

# ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR DE VIGAS POR MEIO DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL DO MEF

Luiz Antonio Farani de Souza (UTFPR, curso de Engenharia Civil) E-mail: [lasouza@utfpr.edu.br](mailto:lasouza@utfpr.edu.br)

**Resumo:** O conhecimento do comportamento estático e dinâmico é precípuo para a concepção de estruturas mais leves e esbeltas sem afetar, contudo, a segurança e a qualidade das mesmas. Portanto, torna-se necessário utilizar teorias mais complexas, como formulações não lineares, evitando simplificações no processo de análise/projeto. Nesse contexto, uma formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos para a análise não linear dinâmica de vigas, fundamentada na teoria de Euler-Bernoulli, é apresentada. Um procedimento incremental-iterativo com o método de integração direta de Newmark e o método de Newton-Raphson padrão é empregado para obter a solução aproximada das equações não lineares de movimento. Exemplos numéricos de problemas de vigas com não linearidade geométrica encontrados na literatura são apresentados para demonstrar a precisão e a eficiência do algoritmo implementado com o programa livre Scilab. A relação constitutiva elástica linear para o material que constitui as vigas é adotada. Como resposta dinâmica das estruturas, as curvas tempo versus deslocamento são apresentadas.

**Palavras-chave:** vigas, análise dinâmica, não linearidade geométrica, método de Newmark, formulação corrotacional.

## NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF BEAMS THROUGH FEM CO-ROTATIONAL FORMULATION

**Abstract:** Knowledge of static and dynamic behavior is essential for the design of lighter and more slender structures without affecting, however, their safety and quality. Therefore, it becomes necessary to use more complex theories, as nonlinear formulations, avoiding simplifications in the analysis/design process. In this context, a co-rotational formulation of the Finite Element Method for the dynamic nonlinear analysis of beams, based on the Euler-Bernoulli theory, is presented. An incremental-iterative procedure with the Newmark's direct integration method and the standard Newton-Raphson method is employed to obtain the approximate solution of the nonlinear equations of motion. Numerical examples of beam problems with geometric nonlinearity found in the literature are presented to demonstrate the accuracy and efficiency of the algorithm implemented with the open-source software Scilab. The linear elastic constitutive relation for the material that constitutes the beams is adopted. As a dynamic response of the structures, the displacement versus time curves is shown.

**Keywords:** beams, dynamic analysis, geometric nonlinearity, Newmark's method, co-rotational formulation.

### 1. Introdução

Na atualidade, em função do avanço científico e tecnológico, a realização de análises dinâmicas não lineares se torna cada vez mais premente, haja vista a necessidade de se simular, da forma mais realista possível, o comportamento estrutural de edificações e equipamentos existentes, tais como fundações aporricadas de máquinas, pontes rodoviárias e ferroviárias sujeitas a grandes deslocamentos, edifícios altos submetidos à ação do vento e estruturas em geral sujeitas a vibrações induzidas por abalos sísmicos (RODRIGUES; VENTURINI, 2005).

As formulações não lineares no domínio do tempo vêm ganhando cada vez mais espaço na literatura especializada no que diz respeito à análise dinâmica de estruturas. Esse tipo de análise permite prever o comportamento de estruturas em situações além do limite elástico, incluindo a perda de resistência e de rigidez relacionada ao comportamento

inelástico dos materiais e a ocorrência de grandes deslocamentos e rotações (DEIERLEIN; REINHORN; WILLFORD, 2010; CODA; PACCOLA, 2014).

Estruturas de aço são comumente projetadas para edifícios industriais e comerciais, porque apresentam alta relação resistência/peso e excelente ductilidade. No caso de estruturas leves e esbeltas, a influência de carregamentos dinâmicos e os efeitos de segunda ordem são mais pronunciados e, por isso, não podem ser desprezados durante a análise. Além disso, diversas pesquisas têm sido realizadas na área de análise estrutural e observou-se que apenas a análise estática linear pode não ser capaz de descrever o comportamento real de uma estrutura submetida às diversas solicitações externas, principalmente no caso de situações atípicas, como terremotos e fortes rajadas de vento (VIANA, 2019; SALLES et al., 2019).

As formulações não lineares variam de acordo com a abordagem usada para descrever o movimento e podem ser agrupadas em três categorias: Lagrangeano Total (LT), Lagrangeano Atualizado (LA) e Corrotacional (CR). A principal diferença entre as duas primeiras abordagens está relacionada à configuração considerada na derivação das equações do Método dos Elementos Finitos (MEF). Na formulação LT, todas as variáveis são derivadas em relação a uma configuração de referência fixa, enquanto na formulação LA, as equações do MEF são formuladas em relação à última configuração de equilíbrio. Por outro lado, no conceito CR, as equações para cada elemento são desenvolvidas considerando dois sistemas: um sistema de configuração de base e um sistema anexado ao elemento (sistema de coordenadas corrotacionais) que se move, mas não se deforma com o elemento. Assim, na abordagem CR, o movimento de corpo rígido é separado das medidas deformacionais puras (VIANA et al., 2020).

O comportamento dinâmico de uma estrutura pode ser induzido por cargas periódicas, como cargas harmônicas, ou por cargas não periódicas, como cargas impulsivas. Cargas impulsivas são caracterizadas por um aumento instantâneo de magnitude seguido por uma rápida diminuição durante um intervalo de tempo muito curto. No caso do carregamento convencional, como harmônico ou *Heaviside*, o carregamento é aplicado em um ponto com magnitude constante ou variável no tempo (SHANG; MACHADO; ABDALLA FILHO, 2016).

A instabilidade dinâmica pode ocorrer quando uma estrutura é submetida a cargas periódicas ou quase periódicas devido à oscilação paramétrica. A magnitude dessa resposta de oscilação aumenta rapidamente para um valor significativo podendo, além da instabilidade dinâmica estrutural, ocorrer uma falha catastrófica da estrutura (XU; WANG; LI, 2022).

O presente artigo tem por objetivo aplicar a formulação corrotacional do MEF fundamentada na teoria de viga de Euler-Bernoulli, apresentada por Crisfield (1991) e Yaw (2009), em análises dinâmicas de vigas com não linearidade geométrica. Na teoria de viga de Euler-Bernoulli, um plano inicialmente normal ao eixo neutro da viga permanece plano e normal a esse eixo após a deformação (KIEN, 2004). Essa suposição despreza os efeitos da deformação por cisalhamento, sendo válida para vigas esbeltas ou pórticos constituídos por elementos estruturais esbeltos (TANG et al., 2019).

A solução da maioria dos problemas estruturais dinâmicos requer o uso de algoritmos numéricos (ARRUDA; MOLDOVAN, 2015). Um procedimento incremental e iterativo baseado no método de integração direta de Newmark (NEWMARK, 1959) e no método de Newton-Raphson padrão é empregado para obter a solução aproximada das equações não lineares de movimento. O método de Newmark é escolhido para a integração numérica da equação de movimento devido a sua simplicidade. As forças residuais em

cada intervalo de tempo são eliminadas usando o método iterativo de Newton-Raphson.

Três exemplos numéricos de vigas são apresentados para verificar a precisão e a eficiência do algoritmo implementado com o programa livre Scilab, versão 2023.1.0 (SCILAB, 2023), no que tange à previsão da resposta não linear das estruturas sob carregamento dinâmico no espaço tempo-deslocamento. A relação constitutiva elástica linear para o material que constitui as vigas é adotada.

## 2. Elemento finito corrotacional de viga-pilar

O elemento finito de viga-pilar tem dois nós e três graus de liberdade por nó. Assume-se que não há deformação de cisalhamento na viga e, então, a seção transversal permanece plana e normal ao eixo da mesma. Na configuração inicial, as coordenadas dos nós “1” e “2” do elemento no sistema global são  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ , respectivamente. O comprimento inicial (indeformado)  $L_0$  da viga é dado pela seguinte equação (YAW, 2009):

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad (1)$$

Para o elemento de viga na sua configuração corrente, as coordenadas nodais globais são  $(X_1 + u_1, Y_1 + v_1)$  para o nó “1” e  $(X_2 + u_2, Y_2 + v_2)$  para o nó “2”, em que  $u_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $X$  e  $v_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $Y$ , com  $i = 1, 2$ . O comprimento corrente (deformado)  $L$  é (YAW, 2009):

$$L = \sqrt{(X_2 + u_2 - X_1 - u_1)^2 + (Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1)^2}. \quad (2)$$

O vetor de deslocamentos globais  $\mathbf{p}$  do elemento finito  $m$  é dado por:

$$\mathbf{p}_m = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T. \quad (3)$$

O deslocamento axial local ( $u_1$ ) do elemento é calculado por:

$$u_1 = L - L_0. \quad (4)$$

A deformação específica  $\varepsilon$  é assumida constante e é determinada por  $\varepsilon = u_1/L_0$ . A força axial  $N$  da viga é, então, dada por:

$$N = \frac{EA\bar{u}}{L_0}, \quad (5)$$

na qual  $A$  é a área da seção transversal e  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal. Usando a análise estrutural padrão, os momentos locais nas extremidades do elemento de viga-pilar ( $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$ ) são relacionados com as rotações nodais locais ( $\theta_{11}$  e  $\theta_{21}$ ), e são dados por (CRISFIELD, 1991; YAW, 2009):

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L_0} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

na qual  $I$  é o momento de inércia da seção transversal. As rotações nodais locais ( $\theta_{11}$  e  $\theta_{21}$ ) são computadas por, respectivamente:

$$\theta_{11} = \arctan \left( \frac{\cos\beta \sin\beta_1 - \sin\beta \cos\beta_1}{\cos\beta \cos\beta_1 + \sin\beta \sin\beta_1} \right), \quad (7)$$

$$\theta_{21} = \arctan \left( \frac{\cos\beta \sin\beta_2 - \sin\beta \cos\beta_2}{\cos\beta \cos\beta_2 + \sin\beta \sin\beta_2} \right), \quad (8)$$

sendo  $\beta_1 = \theta_1 + \beta_0$  e  $\beta_2 = \theta_2 + \beta_0$ , em que os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações nodais globais calculadas a partir do sistema de equações globais. As expressões para o ângulo inicial  $\beta_0$  e para o ângulo corrente  $\beta$  da barra são, respectivamente:

$$\beta_0 = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right), \quad (9)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}\right). \quad (10)$$

A matriz de rigidez tangente elementar  $\mathbf{K}_{el}$  é determinada em função da parcela da matriz de rigidez dependente do material  $\mathbf{K}_M$  e da matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais  $\mathbf{K}_G$ , dada pela seguinte equação (CRISFIELD, 1991; YAW, 2009):

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G, \quad (11)$$

na qual

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}, \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T). \quad (13)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  na Equação (12) é a matriz constitutiva dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 2r^2 \\ 0 & 2r^2 & 4r^2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

em que  $r = \sqrt{I/A}$  é o raio de giração, os vetores  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{r}$  são, respectivamente:

$$\mathbf{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T, \quad (15)$$

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T, \quad (16)$$

e a matriz  $\mathbf{B}$  é:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

As expressões para calcular os valores do seno e do cosseno do ângulo  $\beta$ , denotados por  $s$  e  $c$  na Equação (17), são dadas por, respectivamente:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{L}, \quad (18)$$

$$\text{cos}(\beta) = \frac{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}{L}. \quad (19)$$

O vetor de forças internas elementar  $\mathbf{F}_{el}$  é determinado por:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{B}^T [N \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2]^T. \quad (20)$$

### 3. Formulação para análise dinâmica não linear

A equação diferencial ordinária de segunda ordem que governa a resposta dinâmica não linear de um sistema estrutural em termos dos deslocamentos nodais é dada por (VIANA, 2019):

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad (21)$$

sendo  $\mathbf{C}$  a matriz de amortecimento proporcional à massa,  $\mathbf{M}$  a matriz de massa,  $\dot{\mathbf{u}}$  o vetor de velocidade,  $\ddot{\mathbf{u}}$  o vetor de aceleração,  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  o vetor de forças internas e  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  o vetor de forças externas.

A solução aproximada do sistema dado em Equação (21), cujas incógnitas são  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  e  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ , é obtida por um esquema de integração numérica. As condições iniciais do problema são:

$$\mathbf{u}(t = 0) = {}^0\mathbf{u} \text{ e } \dot{\mathbf{u}}(t = 0) = {}^0\dot{\mathbf{u}}. \quad (22)$$

O vetor aceleração no tempo  $t = 0$  é obtido diretamente pela expressão:

$${}^0\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}({}^0\mathbf{u}) - \mathbf{C} {}^0\dot{\mathbf{u}}]. \quad (23)$$

Comumente, há dois tipos de métodos de integração, que são os explícitos e os implícitos. Aqueles métodos, como o esquema de diferença central (DE BORST et al., 2012), exigem em geral um menor custo computacional do que estes devido a evitarem a solução de sistemas de equações lineares, porém eles alcançam somente a estabilidade condicional. Por outro lado, os métodos implícitos podem facilmente alcançar a estabilidade incondicional e, portanto, seus passos de integração  $\Delta t$  são selecionados com base na consideração da precisão (LI; YU, 2020).

Neste artigo é utilizado o método implícito de integração de Newmark (1959), o qual consiste em expressar os vetores de deslocamentos e de velocidade em aproximações por diferenças finitas no domínio do tempo. Para o instante de tempo atual ( $t + \Delta t$ ), as expressões de Newmark para o deslocamento  $\mathbf{u}$  e a velocidade  $\dot{\mathbf{u}}$  são dadas por, respectivamente (MARQUES, 2006):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \beta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \right], \quad (24)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t (1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \Delta t \gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}, \quad (25)$$

em que  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes referentes ao método de Newmark e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo. Utilizando as Equações (24) e (25) na equação dinâmica de equilíbrio dada pela Equação (21), chega-se à equação na iteração ( $k + 1$ ) e passo de tempo ( $t + \Delta t$ ) (MARQUES, 2006; CODA; PACCOLA, 2014):

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{g}^{(k+1)} = \mathbf{F}_{\text{int}}\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)}\right) + \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_s + {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_s \\ + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}^{(k)} - \gamma \Delta t {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (26)$$

na qual os vetores  $\mathbf{q}_s$  e  $\mathbf{r}_s$  representam as contribuições dinâmicas no tempo corrente e são dados por, respectivamente (MARQUES, 2006):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_s = \frac{{}^t\mathbf{u}}{\beta \Delta t^2} + \frac{{}^t\dot{\mathbf{u}}}{\beta \Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{u}}, \quad (27)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_s = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t (1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{u}}. \quad (28)$$

Nota-se nas equações anteriores que o superíndice esquerdo ( $t$ ) indica o passo de tempo anterior e o superíndice direito ( $k$ ), a iteração anterior. A obtenção da resposta dinâmica não linear é feita combinando-se a técnica de Newmark com o método iterativo de Newton-Raphson padrão (NR). As equações iterativas que estabelecem o equilíbrio

dinâmico do sistema estrutural em função da variável deslocamento  $\mathbf{u}$  são:

$${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{K}}^{(k+1)} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k+1)} = -{}^{t+\Delta t}\mathbf{g}^{(k+1)}, \quad (29)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} + {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k+1)}, \quad (30)$$

sendo  ${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{K}}^{(k+1)}$  a matriz de rigidez efetiva dada por:

$${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{K}}^{(k+1)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)}), \quad (31)$$

em que  $\mathbf{K}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)})$  é a matriz de rigidez tangente do sistema estrutural. A Figura 1 apresenta o algoritmo da técnica de integração de Newmark associada ao método de Newton-Raphson padrão.

*Entrada:*  $\Delta t, t_{\text{máx}}, k_{\text{máx}}$   
*Saída:*  $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, t, k_{\text{total}}$

1. tempo  $\leftarrow t_{\text{máx}}/\Delta t$
2.  $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{0}, \dot{\mathbf{u}} \leftarrow \mathbf{0}, k_{\text{total}} \leftarrow 0$
3. tic (inicia o cronômetro)
4.  ${}^0\ddot{\mathbf{u}} \leftarrow \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}({}^0\mathbf{u}) - \mathbf{C} {}^0\dot{\mathbf{u}}]$
5.  $a_1 \leftarrow \beta \Delta t^2$
6.  $a_2 \leftarrow \beta \Delta t$
7.  $a_3 \leftarrow \gamma \Delta t$
8.  $a_4 \leftarrow \frac{\gamma}{a_2}$
9.  $a_5 \leftarrow \frac{1}{a_1}$
10. **Para** np  $\leftarrow 1, \dots$ , tempo **faça**
11.  $\mathbf{G}_1 \leftarrow \frac{\mathbf{M}}{a_1}$
12.  $\mathbf{G}_2 \leftarrow a_4 \mathbf{C}$
13.  $\mathbf{q}_s \leftarrow \frac{{}^t\mathbf{u}}{a_1} + \frac{{}^t\dot{\mathbf{u}}}{a_2} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) {}^t\ddot{\mathbf{u}}$
14.  $\mathbf{r}_s \leftarrow {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t (1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{u}}$
15.  $\mathbf{G}_3 \leftarrow \mathbf{M} \mathbf{q}_s$
16.  $\mathbf{G}_4 \leftarrow \mathbf{C} \mathbf{r}_s$
17.  $\mathbf{G}_5 \leftarrow a_3 \mathbf{C} \mathbf{q}_s$
18.  $\mathbf{G}_6 \leftarrow \mathbf{r}_s - a_3 \mathbf{q}_s$
19. **Enquanto**  $k < k_{\text{máx}}$  **faça**
20.  $\widehat{\mathbf{K}}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$
21.  $\mathbf{g}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^{(k)}) - \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{G}_1 \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{G}_2 \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_4 - \mathbf{G}_5$
22.  $\delta\mathbf{u}^{(k+1)} \leftarrow -[\widehat{\mathbf{K}}^{(k+1)}]^{-1} \mathbf{g}^{(k+1)}$
23.  $\mathbf{u}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{u}^{(k)} + \delta\mathbf{u}^{(k+1)}$
24.  $\dot{\mathbf{u}}^{(k+1)} \leftarrow a_4 \mathbf{u}^{(k+1)} + \mathbf{G}_6$
25.  $\ddot{\mathbf{u}}^{(k+1)} \leftarrow a_5 \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{q}_s$
26. **Se**  $\|\delta\mathbf{u}^{(k+1)}\| \leq \text{tol} \|\mathbf{u}^{(k+1)}\|$  **então**
27. Sai do Enquanto
28. **Fim-Se**
29. **Fim-Enquanto**
30.  $k_{\text{total}} \leftarrow k_{\text{total}} + k$
31. **Fim-Para**
32.  $k_{\text{médio}} \leftarrow k_{\text{total}}/\text{np}$
33. toc (lê o cronômetro)

Figura 1 – Algoritmo da técnica de integração de Newmark com o método de Newton-Raphson padrão.

Os dados de entrada no algoritmo são: o vetor de deslocamentos  ${}^0\mathbf{u}$ ; o vetor de velocidade  ${}^0\dot{\mathbf{u}}$ ; o incremento de tempo  $\Delta t$ ; o tempo máximo  $t_{\text{máx}}$ ; o número máximo de iterações em cada passo de tempo  $k_{\text{máx}}$ ; e a tolerância  $\text{tol}$  para o critério de convergência. As saídas do mesmo são: os vetores  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$ ; o número total de iterações acumuladas até a convergência para a solução ( $k_{\text{total}}$ ); número médio de iterações por passo de tempo ( $k_{\text{médio}}$ ); e o tempo de processamento em segundos.

A matriz de massa concentrada  $\mathbf{M}$  (*lumped mass model*) é uma matriz diagonal sendo representada por (CHOPRA, 1995; LE; BATTINI; HJIAJ, 2011):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{m} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

na qual

$$\mathbf{m} = \frac{\rho AL_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L_0^2/12 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Na Equação (32)  $\mathbf{0}_3$  é a matriz nula de ordem 3 e  $\rho$  é a densidade. Nessa matriz, toda a massa dos elementos é transferida diretamente para seus nós. A matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$  é proporcional à massa sendo definida pela expressão:

$$\mathbf{C} = 2c_m\mathbf{M}, \quad (34)$$

em que  $c_m$  é o coeficiente de amortecimento.

#### 4. Resultados numéricos

Um código computacional escrito com o programa Scilab (SCILAB, 2023) é desenvolvido com base no algoritmo descrito na Figura 1. Três exemplos numéricos encontrados na literatura são mostrados para avaliar a precisão e a eficiência da formulação apresentada, no que diz respeito a prever o comportamento dinâmico elástico não linear de vigas planas. Em todas as análises estruturais, adota-se a matriz de massa concentrada dada pelas Equações (32) e (33). As constantes  $\gamma$  e  $\beta$  referentes ao método de Newmark são consideradas iguais a 0,5 e 0,25, respectivamente.

##### 4.1 Viga em balanço sujeita a uma força $P(t)$ e sem amortecimento

Seja a viga em balanço ilustrada na Figura 2 com comprimento indeformado  $L_0 = 1,0 \times 10^3$  cm e seção transversal retangular com dimensões  $(50 \times 25)$  cm<sup>2</sup>. O material que constitui a mesma tem módulo de elasticidade longitudinal  $E = 210$  GPa e massa por unidade de volume igual a  $7,850 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

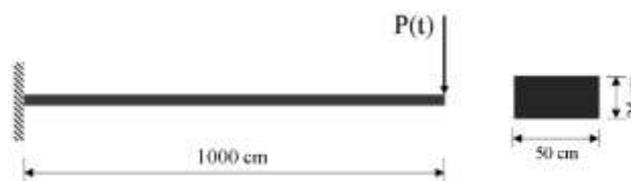


Figura 2 – Viga em balanço: modelo estrutural.

Essa estrutura é submetida a uma força vertical em kN em sua extremidade livre em função do tempo  $t$  dada pela equação:

$$P(t) = 10^4 \text{ sen}(50 t). \quad (35)$$

Vinte elementos finitos de viga-pilar são usados na discretização da viga. O incremento de tempo adotado é  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-4}$  s, a tolerância para o critério de convergência  $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-5}$ , o tempo máximo  $t_{\text{máx}} = 1,5$  s e o número máximo de iterações por passo de tempo  $k_{\text{máx}} = 200$ .

A resposta não linear referente à curva tempo *versus* deslocamento vertical na extremidade livre é mostrada na Figura 3, havendo razoável concordância com os pontos obtidos por Viana et al. (2020). A análise dinâmica é efetuada sem amortecimento, sendo a matriz de amortecimento  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ . A solução aproximada é alcançada com o número de passos de tempo  $n_p = 1,5 \times 10^4$  e de iterações acumuladas até a convergência  $k_{\text{total}} = 3,0011 \times 10^4$  ( $k_{\text{médio}} \cong 2,0007$ ).

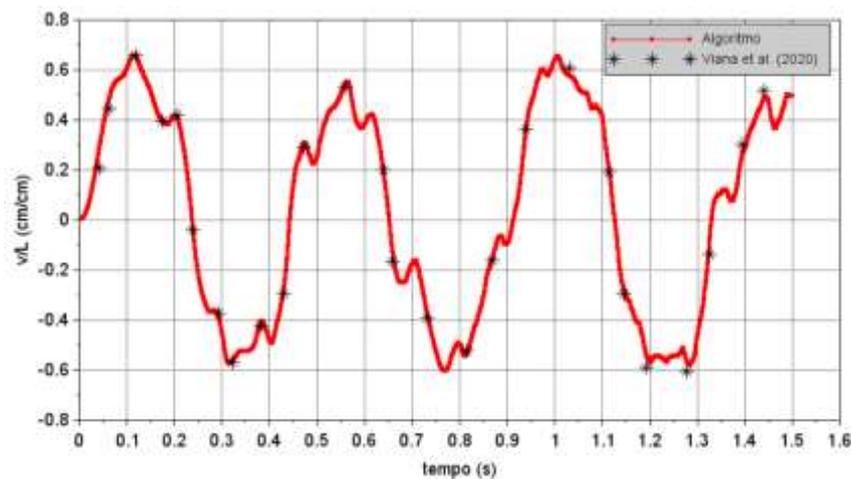


Figura 3 – Viga em balanço: curva tempo *versus* deslocamento vertical na extremidade livre da viga.

#### 4.2 Viga biengastada sujeita a uma força $P(t)$ e sem amortecimento

A viga biengastada ilustrada na Figura 4 tem 51 cm de comprimento e seção transversal retangular com área  $A = 0,806 \text{ cm}^2$  e momento de inércia  $I = 6,77 \times 10^{-3} \text{ cm}^4$ . O módulo de elasticidade e a massa volumétrica são adotados iguais a 206,84 GPa e  $2,7786 \times 10^3 \text{ Ns}^2/\text{m}^4$ , respectivamente. Incrementos constantes de tempo  $\Delta t$  e de magnitude  $1,0 \times 10^{-5}$  s são considerados para a análise transiente. Uma carga  $P = 2,85 \text{ kN}$  é aplicada na estrutura durante 1,0 s e o deslocamento vertical no centro da viga (ponto de aplicação da força) é controlado durante 0,005 s. Adotam-se a tolerância  $\text{tol}$  para o critério de convergência igual a  $1,0 \times 10^{-10}$  e o número máximo de iterações  $k_{\text{máx}}$  igual a 200. Na discretização da estrutura, 40 elementos finitos de viga-pilar são utilizados.

A análise dinâmica é efetuada sem amortecimento (matriz de amortecimento  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ). A resposta não linear tempo *versus* deslocamento vertical no centro da viga é apresentada na Figura 5, havendo razoável concordância com os pontos obtidos por Yang e Saigal (1984) e Silva (2009). A solução é alcançada com o número de passos de tempo  $n_p = 500$  e de iterações acumuladas até a convergência  $k_{\text{total}} = 1823$  ( $k_{\text{médio}} = 3,646$ ). As configurações deformadas e indeformada para alguns passos de tempo  $t$  são mostradas na

Figura 6.

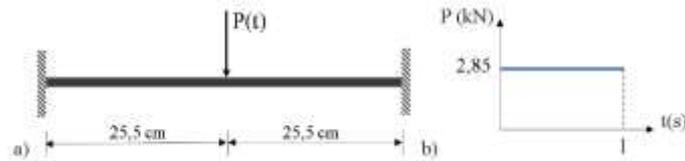


Figura 4 – Viga biengastada: a) modelo estrutural e b) força em função do tempo.

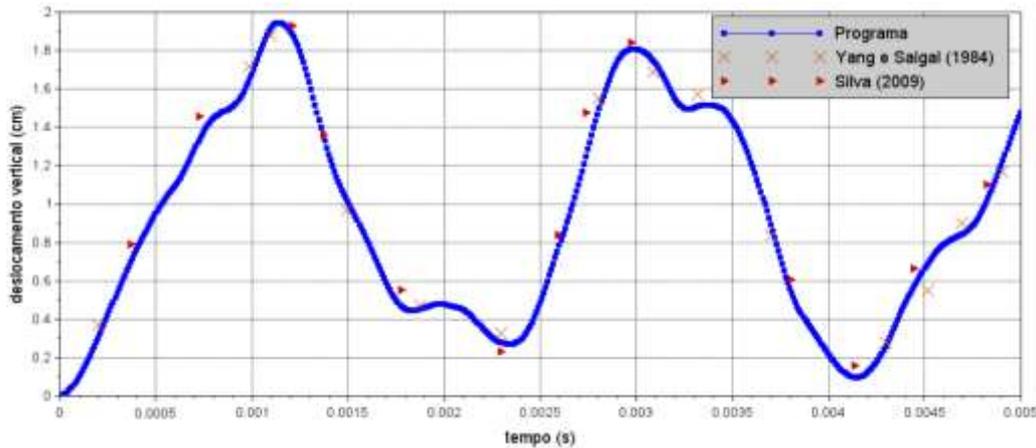


Figura 5 – Viga biengastada: curva tempo versus deslocamento vertical no centro da viga.

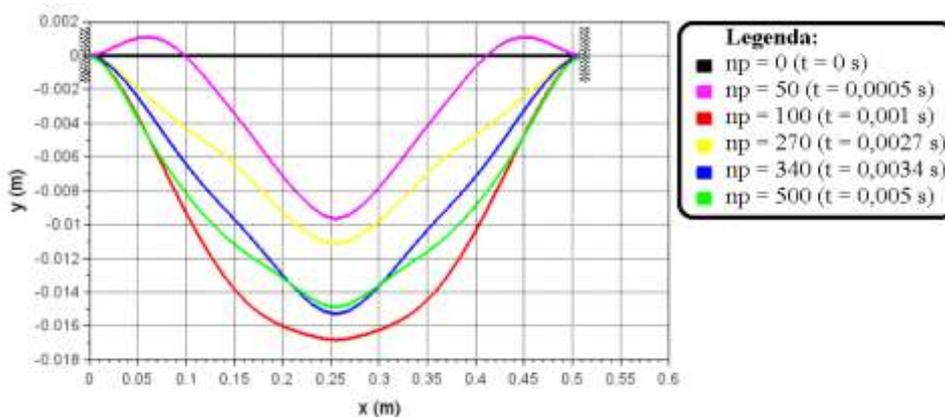


Figura 6 – Viga biengastada: configurações deformadas e indeformada para alguns passos de tempos t.

### 4.3 Viga em balanço sujeita a uma força $P(t)$ e com amortecimento

Considere a viga em balanço sujeita a uma força concentrada dinâmica  $P(t)$  na sua extremidade livre, conforme a Figura 7. O objetivo deste exemplo é verificar a formulação relacionada ao amortecimento. A rigidez à flexão da viga é elevada e são obtidos os deslocamentos verticais no ponto de aplicação da carga. A malha de elementos finitos consiste de 10 elementos e 11 nós. Os parâmetros adotados para análise dinâmica são:  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-4}$  s;  $tol = 1,0 \times 10^{-5}$ ;  $k_{m\acute{a}x} = 200$ ; e  $t_{m\acute{a}x} = 0,05$  s.

As respostas dinâmicas para as situações sem ( $c_m = 0$ ) e com amortecimento ( $c_m = 200$  s<sup>-1</sup>) são apresentadas na Figura 8, havendo razoável conformidade com os pontos obtidos por Marques (2006). Salienta-se que o deslocamento vertical para a análise dinâmica com

amortecimento converge para 0,0257067 m (para o tempo  $t = 0,05$  s). Os resultados numéricos ( $n_p$ ,  $k_{total}$  e  $k_{médio}$ ) são apresentados na Tabela 1.

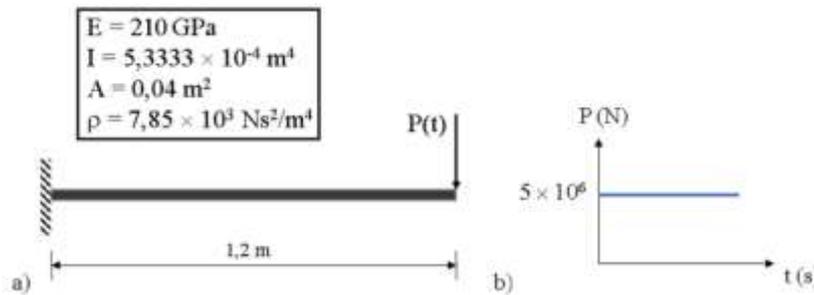


Figura 7 – Viga em balanço: a) modelo estrutural e propriedades materiais e geométricas; e b) carga dinâmica.

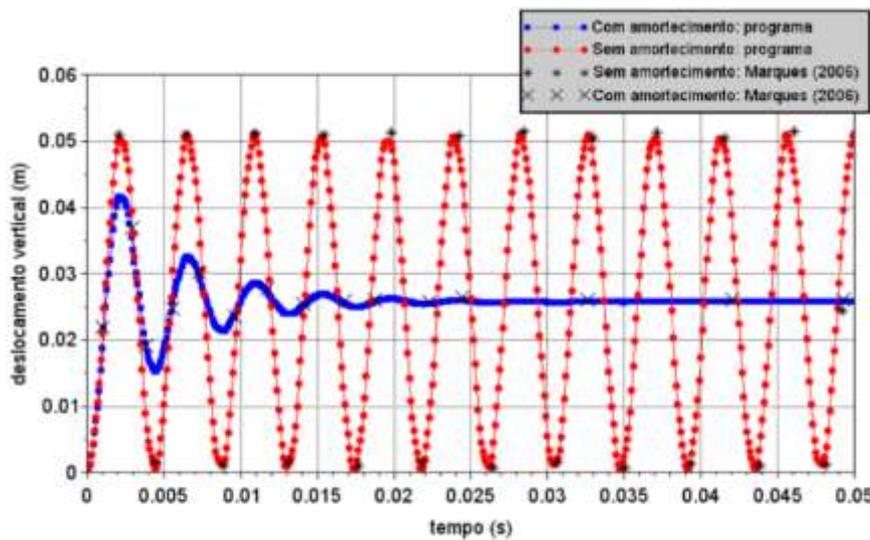


Figura 8 – Viga em balanço: curva tempo *versus* deslocamento vertical para a viga sem e com amortecimento.

Tabela 1 – Resultados numéricos para a viga em balanço sem e com amortecimento

Análise dinâmica	$n_p$	$k_{total}$	$k_{médio}$
Sem amortecimento	500	1350	2,70
Com amortecimento	500	1015	2,03

Fonte: O próprio autor.

#### 4.4 Considerações adicionais acerca das análises dinâmicas

A abordagem corrotacional é um método atraente para derivar elementos finitos de viga-pilar não lineares eficientes. A ideia principal dessa abordagem é que o movimento do elemento é decomposto em duas partes: corpo rígido e deformacional puro. Um sistema de coordenadas locais, que se move e gira com o movimento geral do corpo rígido do elemento, é definido. A parte deformacional é medida nesse sistema local.

Verifica-se que o procedimento baseado no método implícito de Newmark e no método de Newton-Raphson padrão é adequado para as análises não lineares dinâmicas dos problemas estudados. As condições de equilíbrio são usadas no tempo  $(t + \Delta t)$  e a matriz de rigidez efetiva  $\hat{K}$  é atualizada a cada iteração na fase de correção da solução predita.

O método de Newmark é conhecido como método de aceleração linear. Os dois parâmetros constantes  $\beta$  e  $\gamma$  controlam a precisão e a estabilidade desse método. O método pode ser implícito ou explícito dependendo do valor de  $\beta$  (MORADIPOUR et al., 2013).

Destaca-se a importância em se adotar intervalos de tempo  $\Delta t$  adequados, uma vez que a discretização temporal está diretamente ligada com a estabilidade e/ou a precisão da resposta do algoritmo (MARQUES, 2006; CAVALCANTE; MACIEL; GRECO, 2018). A escolha da matriz de massa também tem relevância, haja vista que sua escolha de forma equivocada pode acarretar em resultados incoerentes (LE; BATTINI; HJIAJ, 2011).

## 5. Conclusão

Uma formulação corrotacional de elementos finitos fundamentada na teoria de viga de Euler-Bernoulli e um procedimento numérico para análise dinâmica geometricamente não linear de vigas (com grandes rotações e deslocamentos, mas pequenas deformações) foram apresentados. O procedimento iterativo e incremental baseado no método de integração direta de Newmark e no método de Newton-Raphson padrão foi empregado para a solução do sistema das equações não lineares de movimento.

A partir dos exemplos numéricos estudados, a precisão e a eficiência do modelo numérico-computacional implementado ficaram bem demonstradas. Acredita-se que a formulação corrotacional consistente para o elemento de viga-pilar e o procedimento numérico aqui apresentados podem representar uma valiosa ferramenta de engenharia para a análise não linear dinâmica de estruturas reticuladas.

Os seguintes temas para pesquisa futura são sugeridos no que tange à implementação computacional: incorporar ao modelo numérico a não linearidade física por meio de modelos constitutivos da Elastoplasticidade e da Mecânica do Dano; inserir elemento de ligação de comprimento nulo para simular a ligação semirrígida; inserir a formulação de elementos de viga-pilar baseada na teoria de viga de Timoshenko; fazer análises com outras matrizes de massa, como a matriz de massa de Timoshenko; aplicar o modelo numérico a pórticos e arcos planos; e, por fim, implementar outros métodos implícitos de integração temporal para obter a solução aproximada do sistema de equações não lineares do movimento.

## Agradecimentos

O autor agradece à Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PCV da Universidade Estadual de Maringá - UEM pelo apoio no desenvolvimento desta pesquisa.

## Referências

- ARRUDA, M. R. T. & MOLDOVAN, D. I. *On a mixed time integration procedure for non-linear structural dynamics*. Engineering Computations, Vol. 32, n. 2, p. 329-369, 2015.
- CAVALCANTE, J. P. B.; MACIEL, D. N.; GRECO, M. *Impact response of flying objects modeled by Positional Finite Element Method*. International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 18, n. 06, p. 1850076, 2018.
- CHOPRA, A. K. *Dynamics of Structures*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1995
- CODA, H. B. & PACCOLA, R. R. *A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse*. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 91, p. 1-15, 2014.
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol. 1. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 1991.

**DE BORST, R.; CRISFIELD, M. A.; REMMERS, J. J. & VERHOESEL, C. V.** *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Nonlinear finite element analysis of solids and structures.* New York: John Wiley & Sons, 2012.

**DEIERLEIN, G. G.; REINHORN, A. M. & WILLFORD, M. R.** *Nonlinear structural analysis for seismic design.* NEHRP seismic design technical brief, Vol. 4, p. 1-36, 2010.

**KIEN, N. D.** *Effects of shear deformation on large deflection behavior of elastic frames.* Vietnam Journal of Mechanics, Vol. 26, n. 3, p. 167-181, 2004.

**LE, T. N.; BATTINI, J. M. & HJIAJ, M.** *Corotational dynamic formulation for 2d beams.* In: M. Papadrakakis, M. Fragiadakis, V. Plevris (eds.). COMPDYN 2011, ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering. Corfu, Greece: 2011

**LI, J. & YU, K.** *A truly self-starting implicit family of integration algorithms with dissipation control for nonlinear dynamics.* Nonlinear Dynamics, Vol. 102, n. 4, p. 2503-2530, 2020.

**MARQUES, G. C. S. C.** *Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais.* Dissertação (Mestre em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

**MORADIPOUR, P.; NOORZAEI, J.; JAAFAR, M. S. & AZIZ, F. N. A. A.** *An improved computational method in structural dynamics.* Journal of Engineering, Design and Technology, 2013.

**NEWMARK, N. M.** *A method of computation for structural dynamics.* Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 85, n. 3, p. 67-94, 1959.

**RODRIGUES, R. O. & VENTURINI, W. S.** *Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado.* Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, Vol. 7, n. 23, p. 61-93, 2005.

**SALLES, M. C.; VIANA, H. F.; SILVA, R. G.; LAVALL, A. C. & COSTA, R. S.** *Geometrically nonlinear transient analysis of plane steel frames using a corotational updated lagrangian formulation.* In: XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC, 2019, Natal/RN, Brazil. Anais ... Natal/RN: CILAMCE 2019, 2019.

SCILAB, versão 2023.1.0. Dassault Systèmes, 2023.

**SHANG, H. Y.; MACHADO, R. D. & ABDALLA FILHO, J. E.** *Dynamic analysis of Euler–Bernoulli beam problems using the generalized finite element method.* Computers & Structures, Vol. 173, p. 109-122, 2016.

**SILVA, A. R. D.** *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas.* Tese (Doutor em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Ouro Preto, Escola de Minas, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, 2009.

**TANG, Y. Q.; LIU, Y. P.; CHAN, S. L. & DU, E. F.** *An innovative co-rotational pointwise equilibrating polynomial element based on Timoshenko beam theory for second-order analysis.* Thin-Walled Structures, Vol. 141, p. 15-27, 2019.

**VIANA, H. F.** *Análise avançada dinâmica de pórticos planos de aço.* Dissertação (Mestre em Engenharia Civil) - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.

**VIANA, H. F.; DA SILVA, R. G. L.; COSTA, R. S. & LAVALL, A. C. C.** *Formulation for nonlinear dynamic analysis of steel frames considering the plastic zone method.* Engineering Structures, Vol. 223, p. 111197, 2020.

**XU, C.; WANG, Z. & LI, H.** *Direct FE numerical simulation for dynamic instability of frame structures.* International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 236, p. 107732, 2022.

**YANG, T. Y. & SAIGAL, S.** *A simple element for static and dynamic response of beams with material and geometric nonlinearities.* International journal for numerical methods in engineering, Vol. 20, n. 5, p. 851-867, 1984.

**YAW, L. L.** *2D Corotational Beam Formulation.* Walla Walla, USA: Walla Walla University, 2009.