

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS APLICADO À FLAMBAGEM DE COLUNAS

Rafael Mansano Holanda (UFPA) E-mail: rafael.holanda@ig.ufpa.br

Selênio Feio da Silva (UFPA) E-mail: selenio@ufpa.br

Resumo: A flambagem é um fenômeno atuante em estruturas esbeltas que pode provocar o colapso desses elementos sem aviso prévio. Logo, a realização de uma análise de estabilidade à flambagem é imprescindível para o dimensionamento de colunas. Na engenharia, o fenômeno da flambagem pode ser representado por um modelo matemático (equações diferenciais). Existem diversos problemas que são representados por equações diferenciais, e o fenômeno da flambagem é um deles. O Método das Diferenças Finitas é um método numérico para soluções de equações diferenciais em que as derivadas são aproximadas por fórmulas de diferenças finitas. Nesse contexto, este artigo apresenta um código computacional via Método das Diferenças Finitas (MDF.F90), implementado em linguagem de programação FORTRAN, capaz de calcular a carga crítica de flambagem, solicitada por um esforço axial de compressão, partindo da equação da linha elástica de uma viga. Através dos resultados obtidos e com as aplicações feitas para a validação da ferramenta computacional, verificou-se que esta foi capaz de resolver os problemas analisados, fornecendo resultados convergentes com a solução analítica.

Palavras-chave: Colunas. Flambagem. Método de Diferenças Finitas. FORTRAN.

FINITE DIFFERENCES METHOD APPLIED TO BUCKLING OF COLUMNS

Abstract: Buckling is a phenomenon acting on slender structures that can cause these elements to collapse without prior warning. Therefore, performing a buckling stability analysis is essential for the sizing of columns. In engineering, the buckling phenomenon can be represented by a mathematical model (differential equations). There are several problems that are represented by differential equations, and the phenomenon of buckling is one of them. The Finite Difference Method is a numerical method for solving differential equations in which the derivatives are approximated by finite difference formulas. In this context, this article presents a computational code via the Finite Difference Method (MDF.F90), implemented in the FORTRAN programming language, capable of calculating the critical buckling load, required by an axial compression effort, based on the elastic line equation of a beam. Through the obtained results and with the applications made for the validation of the computational tool, it was verified that it was able to solve the analyzed problems, providing convergent results with the analytical solution.

Keywords: Columns. Buckling. Finite Differences Method. FORTRAN.

1. Introdução

Na engenharia, há vários problemas que são representados por fenômenos físicos e que podem ser representados em equações diferenciais. Algumas dessas equações possuem solução analíticas, outras não. Nesse contexto, a utilização de ferramentas computacionais para a resolução dos problemas de engenharia, tornou-se indispensável, devido aos ganhos em termos de produtividade e com a garantia da redução de falhas das operações de cálculos manuais.

O Método das Diferenças Finitas é um método numérico para soluções de equações diferenciais em que as derivadas são aproximadas por fórmulas de diferenças finitas (RUGGIERO e LOPES, 1996). Como exemplos de aplicação do MDF para solução de problemas de engenharia, há trabalhos como: Asakura e Soares (1988), Gonçalves (2017), Dutra e Tarrillo (2020), Andrade e Parnafba (2019) e Silva e Soares (2011).

Portanto, este artigo trata da solução para o problema de flambagem de colunas devido a atuação de uma carga. Para isso, foi utilizado o Método das Diferenças Finitas e, partindo da equação da linha elástica de uma viga, desenvolveu-se um código na linguagem de programação FORTRAN capaz de fornecer o valor da carga crítica de flambagem. As soluções obtidas pela ferramenta computacional MDF.F90, desenvolvida pelos autores, foram submetidas à validação, através da comparação com o resultado analítico.

2. Fundamentos Teóricos

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), os elementos lineares são aqueles em que o comprimento longitudinal supera em pelo menos três vezes a maior dimensão da seção transversal. Os exemplos mais comuns são as vigas e as colunas.

2.2 Flambagem de Colunas

As colunas são elementos estruturais lineares submetidos majoritariamente a carregamentos axiais de compressão. A carga axial aplicada nas colunas pode gerar um fenômeno conhecido como flambagem, que consiste no deslocamento ou uma oscilação lateral da estrutura, correspondendo, portanto, a um fenômeno instável. Esse fenômeno deve ser evitado, pois resulta numa falha repentina e “dramática” de uma estrutura, sendo necessário dedicar especial atenção ao projeto de colunas para que estas possam suportar com segurança as cargas pretendidas (HIBBELER, 2010).

A flambagem ocorre comumente nas estruturas esbeltas em torno do eixo de sua seção transversal que tem menor momento de inércia, decorrente de um esforço de compressão axial (Figura 1). Considerando uma coluna perfeitamente reta antes de receber o carregamento, feita de material homogêneo e na qual a carga é aplicada no centroide da seção transversal, a mesma comporta-se de uma maneira linear elástica e a flambagem ocorre em um único plano (HIBBELER, 2010).

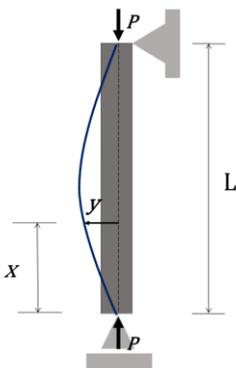


Figura 1 – Comportamento de uma coluna perfeitamente reta e constituída de material homogêneo com a aplicação de uma carga axial. Fonte: Dos autores.

De acordo com Hibbeler (2010), a carga axial máxima que uma coluna pode suportar imediatamente antes do início da flambagem é chamada de carga crítica. Em situações em que onde não há variações na seção transversal e de material, ao longo do comprimento do elemento estrutural, a carga crítica e a forma da coluna quando flambada são determinadas por meio da seguinte equação, que relaciona o momento interno na coluna com sua forma defletida:

$$EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = M \quad (1)$$

sendo; E : módulo de elasticidade para o material; I : menor momento de inércia axial para a área da seção transversal da viga; y : flecha da viga; M : momento fletor da viga.

Considerando $M = -P \cdot y$ e $k^2 = P/EI$, em que k é sempre tomado como uma quantidade positiva, chega-se na seguinte equação:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + k^2 y(x) = 0 \quad (2)$$

Por tratar-se de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, a solução da mesma é dada por (HIBBELER, 2010):

$$y(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (3)$$

Para calcular as constantes de integração da equação (3), utiliza-se as condições de contorno nas extremidades da coluna; dessa forma, a deflexão é zero quando $x = 0$ e $x = L$, logo, $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$. Essas condições de contorno fornecem as equações (4) e (5).

$$y(x) = C_1 \sin kx \quad (4)$$

$$C_1 \sin kL = 0 \quad (5)$$

Dessa maneira, conclui-se que $C_1 = 0$ ou $kL = 0$. Caso a constante C_1 for igual a zero, a deflexão $y(x)$ também será zero, e por isso a coluna permanece reta. Ainda, se C_1 for igual a zero, a equação (5) estará satisfeita para qualquer valor da quantidade kL . Portanto, o carregamento axial P pode também ter qualquer valor (solução trivial).

A segunda possibilidade para satisfazer a equação (5) é dada pela equação a seguir, conhecida como equação de flambagem:

$$\sin kL = 0 \quad (6)$$

A equação (6) é satisfeita quando $kL = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$. Sendo $kL = 0$, significa que $P = 0$, logo essa solução não é de interesse. De acordo com Hibbeler (2010), considerando $kL = n\pi$, o menor valor de P é obtido quando $n = 1$, de modo que a carga crítica para a coluna é:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (7)$$

sendo P_{cr} : carga crítica ou carga axial máxima sobre a coluna na iminência de sofrer flambagem; L : comprimento da coluna sem apoio, cujas extremidades estejam presas por pinos.

2.2 Formulação Básica do Método das Diferenças Finitas

O Método das Diferenças Finitas consiste em discretizar o contínuo em um sistema discreto composto de uma malha geométrica, diminuindo o número de variáveis do problema a uma quantidade finita (Figura 2).

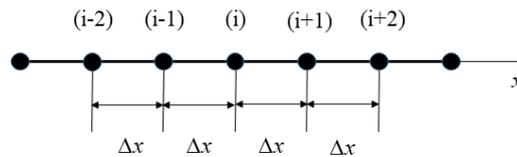


Figura 2 - Malha de diferenças finitas. Dos autores.

Nesse método, as derivadas que aparecem na definição das condições de contorno são aproximadas por diferenças envolvendo o valor que a função incógnita adota num conjunto de pontos igualmente espaçados, aos quais se denomina nós da discretização (CASTRO, 2001). Essas formas de diferenças finitas que substituem as derivadas de uma equação diferencial são obtidas pela expansão em série de Taylor e truncamento ao nível da ordem do erro desejada (SILVA e PEDROSO, 2005), conforme a equação (8).

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(x - a)^{n-1}}{(n - 1)!} + R_n \quad (8)$$

O resto R_n pode ser definido pela forma de Lagrange ou Cauchy, conforme as equações (9) e (10), respectivamente:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)(x - a)^n}{(n)!} \quad (9)$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)(x - \xi)^{n-1}(x - a)}{(n - 1)!} \quad (10)$$

A série é infinita, se $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, e é denominada de série de Taylor para $f(x)$ em $x = a$. Caso $x = 0$, a série é chamada de série de Maclaurin. Essas séries, chamadas de séries de potências, convergem para todos os valores de x em algum intervalo de convergência e divergem para todos os valores de x fora desse intervalo (SILVA, 2008).

A partir da equação (8), pode-se obter:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f (\Delta x)^2}{2!} + \frac{d^3 f (\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (11)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \frac{d^2 f}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f (\Delta x)^2}{2!} - \frac{d^3 f (\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (12)$$

Considerando com dois termos das séries e operando algebricamente as equações (11) menos (12), obtém-se:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (13)$$

Considerando $y = f(x)$ e usando a notação indicial, obtém-se o operador em diferenças finitas central para a primeira derivada (Figura 3), conforme a equação (14). Da mesma maneira, o operador em diferenças finitas para a segunda derivada pode ser obtido somando as equações (11) e (12) com os três primeiros termos da série, fornecendo a equação (15):

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \quad (14)$$

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (15)$$

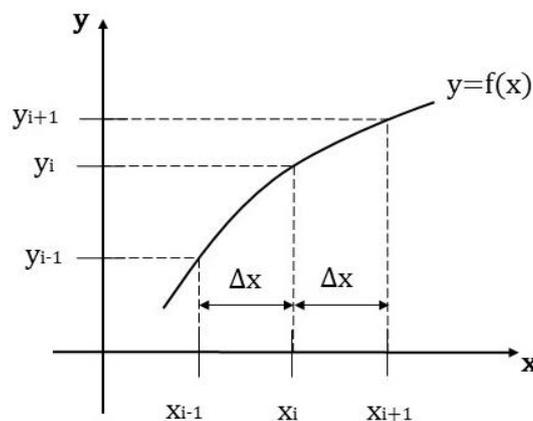


Figura 3 – Aproximação de uma função $y=f(x)$ por diferenças finitas. Fonte: Dos autores.

As condições de contorno no método das diferenças finitas têm a função de diminuir o número de variáveis no sistema de equações, através de valores conhecidos no ponto e relacionando pontos fora do elemento linear (nós artificiais da malha de diferenças finitas) a pontos no seu interior, levando a um sistema de equações possível determinado para problemas estáticos.

Para apoios do primeiro e segundo gênero, a flecha (y_i) e o momento (y''_i) no apoio é

zero, logo: $y_i = 0$ e $y_i'' = 0 \rightarrow y_{i+1} = -y_{i-1}$.

2.3 Solução da equação da curva elástica pelo método das diferenças finitas

Para determinar a solução da equação (1) utilizando procedimento numérico, a fim de encontrar uma solução aproximada, pode-se utilizar o Método das Diferenças Finitas.

Dessa maneira, admite-se calcular o valor aproximado da derivada segunda de uma função, conhecendo-se seus valores em três pontos: “passado, presente e futuro”. Aplicando a equação (15) na equação (1), obtém-se:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + k^2 y_i = 0 \quad (16)$$

Considerando, $\alpha = (2 - \Delta x^2 k^2)$, a equação (16) pode ser escrita como:

$$y_{i-1} - \alpha y_i + y_{i+1} = 0 \quad (17)$$

3. Metodologia

Realizou-se uma pesquisa descritiva que envolveu um levantamento bibliográfico sobre o fenômeno de flambagem, o Método das Diferenças Finitas e a linguagem de programação FORTRAN. Após a construção de um arcabouço bibliográfico, a equação diferencial da curva de deflexão de uma viga foi formulada via Método das Diferenças Finitas e se desenvolveu um código (MDF.F90, desenvolvida pelo autor) capaz de calcular a carga crítica adimensional de flambagem de colunas. Para a validação do código, utilizou-se a solução analítica e, por último, realizou-se a plotagem dos gráficos das cargas críticas.

A formulação numérica seguiu três estágios. O primeiro estágio consistiu na formulação e escolha do método numérico apropriado ao problema analisado. Compreendido o modelo teórico diferencial, efetivou-se a aproximação da equação diferencial por expressões discretas. No segundo estágio, aplicou-se o operador de diferenças finitas em cada ponto contido no domínio discreto, gerando, assim, um sistema linear algébrico matricial. A solução deste sistema de equações foi realizada através do método de Jacobi. No terceiro estágio ocorreu o processo de tratamento, análise, validação dos resultados obtidos em comparação com valores de referência (solução analítica) e cálculo do erro relativo.

Portanto, a obtenção do valor da carga crítica adimensional de flambagem segue ao roteiro:

- Passo 1: Inserir o dado de entrada (número de nós da malha);
- Passo 2: Dividir o comprimento da coluna $0 \leq x \leq L$, em n partes segundo a sua configuração;
- Passo 3: Aplicar a fórmula da diferença central nos pontos da divisão e as condições de contorno no sistema matricial montado, obtendo um sistema de equações algébricas lineares que relacionam os valores de y nos pontos da divisão;

- Passo 4: Resolver o sistema linear de equações algébricas obtido, através do método de Jacobi, encontrando o maior valor de autovalor (α);
- Passo 5: Determinar o valor da carga crítica adimensional (ρ) de flambagem, a partir de $\alpha = (2 - \Delta x^2 k^2)$, onde se obtém $\rho = (2 - \alpha) n^2$.

O seguinte fluxograma ilustra as etapas do processo que o programa MDF.F90 efetiva para o cálculo da carga crítica adimensional de flambagem (Figura 4).

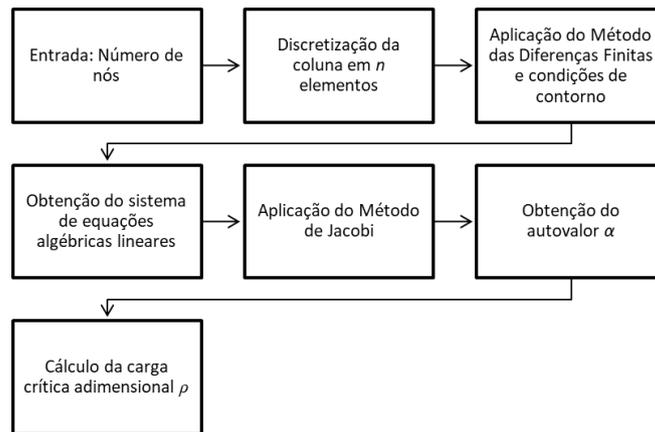


Figura 4 - Etapas do processo do programa MDF.F90 para o cálculo da carga crítica adimensional de flambagem. Fonte: Dos autores.

4. Estudo de caso: Resultados

Para a obtenção da solução numérica, aplicou-se o código computacional MDF.F90, implementado em linguagem de programação FORTRAN, para calcular o valor da carga crítica de uma coluna biapoçada de comprimento L, assumindo que a rigidez à flexão (EI) é constante ao longo do comprimento. Foi adotada uma previsão de quatro casas decimais.

Considerando uma discretização de quatro nós, conforme a Figura 4, e substituindo $i = 1$ e $i = 2$ na equação (17), obtém-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned}
 \text{Para } i = 1: y_0 - \alpha y_1 + y_2 &= 0 \\
 \text{Para } i = 2: y_1 - \alpha y_2 + y_3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

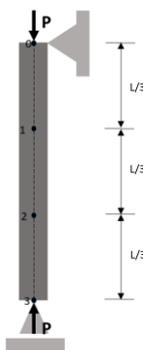


Figura 4 - Coluna biapoçada e discretizada com quatro nós em diferenças finitas. Fonte: Dos autores.

Aplicando as condições de contorno a vinculação do tipo biapoçada no sistema de equações lineares acima, onde $i = 0 \ T \ y_0 = 0$ e para $i = 3 \ T \ y_3 = 0$, resulta em:

$$\begin{cases} -\alpha y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha y_2 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

Após a obtenção do autovalor α pelo método de Jacobi, o código computacional calculou o valor de carga crítica adimensional através da equação $\rho = (2 - \alpha) n^2$, fornecendo o valor de 9.0000, conforme Figura 5.

```
O programa tem a finalidade de determinar o deslocamento maximo para a viga e
a carga crítica adimensional para flambagem em uma coluna,com base no metodo numerico das diferencas finitas.
Numero de nos      4
Matriz de coeficientes A da coluna:
0.00  1.00
1.00  0.00
Calculando os autovalores da Matriz A pelo metodo de Jacobi
Autovalores da matriz A:  1.0000  -1.0000
Valor de alfa:  1.0000
Valor da carga critica:  9.0000
```

Figura 5 - Resultados fornecidos pelo simulador em Fortran para coluna biapoçada discretizada em quatro nós. Fonte: Dos autores.

Considerando uma discretização de cinco nós, conforme a Figura 6, e substituindo $i = 1$, $i = 2$ e $i = 3$ na equação (17), obtém-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} \text{Para } i = 1: y_0 - \alpha y_1 + y_2 &= 0 \\ \text{Para } i = 2: y_1 - \alpha y_2 + y_3 &= 0 \\ \text{Para } i = 3: y_2 - \alpha y_3 + y_4 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

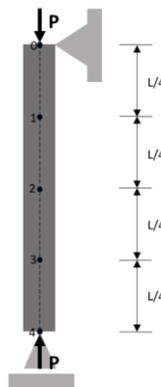


Figura 6 - Coluna biapoçada e discretizada com cinco nós em diferenças finitas. Fonte: Dos autores.

Aplicando as condições de contorno para a vinculação do tipo biapoçada no sistema de equações lineares acima, onde $i = 0 \ T \ y_0 = 0$ e $i = 4 \ T \ y_4 = 0$, resulta em:

$$\begin{cases} -\alpha y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 - \alpha y_3 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

Após a obtenção do autovalor α pelo método de Jacobi, o código computacional calculou o valor de carga crítica adimensional através da equação $\rho = (2 - \alpha) n^2$, fornecendo o valor de 9.3726, conforme Figura 7.

```
O programa tem a finalidade de determinar o deslocamento maximo para a viga e
a carga crítica adimensional para flambagem em uma coluna, com base no metodo numerico das diferencas finitas.
Numero de nos          5
Matriz de coeficientes A da coluna:
 0.00  1.00  0.00
 1.00  0.00  1.00
 0.00  1.00  0.00
Calculando os autovalores da Matriz A pelo metodo de Jacobi
Autovalores da matriz A:  0.0000  -1.4142  1.4142
Valor de alfa:  1.4142
Valor da carga critica:  9.3726
```

Figura 7 - Resultados fornecidos pelo simulador em Fortran para coluna biapoçada discretizada em cinco nós. Fonte: Dos autores.

Considerando uma discretização de seis nós, conforme a Figura 8, e substituindo $i = 1, i = 2, i = 3$ e $i = 4$ na equação (17), obtém-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} \text{Para } i = 1: & y_0 - \alpha y_1 + y_2 = 0 \\ \text{Para } i = 2: & y_1 - \alpha y_2 + y_3 = 0 \\ \text{Para } i = 3: & y_2 - \alpha y_3 + y_4 = 0 \\ \text{Para } i = 4: & y_3 - \alpha y_4 + y_5 = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

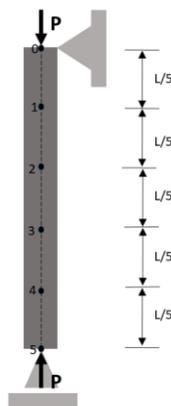


Figura 8 - Coluna biapoçada e discretizada com seis nós em diferenças finitas. Fonte: Dos autores.

Aplicando as condições de contorno para a vinculação do tipo biapoçada no sistema de

equações lineares acima, onde $i = 0 \text{ T } y_0 = 0$ e $i = 5 \text{ T } y_5 = 0$, resulta em:

$$\begin{cases} -\alpha y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 - \alpha y_3 + y_4 = 0 \\ y_3 - \alpha y_4 = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

Após a obtenção do autovalor α pelo método de Jacobi, o código computacional calculou o valor de carga crítica adimensional através da equação $\rho = (2 - \alpha) n^2$, fornecendo o valor de 9.5491, conforme Figura 9.

```
O programa tem a finalidade de determinar o deslocamento maximo para a viga e
a carga crítica adimensional para flambagem em uma coluna,com base no metodo numerico das diferencas finitas.
Numero de nos          6
Matriz de coeficientes A da coluna:
0.00 1.00 0.00 0.00
1.00 0.00 1.00 0.00
0.00 1.00 0.00 1.00
0.00 0.00 1.00 0.00
Calculando os autovalores da Matriz A pelo metodo de Jacobi
Autovalores da matriz A: -0.6180  0.6180 -1.6180  1.6180
Valor de alfa: 1.6180
Valor da carga critica: 9.5491
```

Figura 9 - Resultados fornecidos pelo simulador em Fortran para coluna biapoiada discretizada em seis nós. Fonte: Dos autores.

A convergência do MDF no cálculo da carga crítica adimensional, para uma coluna biapoiada, considerando diferentes números de divisões do elemento, é ilustrada na Tabela 1.

Tabela 1 - Resultados do MDF no cálculo da carga crítica adimensional para coluna biapoçada. Fonte: Dos autores.

Carga Crítica Adimensional de Flambagem (ρ)			Erro Relativo
Solução analítica	Nº de nós	MDF.F90	
9,8696	3	8,0000	18,94%
	4	9,0000	8,81%
	5	9,3726	5,04%
	6	9,5491	3,25%
	7	9,6462	2,26%
	8	9,7051	1,67%
	9	9,7435	1,28%
	10	9,7698	1,01%
	11	9,7887	0,82%
	21	9,8028	0,68%
	51	9,8514	0,18%
	52	9,8681	0,02%

Na Figura 10 observa-se a convergência e o erro relativo através da comparação entre os resultados do método numérico e analítico, respectivamente.

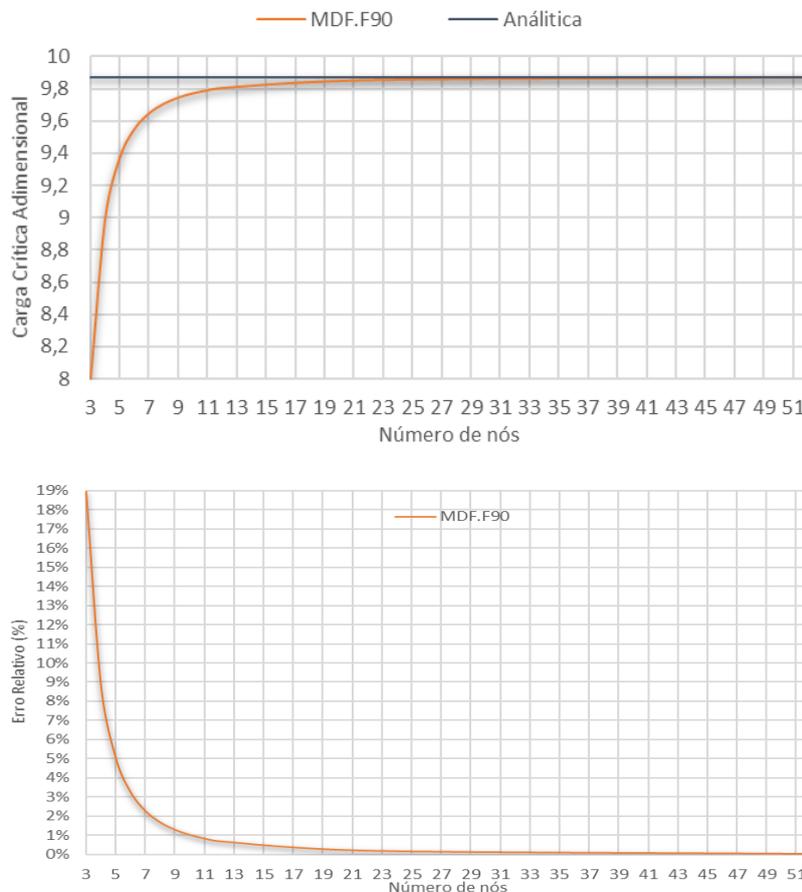


Figura 10 – Acima: a convergência do MDF.F90 no cálculo da carga crítica adimensional para uma coluna biapoçada, comparando com a solução analítica. Abaixo: erro relativo entre as soluções analítica e numérica para a convergência do MDF.F90 no cálculo da carga. Fonte: Dos autores.

5. Conclusões

O MDF.F90 apresentou-se eficaz para a determinação das cargas críticas adimensionais de flambagem de pilares. Os resultados obtidos mostraram-se compatíveis com os valores esperados da literatura. Ainda, após a obtenção dos dados, foi possível confeccionar gráficos de cargas críticas adimensionais.

Observou-se que, conforme ocorre o aumento do número de nós na discretização da coluna, o erro relativo diminui e o valor numérico aproxima-se cada vez mais da solução analítica.

Portanto, considerando esses resultados, percebeu-se que a aplicação da experimentação numérica via Método das Diferenças Finitas nos modelos diferenciais clássicos de pilares proporcionou um desempenho satisfatório, devido ao baixo custo computacional associado e geração de resultados com erros mínimos no que se refere à ordem de grandeza.

Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118:2014 Projetos de estruturas de concreto – Procedimento.* Rio de Janeiro, 2014.

ANDRADE, P. L.; PARNAIBA, M. A. *Análise da estabilidade de colunas com variação da seção transversal e/ou módulo de elasticidade via Método das Diferenças Finitas.* Revista Principia, n. 46, p. 61-69, 2019.

ASAKURA, O K N; SOARES, C. A. *Cargas de flambagem pelo método das diferenças finitas.* Anais.. São Carlos: Eesc-Usp/Cetepe, 1988.

CASTRO, L.M.S. *Análise de vigas em fundação elástica.* Apontamentos da disciplina de Matemática Aplicada da EST-IPCB, 2001, 20 p.

DUTRA, D. T. F.; TARRILO, C. A. M. *Analysis of the Finite Differences Numerical Method and Method Analysis of Successive Integrations in the study of a simply supported beam subjected to distributed load.* International Journal of Geoscience, Engineering and Technology, v. 1, n. 1, p. 105-110, 2020.

GONCALVES, V. F. *Soluções Numéricas via MDF de problemas de engenharia.* 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo, 2017.

HIBBELER, R.C. *Resistência dos Materiais.* 7 ed. São Paulo: Pearson Hall, 2010, 421 p.

RUGGIERO, M.A.G; LOPES, V.L.R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.* 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 357 p.

SILVA, S. F.; PEDROSO, L. J. *Método das diferenças finitas em dinâmica de vigas profundas.* Relatório Técnico de Pesquisa, RTP-SFS03, UnB-FT/ENC, Brasília, 2005.

SILVA, S. F.; SOARES, A. A. B. *O Método das Diferenças Finitas aplicado à teoria das vigas.* Revista Traços, v. 13, n. 27, p. 9-23, 2011.