

ESTUDO DA DIFUSÃO DE CALOR EM UMA PLACA BIDIMENSIONAL DISCRETIZADA POR DIFERENÇAS FINITAS COM IMPLEMENTAÇÃO EM CÓDIGO ABERTO

Daniel Magalhães da Cruz (UFRGS) E-mail: daniel.cruz@ufrgs.br

Marcelo de Ávila Barreto (FURG) E-mail: marcelobarretobm@gmail.com

Karen Silveira Orestes (FURG) E-mail: karenorestes@gmail.com

Aleones José da Cruz Júnior (IFGoiano) E-mail: aleones.junior@ifgoiano.edu.br

Resumo: A maneira de se estudar fenômenos de transportes, e situações na engenharia pode ser experimental, analítica ou numérica. Nas últimas décadas, as simulações computacionais têm se destacado, praticamente, em todas as áreas de engenharia. Isto se deve ao desenvolvimento de novos produtos e processos, a busca pela redução de custos, tempo e recursos consumidos em ensaios e testes experimentais, os quais podem ser minimizados com a utilização de simulações numéricas. Esta é aplicada com frequência em transferência de calor e mecânica dos fluidos, cujo resultado vem de uma solução de equações (ou sistemas) diferenciais. Dos métodos numéricos utilizados há elementos finitos, volumes finitos e diferenças finitas que naturalmente apresentam diferentes graus de complexidade. O método das diferenças finitas exige um menor esforço computacional, podendo ser útil em problemas simples. Sendo assim, diferenças finitas é a proposição colocada neste trabalho associada com um problema de difusão do calor em uma placa plana, em um domínio bidimensional. Objetiva-se a implementação em código aberto através do software gratuito Octave, verificando com a solução analítica da literatura prova-se a simples aplicação e o alcance da condição de convergência.

Palavras-chave: Difusão de calor, Diferenças finitas, Domínio bidimensional, Octave.

STUDY OF HEAT DIFFUSION IN A DISCRETE TWO-DIMENSIONAL PLATE BY FINITE DIFFERENCES WITH OPEN CODIGE IMPLEMENTATION

Abstract: The way to study transport phenomena and engineering situations can be experimental, analytical or numerical. In the last few decades, computer simulations have stood out in practically all areas of engineering. This is due to the development of new products and processes, seeking to reduce costs, time and resources consumed in tests and experimental tests, which can be minimized with the use of numerical simulations. This is often applied in heat transfer and fluid mechanics, the result of which comes from a solution of differential equations (or systems). Among the numerical methods used, there are finite elements, finite volumes and finite differences that naturally present different degrees of complexity. The finite difference method requires less computational effort and can be useful in simple problems. Thus, finite differences are the proposition presented in this work associated with a heat diffusion problem in a flat plate, in a two-dimensional domain. The objective is the implementation in open code through Octave free software, verifying with the analytical solution from the literature, the simplicity of the application and the reach of the convergence condition are proven.

Keywords: Heat diffusion, Finite differences, Two-dimensional domain, Octave.

1. Introdução

O conhecimento de fenômeno dos transportes é fundamental para que o engenheiro conheça e domine uma série de processos industriais. Os tópicos de transferência de calor e massa, em especial em sua forma diferencial de análise é importante para compreensão dos processos, formulação das equações governantes, e interpretação da situação/problema. Como destaca Garcia *et al.* (2017), o estudo da transferência de

calor é um dos temas mais importantes num curso de engenharia, e a necessidade de avaliar, quantificar e controlar esse processo abrange a grande maioria dos sistemas e equipamentos.

Destaca-se aqui, que a área de transferência de calor considera uma caracterização de três mecanismos distintos, baseados nas leis de Fourier, resfriamento de Newton e lei de Stefan-Boltzmann, se tratando respectivamente de condução, convecção e radiação. Onde, nos fenômenos reais, determina-se o calor total transferido como relação a três parcelas, uma para cada tipo de mecanismo (BEJAN, 1996).

Mais do que o fenômeno, a maneira de se abordar merece seu devido destaque. As formas experimentais e analíticas, são bem conhecidas classicamente, enquanto que as computacionais são mais recentes (MARCHI *et al.*, 2013).

Como Wehmann *et al.* (2017) apresentam, a busca por redução de custos e tempo propiciaram o uso de simulação numérica, outro destaque dado é a maior acessibilidade ao uso computacional, tanto pelo desenvolvimento de sistemas com maior capacidade de processamento, como pela redução nos custos dos equipamentos computacionais, além disso outro destaque para os softwares que abordam numericamente tais problemas que desenvolveram uma interface versátil e “amigável” nos últimos anos.

Focando nas abordagens metodológicas para problemas de fenômeno dos transportes, podem ser: prática, analítica ou computacional. Na prática é percebido o fenômeno acontecendo por meio de experiências de bancada, no analítico é estudado o rigor da escrita matemática e do resultado estruturado com base em equacionamentos clássicos, já no numérico relaciona-se as formas diferenciais, e a sua discretização.

O objetivo principal dessa análise da condução de calor é encontrar o campo de temperaturas em um meio resultante das condições impostas em suas fronteiras, adotando apenas condução num processo de difusão do calor, utilizando para isso uma implementação em Octave que permita resolver o problema bidimensional por diferenças finitas.

Destaca-se que há softwares de *Computational Fluid Dynamics* (CFD), que resolveriam tal problema por elementos finitos através de uma interface comercial e com ótimo resultado, destaca-se o Ansys Fluent e o OpenFOAM. Porém o intuito é justamente escrever um código, e verificar o resultado de temperatura máxima da rotina computacional com o analítico, provando a facilidade e confiabilidade do modelo.

2. Referencial teórico

O referencial clássico da formulação de distribuição do campo de temperatura em forma diferencial, tem sua forma completa apresentada na Equação 1 (INCROPERA *et al.*, 2014).

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Entende-se variáveis x , y e z como referentes aos eixos cartesianos, ∂ é o operador de diferenciais parciais, k refere-se à condutividade térmica do material, T referente a temperatura, \dot{q} representando uma parcela de geração de calor, ρ e C_p sendo propriedades do meio, densidade e calor específico respectivamente, e t relativo ao tempo.

Entende-se tal equação como geral, que naturalmente é modificada para as condições de contorno do problema.

Outra parte do referencial que deverá ser adequado ao processo, é a discretização por diferenças finitas. Na verdade, é usual que “equações elípticas surgem com frequência na modelagem de problemas de equilíbrio, como por exemplo na descrição de transferência de calor em sistemas bidimensionais em estado estacionário” (FONTANA, 2019).

É muito usual a representação discreta de das equações: de Laplace (Equação 2) ou de Poisson (Equação 3), sendo $f(x, y, z)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = g(x, y, z) \quad (3)$$

A discretização por diferenças finitas é justificada como se cada nó de um determinado domínio fosse resultado de uma média dos pontos adjacentes para um a condição de equilíbrio (equações já prescritas). Se isso for iterado, há um ponto que existe um auto ajuste do modelo, e todas as equações discretas para todos os pontos do domínio se tornam marginalmente coerentes (BRASIL; BALTHAZAR; GÓIS, 2015).

Para o caso da equação da difusão do calor em um domínio bidimensional, as equações acima e discretização serão reinseridas em metodologia tendo por parâmetro as condições de aplicação, porém deve-se aqui no referencial, dar uma formulação analítica do processo, até para servir de critério de verificação nos resultados. A Equação 4 apresentada é a solução analítica do campo de temperatura para a condição prescrita, esta conta com um longo desenvolvimento que pode ser verificado em Incropera *et al.* (2014).

$$T(x, y) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right) \cdot \frac{\text{senh}\left(\frac{n\pi y}{5}\right)}{\text{senh}\left(\frac{2n\pi}{5}\right)} \quad (4)$$

Onde x e y são as coordenadas dentro dos limites do domínio, e n se refere ao número de divisões dos elementos por diferenças finitas a serem realizados na geometria.

3. Processo metodológico

A descrição da proposição, é para uma placa delgada, com comprimento de L_x unidades de comprimento, por uma altura de L_y unidades de comprimento. A lateral superior (indicada em laranja) corresponde a uma temperatura prescrita de 1 grau, enquanto que as demais são paredes (indicada em azul) com temperatura prescrita de 0 grau, conforme mostra a Figura 1.

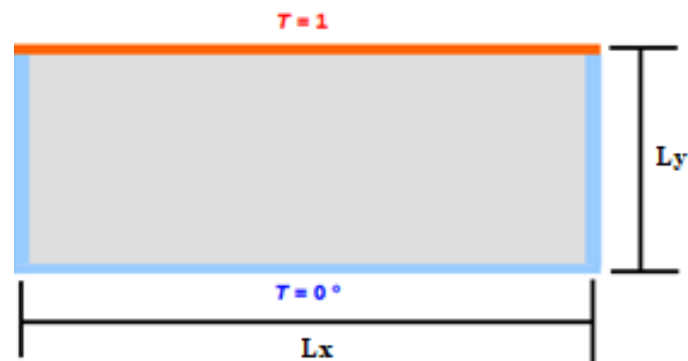


Figura 1 – Placa delgada.

Desenvolvendo a Equação 1 para o problema proposto, haverá simplificações a serem feitas. A primeira por se tratar de um domínio bidimensional, faz com que o termo referente a z seja nulo. Neste caso também não se considera variação da temperatura ao longo do tempo, assim o termo que descreve a taxa de variação da energia acumulada no interior do volume será nulo.

A equação diferencial que irá fornecer o campo de temperatura para a placa sob as condições de temperatura e geométrica prescrita é dado pela Equação (5).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

Se observado a Equação 2, trata-se da equação de Laplace aplicada ao campo de temperatura. Fazendo sua discretização por diferenças finitas, têm-se a Equação 6.

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{\Delta y^2} = 0 \tag{6}$$

Para resolver esse problema determina-se uma malha quadrada no plano xoy . Quando se determina essa malha quadrada quer dizer que tanto na direção x como na direção y , tem-se a mesma quantidade de pontos o que faz com que por vezes Δx e Δy sejam diferentes, pois as dimensões da placa podem ser diferentes.

Deseja-se trabalhar numa condição geométrica de comprimentos diferentes para x e y , propondo $L_x = 5 \text{ u.c.}$ e $L_y = 2 \text{ u.c.}$ Se Δx , e se Δy devem ser constantes ao longo dos eixos, apropria-se de um Δx que corresponda ao comprimento L_x , dividido por $N - 1$, e faz analogamente para a direção y . Observar que a divisão por $N - 1$, é definida que numa determinada quantidade de pontos N , a quantidade de intervalos é correspondente a $N - 1$. Na Figura 2, é evidenciado essa parte descritiva.

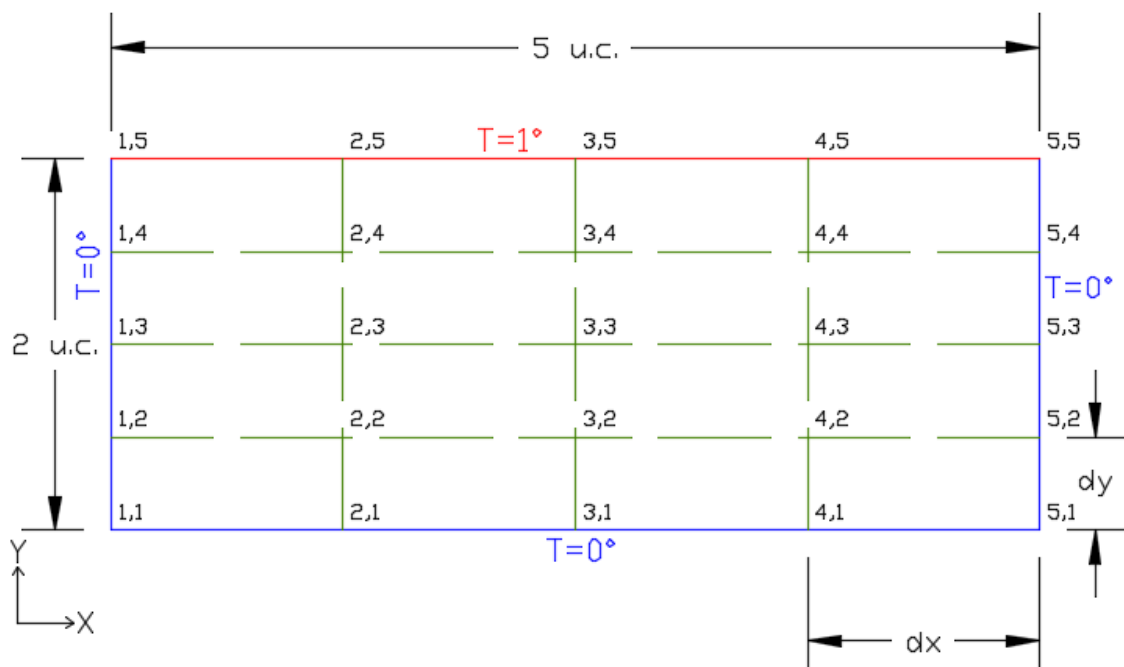


Figura 2 – Placa exemplificada com 25 pontos N^2 (4 intervalos em cada eixo, $N - 1$).

É importante destacar que os comprimentos dos lados é uma entrada do script sendo, portanto, interativo dentro do código em Octave. As dimensões assumidas acima, são para desenvolvimento do programa, independência de malha e conferência com valores

analíticos.

A equação completa discretizada, são aplicáveis para elementos do meio da malha concebida sendo cercados para a direita, esquerda, para cima e para baixo por outros pontos. Porém os elementos localizados nos cantos e nas linhas terão a formulação modificada já que por vezes não possuem todos os termos da equação completa discretizada. Observar na discretização relação a m (em x) e n (em y). Na condição geométrica do ponto inicial (canto inferior esquerdo) é um par ordenado (x, y) correspondente a $(0, 0)$ em relação a geometria, porém a condição de posição naquele ponto inicial é $1, 1$ ($m = 1, n = 1$).

Para o canto inferior esquerdo ($m = 1$ & $n = 1$), Equação 7.

$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n}}{\Delta y^2} = 0 \quad (7)$$

Para o canto inferior direito ($m = m$ & $n = 1$), Equação 8.

$$\frac{T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n}}{\Delta y^2} = 0 \quad (8)$$

Para o canto superior esquerdo ($m = 1$ & $n = n$), Equação 9.

$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{\Delta y^2} = 0 \quad (9)$$

Para o canto superior direito ($m = m$ & $n = n$), Equação 10.

$$\frac{T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{\Delta y^2} = 0 \quad (10)$$

Para a linha inferior desconsiderando os cantos ($n = 1$), Equação 11.

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n}}{\Delta y^2} = 0 \quad (11)$$

Para a linha superior desconsiderando os cantos ($n = n$), Equação 12.

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{\Delta y^2} = 0 \quad (12)$$

Para a linha esquerda desconsiderando os cantos ($m = 1$), Equação 13.

$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{\Delta y^2} = 0 \quad (13)$$

Para a linha direita desconsiderando os cantos ($m = m$), Equação 14.

$$\frac{T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{\Delta y^2} = 0 \quad (14)$$

E para os demais elementos internos fica-se com a equação completa discretizada, já indicada na Equação 6.

Pode-se isolar em todas as equações em termo de $T_{m,n}$, tal que aplicadas as condições iniciais já descritas é possível montar um sistema de equações com o mesmo número de incógnitas e resolver o campo de temperatura em relação a quantidade N de pontos escolhidos. Processos iterativos são bem comuns nestas resoluções até que os resultados estabilizem e haja uma convergência dos resultados de maneira coerente.

Na metodologia em relação ao software, usa-se a ferramenta GNU Octave que é uma linguagem computacional, desenvolvida para computação matemática. É um software livre sob os termos da licença GPL. Foi escrito por John W. Eaton. Possui compatibilidade com MATLAB, possuindo um grande número de funções semelhantes.

O código escrito considera uma entrada (input) em relação ao número N de pontos que deverão ser criados para a análise, o que permitirá depois fazer o teste de independência de malha. Demais entradas (input) também definem a geometria da placa. O restante da escrita do código leva em consideração uma matriz de resultados que inicialmente os valores são nulos exceto os que correspondem a linha superior do exercício (temperatura prescrita de $T = 1^\circ\text{C}$). É uma matriz de coeficientes de ordem N^2, N^2 tal que inicialmente é uma matriz nula, e nela insere-se uma diagonal principal. A ideia dessa programação é diferenças finitas definindo para análise retângulos dentro da geometria que fica em um loop para que as condições converjam (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008).

4. Resultados e discussão

Assim para as condições do problema proposto foi possível desenvolver código escrito em Octave, conforme o script:

```
clc; clear; close all;
%Tamanho da malha quadrada
N = input('N° de pontos da malha tanto em x como em y ');
%Geometria da placa
Lx= input ('Digite o comprimento inteiro Lx ');
Ly= input ('Digite o comprimento inteiro Ly ');
dx=Lx/(N-1);
dy=Ly/(N-1);
%Definição da Matriz dos Resultados
B = zeros(N^2,1);
nb = N^2-N+1;
for mb = 0:N^2-nb;
    B(nb+mb,1) = -1;
end
%Definição da Matriz dos Coeficientes
A = zeros(N^2,N^2);
% Definição da Diagonal Principal
for ma=1:N^2;
    A(ma,ma)=-4;
end
%Definição dos elementos
m=0;
for j=1:N;
    for i=1:N;
        m=m+1;
        if(i==1 && j==1);
            A(m,m+1) = 1;
            A(m,m+N) = 1;
        elseif (i>1 && i<N && j==1);
            A(m,m-1) = 1;
            A(m,m+1) = 1;
            A(m,m+N) = 1;
        elseif (i==N && j==1);
            A(m,m-1) = 1;
            A(m,m+N) = 1;
        elseif (i==1 && j>1 && j<N);
            A(m,m-N) = 1;
            A(m,m+1) = 1;
            A(m,m+N) = 1;
        elseif (i>1 && i<N && j>1 && j<N);
            A(m,m-N) = 1;
            A(m,m-1) = 1;
```

```
A(m,m+1) = 1;
A(m,m+N) = 1;
elseif (i==N && j>1 && j<N);
    A(m,m-N) = 1;
    A(m,m-1) = 1;
    A(m,m+N) = 1;
elseif (i==1 && j==N);
    A(m,m-N) = 1;
    A(m,m+1) = 1;
elseif (i>1 && i<N && j==N);
    A(m,m-N) = 1;
    A(m,m-1) = 1;
    A(m,m+1) = 1;
elseif (i==N && j==N);
    A(m,m-N) = 1;
    A(m,m-1) = 1;
end
end
end
% Matriz das Temperaturas
C = A^-1 * B
%Plotagem do Campo de Temperatura
mm = 0;
for ii=1:N
    for jj=1:N
        mm=mm+1
        D(ii,jj)= C(mm);
    end
end
end
x=0:dx:Lx;
y=0:dy:Ly;
contour(x,y,D,'Fill','on');
title('Distribuição de Temperatura')
xlabel('x')
ylabel('y')
colorbar
Tmax=max(C)
```

Para um teste de verificação rápida pode-se atribuir $N = 5$, e observa-se que o resultado possui sentido físico. Gráfico do campo de temperatura é apresentado na Figura 3, e temperatura máxima obtida para essa malha é $T_{max} = 0,66943$.

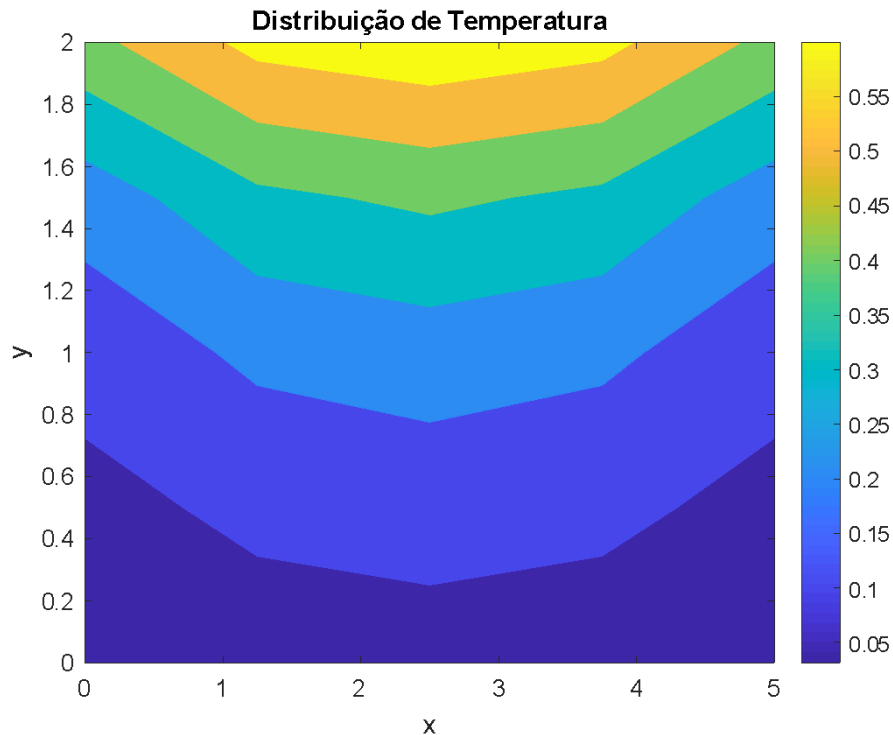


Figura 3 – Campo de temperatura, $N = 5$.

Ainda nos resultados, fica evidente no campo gerado que o código implementado é capaz de resolver o problema da difusão bidimensionalmente, mas observa-se linhas grosseiras no campo gerado. Para refinar a estrutura, o que se deseja fazer é um teste de independência de malha.

A busca é por uma condição de independência de malha, onde a diferença das temperaturas máximas de refinamentos subsequentes seja bem pequena. Matematicamente essa condição de independência é expressa pela Equação 15, e usualmente na literatura usa-se valores que representem variações de 0,5% a 5%, ou outros dependendo da precisão necessária (SILVA, 2016). Neste estudo utiliza-se critério de $5 \cdot 10^{-3}$, mas lembra-se que esse valor não é regra, por vezes pode levar a esforços computacionais que não melhoram substancialmente o resultado.

$$R = \frac{|T_{max}^{j+1}| - |T_{max}^j|}{|T_{max}^j|} < 5 \cdot 10^{-3} \tag{15}$$

Para o teste de independência de malha, optou-se por evoluir como $N_i = 5$ & $N_{i+1} = N_i + 5$. Obtendo a Tabela 1, nota-se que a independência de malha por diferença numérica ocorre para a condição de $N = 50$. E a Figura 4, mostra a independência de malha graficamente.

Tabela 1 – Teste de independência de malha, convergência numérica.

N	Número de Nós (N^2)	Tmax	$R < 0,005$
5	25	0,66943	-
10	100	0,81518	0,217722540
15	225	0,87408	0,072253981

20	400	0,90378	0,033978583
25	625	0,92250	0,020713005
30	900	0,93492	0,013463415
35	1225	0,94403	0,009744149
40	1600	0,95082	0,007192568
45	2025	0,95620	0,005658274
50	2500	0,96047	0,004465593

Fonte: Os autores

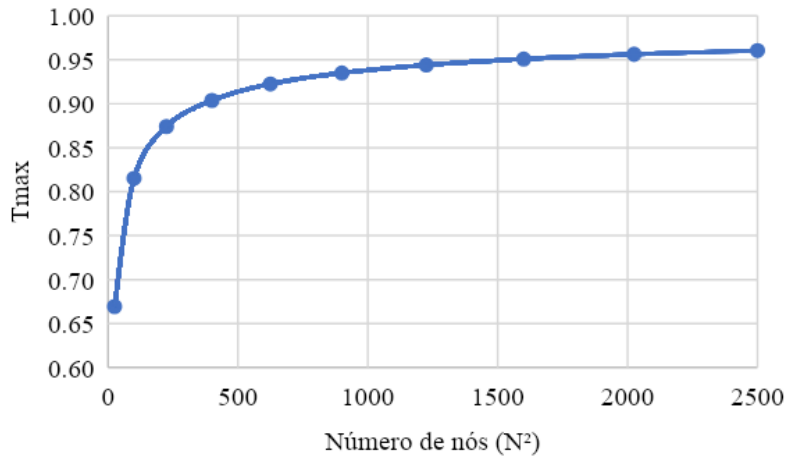


Figura 4 – Teste de independência de malha, convergência gráfica.

O campo de temperatura na independência de malha, $N = 50$, possui temperatura máxima de 0,96047. Na Figura 5, mostra-se o campo de temperatura para tal condição.

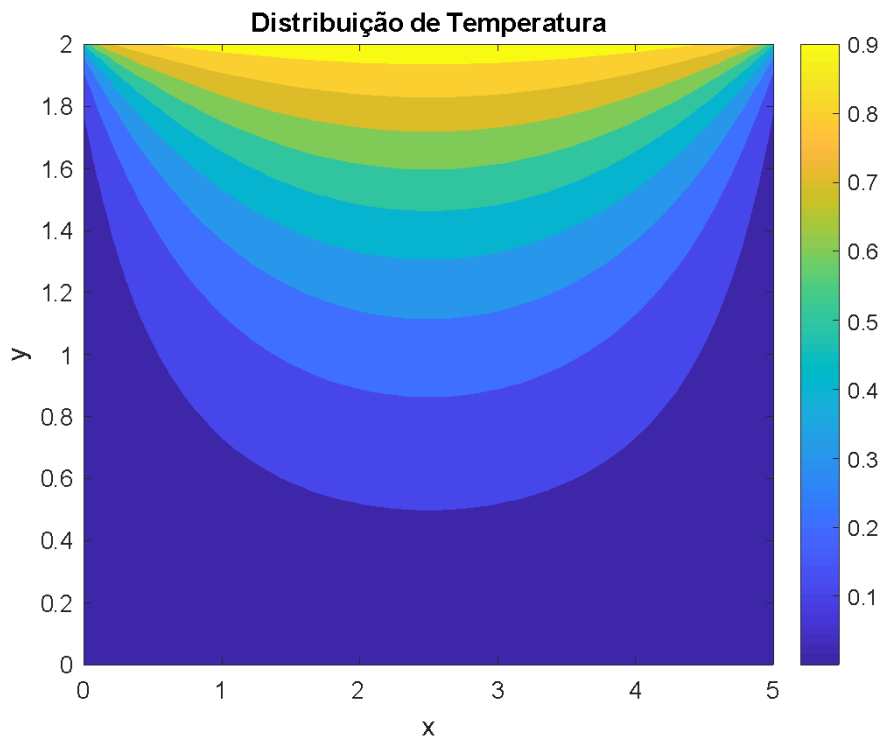


Figura 5 – Campo de temperatura, $N = 50$.

Observa-se um formato quadrado no gráfico em razão da forma como o software faz a plotagem. Mas deve-se observar os eixos e os valores de comprimentos indicados coincidem com os comprimentos assumidos para o desenvolvimento.

Com o resultado gráfico e de temperatura máxima desenvolvida na condição de independência de malha, deve-se realizar uma verificação através da Equação 4. Desta equação, tem-se a & b sendo os respectivos comprimentos do domínio (condição geométrica). Se a determinação analítica for para a máxima temperatura, sabe-se pelo sentido físico que esta ocorre no meio da aresta superior possuindo coordenadas de $2,5 u.c.$ em x e de $2 u.c.$ em y . Inserindo tais valores na formulação, fica-se com a formulação de verificação, Equação 16. Que deve ser aplicada para um determinado n , sendo este um critério de truncamento, foi escolhido um truncamento em $n = 15$.

$$T(x, y) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (16)$$

Para o resultado analítico, feito obedecendo a formulação da Equação 16, obtém-se temperatura máxima de $0,96036$, Figura 6.

```

Entre com o valor inteiro de n 15
T =
Columns 1 through 12:
    1.27324    0.00000   -0.42441    -
Columns 13 through 15:
    0.09794    0.00000   -0.08488
Tmax = 0.96036

```

Figura 6 – Temperatura máxima, analítico.

Para comprovar que o resultado analítico valida o resultado numérico, pode-se calcular uma diferença relativa, conforme Equação 17.

$$DR(\%) = \left(\frac{X^{ref} - X^{num}}{X^{ref}} \right) \cdot 100 \quad (17)$$

Relembrando os resultados de temperatura máxima, o de referência é o analítico $T_{ref} = 0,96036$ e o numérico é $T_{num} = 0,96047$. Realizando esse cálculo para os resultados fica-se com diferença relativa inferior à $0,02\%$, que é considerado muito satisfatório.

Sobre o campo de temperatura em si, deve-se destacar o conhecimento do comportamento identificado o que ajuda a compreender o significado físico do problema. Incropera *et al.* (2014) e também Tannehill, Anderson e Pletcher (1997), preveem tal comportamento, Figura 7.

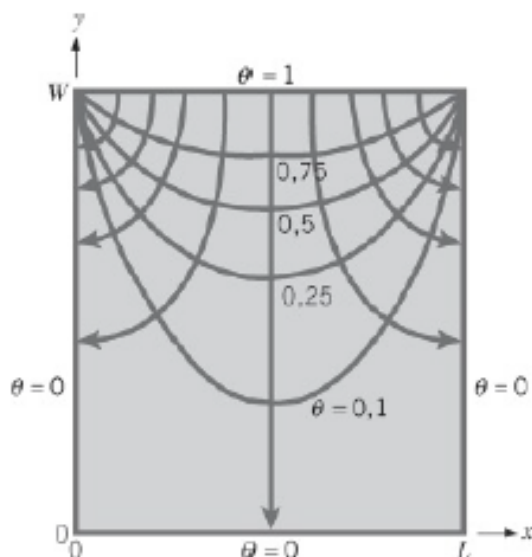


Figura 7 – Comportamento esperado.

A Figura 5, mostra o resultado numérico para $N = 50$, onde atingiu independência de malha em relação as demais simulações. O comportamento pode enfim ser verificado com a referência do campo analítico através da Figura 7, que representa a obtenção do campo de temperatura por difusão em placa plana. Deve ser observado a semelhança da plotagem de evolução parabólica ao longo da geometria, assim como o fechamento de todas as parábolas (tanto no analítico como no numérico) nos cantos superiores.

5. Conclusões

A primeiro ponto a se destacar é a obtenção de um código em software aberto que resolve de maneira verificada a difusão do calor por diferenças finitas em placas, o que contribui para disseminação do conhecimento com aplicações específicas com ferramentas de domínio público, diminuindo esforços computacionais sobressalentes.

Utilizando outros métodos computacionais mais rebuscados, etapas como: a criação de uma malha de forma muito mais complexa, a própria determinação geométrica, e a simulação numérica em si, seriam muito mais onerosas em tempo e de certa forma inevitáveis.

Diferenças finitas apresenta uma formulação simples, representada discretamente por sistemas lineares, que podem ser resolvidos através de softwares como Octave. Essa rotina pode facilitar outras análises ainda para placas sob outras condições de temperatura alterando pontualmente no script as partes de definição de condição de temperatura e de condição geométrica, e deixando que a rotina adeque as matrizes e faça o esforço do cálculo iterativo obtendo respostas como temperatura máxima e o campo de temperatura.

Atentando-se ao script do Octave, a diagonal da matriz A está indicado como -4 , como se $dx = dy$, que seria o caso de uma placa quadrada (o que se sabe que facilitaria muito as formulações). O correto seria discretizar a equação para $T_{m,n}$ e verificar que

aquele valor seria na verdade correspondente a $-2(dx^2 + dy^2)$, embora isso, os resultados convergiram à medida que se aumentou a quantidade de nós. Inclusive este fator pode explicar o porquê da $Tmax$ nas primeiras tentativas com um N baixo ser tão diferente do $Tmax$ de malha independente, isso porque as distâncias influem de maneira

mais significativa para menor quantidade de ponto.

É importante a bidimensionalidade nos valores inseridos. Ou seja, ambos os valores de entrada que definem o comprimento L_x e L_y devem ser significativos. De preferencial a igualdade de comprimentos leva a melhor convergência da malha. Mas como mostrado no desenvolvimento é plenamente possível desenvolver para valores diferentes. Porém quando um dos valores é significativamente maior que o outro, 50 vezes mais ou algo parecido, começa haver problemas na solução encontrada.

Conclui-se que há um modelo coerente e verificado para a geometria proposta. A malha independente, $N = 50$, possui a resposta do campo de temperatura verificada pelo referencial analítico da literatura. Ainda se destaca a diferença relativa em 0,02% na comparação de temperatura máxima pelo resultado analítico e pelo numérico.

Propostas futuras de trabalho é justamente estudar a influência das condições geométricas e de malha na condição de independência de malha. E ainda, verificar como essas ainda ficam com diferenças relativas baixas em relação a temperatura máxima de referência obtida através da determinação analítica.

Referências

- BEJAN, A. *Transferência de Calor*. Editora Edgard Blucher, São Paulo, 1996.
- BRASIL, R.M.L.R.F.; BALTHAZAR, J.M. & GÓIS, W. *Métodos Numéricos e Computacionais na Prática de Engenharias e Ciências*. 1ª edição, Editora Blucher, 2015.
- FONTANA, E. *Introdução ao Método de Diferenças Finitas com Aplicações em Engenharia Química. Notas de Aula - Métodos Matemáticos Aplicados à Engenharia Química II*. Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Paraná, 2019.
- GARCIA, R.L.; ZABADAL, J.; AMARAL, R.A.; G. NETO, J.A.D. & SCHMITZ, A. *Transferência de calor e massa: fusão de uma placa de gelo*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 39, n. 3, 2017. <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2016-0280>.
- GILAT, A. & SUBRAMANIAM, V. *Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB*. 1ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- INCROPERA, F.P.; DEWITT, D.P.; BERGMAN, T.L. & LAVINE, A.S. *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. 7th ed. LTC, 2014.
- MARCHI, C.; NOVAK, L.; SANTIAGO, C. & VARGAS, A. *Highly accurate numerical solutions with Repeated Richardson Extrapolation for 2D Laplace equation*. Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, pp. 7386–7397, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.02.043>.
- SILVA, A.B. *Utilização de fluidodinâmica computacional (CFD) na simulação de vazamentos em Dutos*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2016.
- TANNEHILL, J.; ANDERSON, D. & PLETCHER, R. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor and Francis, Washington, 2ª edição, 1997.
- WEHMANN, C.F.; ROCHA, P.A. C.; SILVA, M.E.V.; ARAÚJO, F.A.A. & CORREIA, D.L. *Estudo e aplicação de simulação computacional em problemas simples de mecânica dos fluidos e transferência de calor - Parte II: problemas clássicos de transmissão de calor*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 40, n. 2, 2017. <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2017-0221>.