197680365	0.0588395360731	0.2941976803658	0.5883953607316
	8	0.0051484594064	0.0257422970320	0.0514845940640	0.2574229703202	0.5148459406404
	9	0.0045764083612	0.0228820418062	0.0457640836124	0.2288204180624	0.4576408361248
	10	0.0041187675251	0.0205938376256	0.0411876752512	0.2059383762560	0.4118767525121

Fonte: O autor

Em relação as plotagens gráficas foram obtidas todas as 100 imagens, iteração por iteração foi gerada as imagens do campo de temperatura. Na Figura 4 estão as imagens do campo de temperatura para condutividade de $k=1$ [W/(mK)] e $q'''=100$ [W/m³], para o perfil duplo T, e para o perfil aleta invertido.

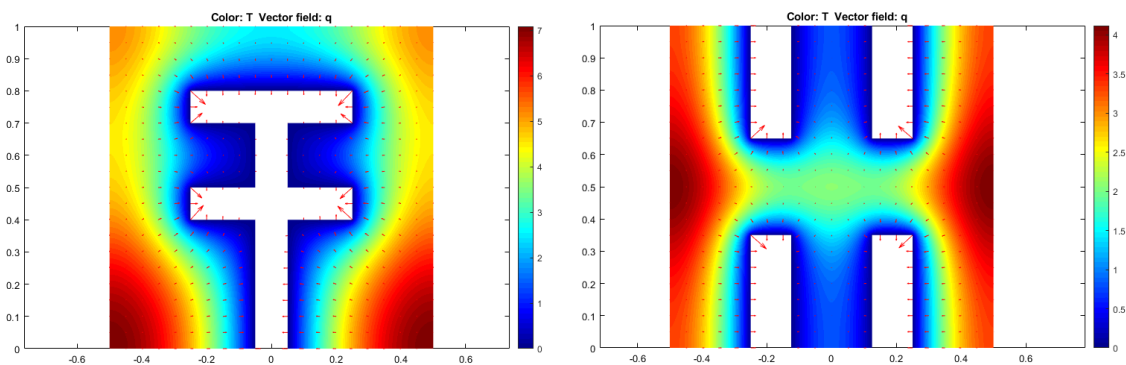


Figura 4. Campo de temperatura

7. Conclusão

A primeira conclusão sobre os resultados obtidos é exatamente na ‘espinha dorsal’ da proposta de análise. Há uma geometria mais eficiente para cavidades de resfriamento em corpos com geração de energia. Essa relação pode ser verificada em qualquer uma das 50 iterações. Em todas estas iterações a temperatura máxima do perfil 2 (aleta invertida), é menor que a do perfil 1 (duplo T). Fazendo uma razão entre resultados obtidos sob a mesma condição, a temperatura máxima do perfil 2, equivale a aproximadamente 58% da temperatura máxima do perfil 1. Isso significa um ganho de eficiente substancial se tratando por exemplo, na aproximação de problemas reais, no resfriamento de componentes eletrônicos. De certa forma era um resultado esperado (talvez não desta forma discrepante), isto por que no perfil 1 é possível caracterizar as cavidades muito concentradas no centro, os traços horizontais criam uma região mais fria, e o calor fica concentrado nas regiões periféricas. Enquanto isso no perfil 2, as cavidades estão distribuídas de maneira mais homogênea, o perfil é simétrico tanto em x como em y.

Uma outra conclusão, é que mesmo sendo o perfil de aleta invertida melhor nesse contexto, ele apresenta nas laterais em região central, uma concentração de temperaturas mais elevadas, pela indicação da escala é exatamente onde está a T_{max} . O teorema de construtal, ou mesmo a inserção de uma área virtual igual para todos os lados cujo a distribuição do campo de temperatura ficasse mais homogênea sobre toda a extensão da peça, seria uma melhoria significativa nesta geometria, e, portanto, este estudo surge nesta conclusão como uma ideia de desenvolvimento futuro, aplicando design construtal até mesmo para ambas as geometrias.

Sobre a equação diferencial da difusão do calor, é factível retirar várias conclusões, em especial pode-se atentar para a maneira que a mesma está escrita na Equação 5. Observa-se que para o termo de geração de energia dividido pela condutividade térmica, tem-se exatamente o mesmo campo de temperatura para quando esta razão for igual. A maneira mais fácil de se observar esta constatação é nas temperaturas máximas nas condições em que numericamente $k=q'''$, nelas tem exatamente o mesmo valor numérico de T_{max} . E na Figura 5, está a imagem dos campos de temperatura para o perfil T sob condição $k=q'''=1$ e $k=q'''=5$, para exemplificar o que foi dito.

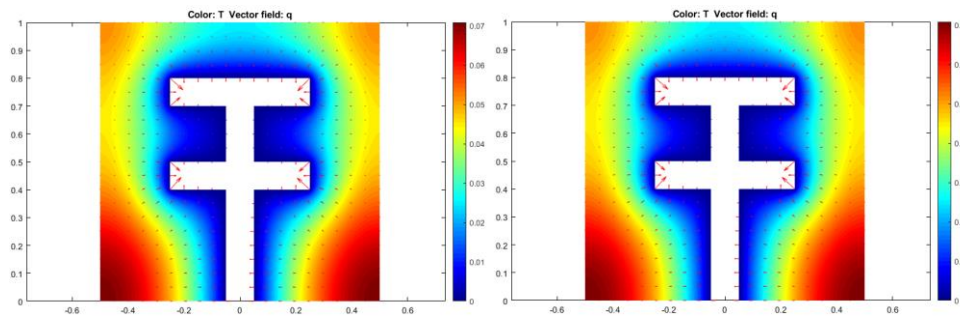


Figura 5. À esquerda $k=q'''=1$, à direita $k=q'''=5$, perfil duplo T

Como verificado, as distribuições, a escala, o fluxo são exatamente iguais. Embora aparente ser uma imagem duplicada, foi gerada sob condições diferentes de condutividade térmica e geração de calor. Neste sentido é uma conclusão importante a fazer e os valores a se observar em trabalhos de difusão de calor. Dependendo das escolhas dos valores a análise se torna insuficiente, pois apenas está repetindo a resolução numérica exatamente da mesma equação diferencial parcial.

Voltando agora para a parte do fluxo de calor pode-se observar que as indicações de fluxo convergem para a cavidade, e logicamente é isso que se espera, quente para o frio. Mas é importante observar os cantos vivos das geometrias. Observando que em determinados cantos vivos, são maiores as setas de fluxo de calor que se encontram diagonalmente adentrando na cavidade. Isso é um comportamento esperado, as pontas são nós que cruzam duas direções, se o canto vivo estiver localizado para o ponto de maior temperatura na geometria, este ponto tende a receber uma parcela de fluxo convergente de x e outra de y. E no geral são sempre nos cantos vivos mais próximos ao local de T_{max} que se desenvolve a maior indicação do fluxo de calor.

Ainda se tratando do fluxo de calor, é possível fazer uma constatação curiosa, que pode ser obtida ao comparar um perfil sob as mesmas condições numa condição de malha inicial e numa condição de refino de malha. Se observar a Figura 6, malha inicial do perfil duplo T, as setas que indicam o fluxo de calor na malha inicial são maiores que na malha refinada. Na verdade isso vem da grandeza vetorial associada a essa seta que indica o fluxo de calor. À medida que se aumenta o refino da malha melhora a obtenção de temperatura máxima e fluxo de calor obtendo campo vetorial mais congruente.

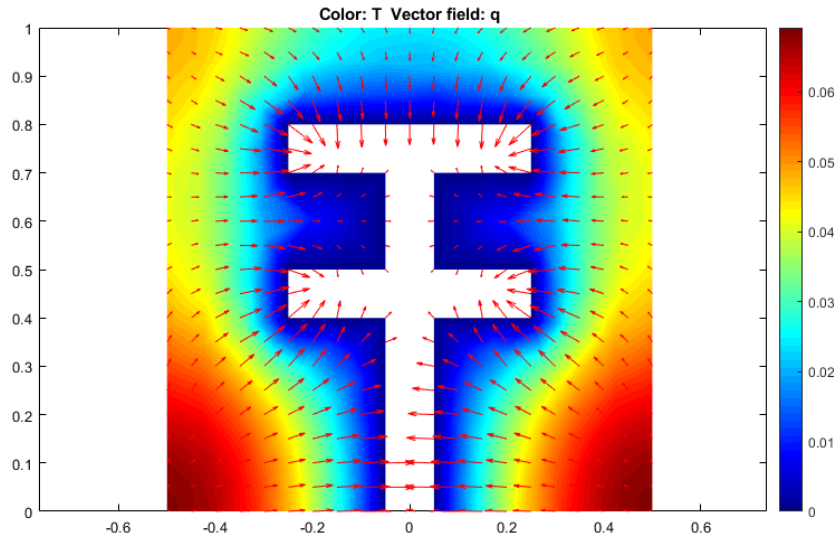


Figura 6. Flexas de fluxo, $k=q'''=1$, 181 nós, perfil duplo T

Uma última conclusão que pode ser percebida pela tabela de resultados de T_{max} , é que os efeitos da condutividade e da geração de calor são lineares na iteração apenas dessas duas variáveis. Já é uma interpretação implícita na observação do termo de geração de energia dividido pela condutividade térmica, mas é importante dar um destaque especial, pois a amplitude de simulações feitas é exatamente para poder extrapolar para outros valores sob a mesma geometria. Vê-se nas figuras abaixo a escala do campo de temperatura exatamente 100 vezes menor para as condições do perfil aleta invertida com condições $k=5[W/(mK)]$ e $q'''=1[W/m^3]$, comparado com condições $k=5[W/(mK)]$ e $q'''=100[W/m^3]$, Figura 7.

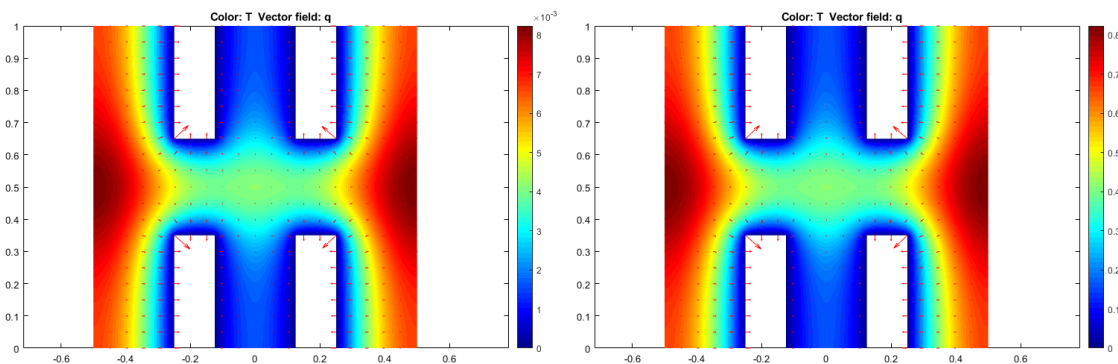


Figura 7. Campo de temperatura, $q'''=1$ (esquerda), $q'''=100$ (direita).

Portanto a simulação numérica dos problemas de difusão do calor, se torna uma ferramenta muito eficiente, seja para facilitar as soluções analíticas, seja para acelerar as análises iterativas. É uma ferramenta de fácil uso, de uma simplicidade na interface que facilita as determinações das condições de contorno e das hipóteses simplificativas e que ao mesmo tempo resolve de maneira satisfatória a robustez matemática imposta pelo problema. A análise geométrica pelos resultados obtidos se mostra muito válida principalmente por ser um parâmetro de projeto que pode ser mudado com prévio estudo anterior, de maneira satisfatória a atender as necessidades do problema real. Esses parâmetros geométricos é um campo forte de exploração teórica da difusão do calor, ainda mais quando associada a outras teorias de otimização e implementação de configurações e dimensões das mesmas.

Referências

- ALMOGBEL, M & BEJAN, A.** *Conduction trees with spacings at the tips.* International Journal of Heat and Mass Transfer Vol. 42, n. 20, p. 3739-3756, out. 1999.
- BEJAN, A.** *Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume.* International Journal of Heat and Mass Transfer Vol. 40, n. 4, p. 799-816, mar. 1997.
- BEJAN, A.** *Shape and structure from engineering to nature.* Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.
- BEJAN, A. & LORENTE, S.** *Design with Constructal Theory.* Hoboken, EUA: John Wiley & Sons, 2008.
- HORBACH, C. S.; SANTOS, E. D.; ISOLDI, L. A. & ROCHA, L. A. O.** *Constructal Design of Y-Shaped Conductive Pathways for Cooling a Heat-Generating Body.* Defect And Diffusion Forum, Vol. 348, p. 245-260, jan. 2014.
- INCROPERA, F. P. & DEWITT, D. P.** *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa.* 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- LORENZINI, G.; BISERNI, C. & ROCHA, L.A.O.** *Constructal design of X-shaped conductive pathways for cooling a heat-generating body.* International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 58, n. 1-2, p. 513-520, mar. 2013a.
- LORENZINI, G.; BISERNI, C. & ROCHA, L.A.O.** *Constructal design of non-uniform X-shaped conductive pathways for cooling.* International Journal of Thermal Sciences, Vol. 71, p. 140-147, set. 2013b.