# RECONSTRUÇÃO DA TRAJETÓRIA DE PROJÉTEIS BALÍSTICOS USANDO ALGORITMOS GENÉTICOS

Rafael Saraiva Campos (CEFET/RJ) E-mail: rafael.campos@cefet-rj.br

Resumo: As aplicações interdisciplinares baseadas em Inteligência Artificial (IA) estão se tornando cada vez mais pervasivas, com impactos nos serviços, produção, trabalho e educação. Consequentemente, a integração do treinamento em IA nos cursos de graduação em Engenharia é de grande importância. No entanto, cada área da Engenharia tem suas peculiaridades, e estas devem ser levadas em consideração ao ensinar tópicos relacionados à IA. Nesse sentido, este trabalho utiliza um exemplo didático amplamente empregado em cursos de graduação em Engenharia como ponto de entrada para o estudo aplicado de IA. O problema em questão é determinar a trajetória de um projétil obliquamente lançado, utilizando dados experimentais simulados ruidosos coletados em algumas posições ao longo de seu percurso. Este é um problema inverso, aqui resolvido utilizando Algoritmos Genéticos, que é uma implementação da chamada técnica de Aprendizado Evolutivo. A abordagem proposta demonstra o potencial do uso da IA para resolver problemas que geralmente são abordados usando métodos clássicos. Os resultados obtidos neste trabalho mostram que o GA pode efetivamente minimizar o erro de reconstrução da trajetória balística, mesmo na presença de ruído. A abordagem apresentada aqui pode ser estendida a outras áreas da Engenharia, adaptando o exemplo às suas necessidades específicas. Portanto, este trabalho contribui para a discussão sobre como incorporar a IA na educação em Engenharia, fornecendo um exemplo prático e didático de seu uso na Engenharia Mecânica.

Palavras-chave: trajetória de projéteis, problema inverso, otimização, algoritmos genéticos

# RECONSTRUCTION OF BALLISTIC PROJECTILES TRAJECTORY USING GENETIC ALGORITHMS

Abstract: Artificial Intelligence (AI) based interdisciplinary applications are becoming increasingly pervasive, with associated current and foreseeable impacts on services, production, labour, and education. Consequently, the integration of AI training into Engineering undergraduate courses is of great importance. However, each area of Engineering has its peculiarities, and those should be taken into consideration when teaching AI-related topics. Accordingly, this paper employs a didactic example widely used in undergraduate Mechanical Engineering courses as an entry point to the applied study of AI. The problem in question is determining an oblique projectile trajectory from noisy simulated experimental data taken along its route. This is an inverse problem that is here solved using Genetic Algorithms, which is an implementation of the so-called Evolutionary Learning

**Keywords:** projectile trajectory, inverse problem, optimization, genetic algorithms

### 1. Introdução

As aplicações interdisciplinares baseadas em Inteligência Artificial (IA) estão se tornando cada vez mais pervasivas, e seus impactos reais e previsíveis em serviços, produção e trabalho são objeto de interesse (e preocupação) para muitos (FREY, 2017). Notavelmente, para as empresas de Engenharia, o uso de soluções baseadas em IA será decisivo para sua competitividade. Além disso, essas empresas enfrentarão a responsabilidade de introduzir novas tecnologias, como veículos autônomos e máquinas automatizadas em geral, em que a segurança pública deve ser assegurada (VDMA EUROPEAN OFFICE, 2018). Portanto, a integração do treinamento em IA nos cursos de graduação em Engenharia Mecânica é de suma importância.

Nessa perspectiva, este artigo propõe o uso de um exemplo didático de Dinâmica, amplamente utilizado em cursos de graduação em Engenharia Mecânica, como um ponto de entrada para o estudo aplicado de IA. O exemplo em questão é o movimento de projéteis em um lançamento oblíquo, que aqui será abordado a partir de uma

perspectiva de problema inverso, ou seja, a reconstrução da trajetória do projétil a partir de amostras experimentais. Normalmente, esse problema é abordado de maneira inversa usando métodos numéricos iterativos, como Gradiente Descendente e mínimos quadrados iterativos. Em particular, em Nelson et al. (2005) uma técnica de regressão não-linear é aplicada para a determinação da trajetória balística a partir de medidas de radar de campo de batalha, com o objetivo final de determinar a localização de uma peça de artilharia inimiga. Várias forças armadas desenvolveram ou adquiriram sistemas de radar para caça à artilharia, como o Radar de Monitoramento de Artilharia Móvel (MAMBA - Mobile Artillery Monitoring Battlefield Radar) britânico, capaz de localizar armas de artilharia inimigas com uma probabilidade de erro circular (CEP) menor que 30 metros (THE BRITISH ARMY, 2002).

Metodologia de problemas inversos tem sido amplamente utilizada para recuperar parâmetros de equações governantes a partir de dados experimentais ruidosos (GROETSCH, 1999; ASTER et al., 2013). Nas simulações apresentadas em Nelson et al. (2005), bem como neste artigo, dado um conjunto de amostras das posições do projétil, a abordagem de problema inverso tem como objetivo reconstruir a trajetória do projétil, com a finalidade de obter uma estimativa de geolocalização do ponto de lançamento do projétil. No entanto, em vez de usar métodos clássicos, este artigo aborda tal problema usando IA, mais especificamente, empregando Algoritmos Genéticos (GAs – Genetic Algorithms), uma técnica de aprendizado evolutivo (GOLDBERG, 1989). Dado um conjunto de medidas ruidosas, o GA é usado aqui como uma técnica de otimização para minimizar o erro de reconstrução da trajetória balística. Outro exemplo de uso do GA como uma abordagem adaptativa para um problema de cinemática analiticamente solucionável pode ser encontrado em (CORDENONSI et al., 1997), onde o GA foi empregado para obter a melhor variação do vetor de velocidade de um míssil, a fim de otimizar o tempo necessário para atingir o alvo.

A Inteligência Artificial (IA) abrange um amplo escopo de técnicas inspiradas em processos naturais: redes neurais artificiais (RNA), sistemas especialistas, sistemas de inferência fuzzy e algoritmos genéticos (GAs), para citar apenas alguns. O conceito de RNA é baseado em neurônios e suas conexões. Sistemas especialistas visam imitar a capacidade de inferência humana. Sistemas de inferência fuzzy são inspirados em algumas das características do processamento linguístico humano. A noção de GAs é baseada em seleção natural e evolução genética (GOLDBERG, 1989; MARSLAND, 2015). GAs são uma implementação de aprendizado evolutivo, sendo fundamentados no conceito darwiniano de evolução das espécies, resumido na Figura 1. A evolução das espécies pode ser entendida como um tipo de aprendizado coletivo, onde os indivíduos são configurados pelo seu DNA, que é composto de cromossomos contendo sequências de genes. Quanto maior a aptidão de um indivíduo, maior sua chance de sobrevivência e reprodução. A reprodução sexual e a mutação produzem variabilidade genética. A reprodução sexual cria indivíduos para a geração seguinte a partir da geração atual. As mutações são erros estocásticos na replicação do DNA que geralmente resultam em indivíduos incapazes de sobreviver, mas ocasionalmente resultam em uma vantagem adaptativa.

Os GAs têm sido amplamente aplicados a problemas de otimização. Cada solução candidata é chamada de indivíduo, codificado por uma sequência de números (o cromossomo e seus genes, respectivamente). Em cada iteração (geração) do algoritmo, a população compreende o conjunto de todos os indivíduos. Em cada geração, é formado um pool de acasalamento, que é um subconjunto da população atual selecionado para criar indivíduos por recombinação genética (crossover). O crossover é a mistura de

segmentos de cromossomos de dois indivíduos (pais), produzindo novos indivíduos (descendentes) para a geração subsequente. Cada indivíduo pode ser selecionado mais de uma vez, aparecendo várias vezes no pool de acasalamento, ou não ser selecionado. A estratégia de seleção tenta imitar a natureza, onde os indivíduos mais aptos têm maior probabilidade de encontrar um parceiro para reprodução. Uma função de performance específica do problema avalia a aptidão dos indivíduos. Quanto maior a aptidão da solução candidata, maior a probabilidade de ser selecionada para reproduzir por meio da troca de genes, gerando novos indivíduos (LAWRENCE, 1991; HOLLAND, 1992). Finalmente, a mutação introduz mudanças aleatórias nos genes do cromossomo. Após o crossover, a mutação pode ocorrer em qualquer indivíduo na nova população com uma determinada probabilidade. Por exemplo, se os genes são representados em código binário, então a mutação pode ser aplicada simplesmente invertendo bits aleatoriamente. Para representações em valores reais, existem diferentes implementações de mutação (HOUCK et al., 1995).

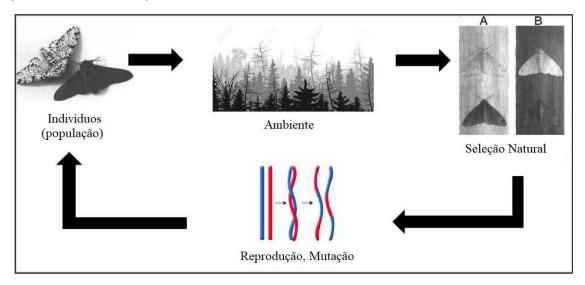


Figura 1 - O conceito darwiniano da evolução das espécies: (a) indivíduos enfrentam seleção do ambiente; (b) os indivíduos mais aptos têm maior probabilidade de sobreviver tempo suficiente para procriar, passando assim suas características para a próxima geração; a aptidão de um indivíduo é baseada nas condições ambientais: note que, no exemplo da imagem, quando a poluição do ar escurece os troncos das árvores, as mariposas escuras se tornam menos perceptíveis e, portanto, menos suscetíveis a ataques de predadores, o que resulta em um aumento do número de mariposas pretas em comparação com as brancas ao longo das gerações; (c) a reprodução sexual garante diversidade genética, como resultado da troca de material genético durante o crossover; a mutação - um erro aleatório na replicação do DNA - aumenta a diversidade genética; (d) esse ciclo continua indefinidamente.

O ciclo do GA prossegue até que um critério de parada seja atingido, como número máximo de gerações, valor máximo da função de aptidão ou o limite de tempo de computação. O indivíduo mais apto da última geração é uma solução sub-ótima para o problema (PARDALOS et al., 1995). O ciclo evolutivo do GA é resumido na lista a seguir:

- a) a primeira geração da população é criada de forma estocástica dentro de limites pré-determinados;
- b) uma função de aptidão avalia a qualidade de cada solução-candidata (indivíduo);

- c) uma estratégia de seleção cria o pool de acasalamento;
- d) cruzamento e mutação criam indivíduos para a geração seguinte;
- e) parar se o critério de parada tiver sido atendido, caso contrário, voltar para (b).

### 2. Procedimento Experimental

## 2.1. Equações Paramétricas do Movimento do Projétil

A determinação da trajetória de um projétil lançado com um ângulo oblíquo (como mostra a Figura 2) é um dos problemas didáticos mais conhecidos de Dinâmica nos cursos de graduação em Engenharia Mecânica (LANGE et al., 2010). Ele pode ser abordado com diferentes níveis de complexidade física. Em uma de suas formas mais simples, assume-se que um projétil de massa m é lançado no instante t=0 a partir da posição  $\left(x_0, y_0, z_0\right)$  metros com velocidade inicial  $\left(x_0, y_0, z_0\right)$  metros por segundo, sujeito à aceleração g da gravidade da Terra  $\left(m/s^2\right)$  e resistência do ar constante, expressa por um coeficiente de arrasto C.

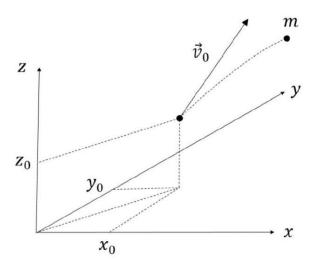


Figura 2 – Trajetória tridimensional oblíqua de um projétil de massa m lançado de uma posição  $(x_0, y_0, z_0)$  com velocidade inicial  $\overrightarrow{v}_0$ .

Usando a Segunda Lei de Newton, o movimento do projétil no espaço pode ser modelado por

$$\vec{f}(t) = \vec{ma}(t) = -\vec{Cv}(t) - \vec{mgk}(t) \quad (1)$$

onde  $\vec{k}$  é o versor do eixo  $\vec{z}$  (direção vertical, sentido para cima),  $\vec{f}$  é a força resultante em Newtons, e  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$  são, respectivamente, a velocidade e a aceleração instantâneas do projétil, dadas por

$$\vec{a}(t) = \vec{x}(t)\vec{i} + \vec{y}(t)\vec{j} + \vec{z}(t)\vec{k}$$
(2)  

$$\vec{v}(t) = \vec{x}(t)\vec{i} + \vec{y}(t)\vec{j} + \vec{z}(t)\vec{k}$$
(3)

A partir das equações anteriores, pode-se escrever o seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs):

$$mx(t) + Cx(t) = 0 (4)$$

$$m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) = 0$$
 (5)  
 $m\ddot{z}(t) + \frac{c}{m}\dot{z}(t) = -g$  (6)

Cuja solução em relação ao parâmetro *t* fornece o conjunto de equações paramétricas do movimento do projétil:

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{c} \dot{x}_0 \left( 1 - e^{-\frac{Ct}{m}} \right)$$
 (7)  

$$y(t) = y_0 + \frac{m}{c} \dot{y}_0 \left( 1 - e^{-\frac{Ct}{m}} \right)$$
 (8)  

$$z(t) = z_0 - \frac{mg}{c} t + \frac{m}{c} \left( \dot{z}_0 + \frac{mg}{c} \right) \left( 1 - e^{-\frac{Ct}{m}} \right)$$
 (9)

Derivando as Equações 7, 8 e 9 obtém-se as velocidades

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 e^{-\frac{Ct}{m}} \quad (10)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_0 e^{-\frac{Ct}{m}} \quad (11)$$

$$\dot{z}(t) = -\frac{mg}{C} + \frac{m}{C} \left( \dot{z}_0 + \frac{mg}{C} \right) e^{-\frac{Ct}{m}} \quad (12)$$

#### 2.2. O Problema Inverso

Para simular a aquisição de dados experimentais corrompidos, um total de I amostras da posição do projétil ao longo do percurso devem ser tomadas, inserindo um ruído gaussiano aditivo com desvio padrão  $\sigma$  metros ao redor da posição real, como definido a seguir:

$$\hat{x}_{j} = N(x_{j}(t), \sigma) = x(t_{j}) + N(0, \sigma) \quad (13)$$

$$\hat{y}_{j} = N(y_{j}(t), \sigma) = y(t_{j}) + N(0, \sigma) \quad (14)$$

$$\hat{z}_{i} = N(z_{i}(t), \sigma) = z(t_{i}) + N(0, \sigma) \quad (15)$$

 $z_j = N(z_j(t), \sigma) = z(t_j) + N(0, \sigma)$  (15) onde  $t_j$  é o instante em que a *j*-ésima amostra foi coletada,  $j = 1, \dots, I$ , e  $N(\mu, \sigma)$  indica um valor aleatório extraído de uma distribuição normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ .

No problema proposto, C, g e m são constantes conhecidas. Também se assume que o vetor de velocidade inicial dado por  $(x_0, y_0, z_0)$  é dado. O problema inverso, então, tem como objetivo resolver

$$\sum_{i=1}^{I} \| \vec{\delta}_{j} \|^{2} \qquad (16)$$

onde

$$\vec{\delta}_{i} = \left(x(T_{i}) - \hat{x}_{i}\right)\vec{i} + \left(y(T_{i}) - \hat{y}_{i}\right)\vec{j} + \left(z(T_{i}) - \hat{z}_{i}\right)\vec{k} \quad (17)$$

é o vetor cuja norma fornece a distância entre a j-ésima amostra e a trajetória estimada do projétil, conforme indicado na Figura 3. Note que  $T_j$  não é o instante em que a j-ésima amostra foi coletada (dado por  $t_j$ ), mas sim o valor do parâmetro t que satisfaz à equação vetorial

$$\vec{v}(T_i) \cdot \vec{\delta}_i = 0 \quad (18)$$

onde  $\overrightarrow{v}(T_j)$ , que é definida pela Equação 3, é tangente à trajetória do projétil no ponto  $(x(T_j), y(T_j), z(T_j))$ .

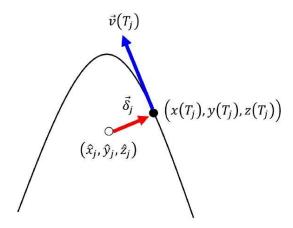


Figura 3 – A distância Euclidiana entre a *j*-ésima amostra  $(\hat{x}_j, \hat{y}_j, \hat{z}_j)$  e a trajetória reconstruída é dada pela norma  $||\vec{\delta}_i||$ . Note que  $\vec{v}(T_i) \perp \vec{\delta}_i$  para  $j=1, \dots, I$ .

# 2.3. Reconstruindo a Trajetória e Estimando o Ponto de Lançamento usando um Algoritmo Genético

Neste exemplo, cada indivíduo da população representa uma localização no espaço tridimensional para a origem da trajetória do projétil. Portanto, o cromossomo de cada indivíduo é uma sequência de três números, conforme indicado na Figura 4a. Esta simulação utiliza uma população de tamanho N = 100 indivíduos por geração. A população inicial é criada aleatoriamente, distribuindo indivíduos dentro de uma região pré-determinada no espaço - um cubo centrado na origem e cuja aresta mede 1000 metros.

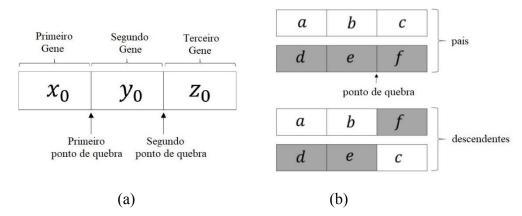


Figura 4 - (a) Cromossomo com 3 genes e 2 pontos de quebra possíveis; (b) Cross-over simples com 1 ponto de quebra.

A aptidão de cada indivíduo é usada pela função de seleção para compor o conjunto de acasalamento (mating pool). Os indivíduos mais aptos têm uma probabilidade maior de serem selecionados para a reprodução (crossover), e, assim, transmitir suas características para a nova geração. A aptidão é calculada por

$$S(x_0, y_0, z_0) = \frac{k}{\sum_{\substack{j=1\\j=1}}^{N} \|\vec{\delta}_j\|^2}$$
 (19)

onde k=1000 é um parâmetro definido empiricamente. Note que a função de aptidão é alimentada com os valores armazenados no cromossomo. Note também que ela usa o inverso da soma dos quadrados das distâncias entre os pontos amostrais e a trajetória reconstruída (definida como uma função de  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ ), ou seja, quanto menor a soma, maior é a aptidão do indivíduo. Os valores de  $\|\vec{\delta}_j\|$ ,  $j=1,\cdots,I$ , para um determinado indivíduo são necessários para estimar sua aptidão. Para obter cada  $\|\vec{\delta}_j\|$ , conforme indicado pela Equação 17, o correspondente  $T_j$  deve ser calculado primeiro, como definido pela Equação 18, que é resolvida numericamente usando um algoritmo que combina os métodos de bissecção, secante e interpolação quadrática inversa, como definido em (BRENT, 1973; FORSYTHE et al., 1976). Este procedimento está prontamente disponível para cálculo numérico por meio da função *fzero* no MATLAB (KAISARE, 2017).

A estratégia de seleção adotada neste exemplo é a chamada seleção geométrica normalizada (HOUCK et al., 1995), em que a população é classificada em ordem decrescente de aptidão, sendo a probabilidade de selecionar o *i*-ésimo indivíduo dada por

$$P(i) = \frac{q(1-q)^{i-1}}{1-(1-q)^{N}} \quad (20)$$

Com i = 1, ..., N, onde N é o tamanho da população, e q é um parâmetro definido pelo usuário e que indica a probabilidade de selecionar o melhor indivíduo (i = 1). Neste exemplo, q = 0.08.

Durante o cruzamento, dois indivíduos no pool de acasalamento trocam material genético. Para isso, um ponto de quebra é selecionado aleatoriamente e os segmentos resultantes são trocados entre o par, produzindo dois indivíduos (descendentes) para a nova geração, como mostra a Figura 4b.

Também durante o cruzamento, erros aleatórios podem ocorrer, resultando em uma mutação. Tipicamente, na Natureza as mutações ocorrem em uma pequena porcentagem da população de uma espécie, e quando acontecem, resultam em indivíduos não viáveis. No entanto, eventualmente, elas podem produzir novas características que melhoram a aptidão do mutante para sobreviver. Neste exemplo, é usada uma alta taxa de mutação (25%) para permitir maior variabilidade genética, ou seja, para ampliar a exploração do espaço de soluções candidatas, aumentando a probabilidade de encontrar a solução ótima. A taxa de mutação indica a porcentagem de descendentes do cruzamento que sofrerão mutação. Para cada um desses indivíduos, a mutação é implementada selecionando aleatoriamente um de seus genes e substituindo o valor do gene por um número aleatório uniforme entre limites pré-definidos (neste caso, entre -500 e +500 metros).

O cruzamento e a mutação geram indivíduos, produzindo uma nova geração. No entanto, não há garantia de que os novos indivíduos terão uma aptidão maior do que seus ancestrais. Para evitar perder as melhores soluções candidatas ao longo do ciclo do GA, pode-se usar a substituição de toda a população com elitismo, ou seja, os descendentes são gerados pelos cruzamentos, e um clone do indivíduo mais apto da geração atual é inserido na geração seguinte. Essa prática é chamada de elitismo

(GOLDBERG, 1989).

O ciclo do GA encerra-se se a aptidão do melhor (mais apto) indivíduo não melhorar pelo menos  $\varepsilon=10^{-4}$  durante  $\phi=15$  gerações consecutivas, ou se o número máximo de gerações  $g_{max}=1000$  for atingido, o que ocorrer primeiro. O primeiro critério leva em conta o fato de que se a aptidão do melhor indivíduo chegar a um estado estável, pode indicar que o algoritmo GA está preso em um máximo local e, consequentemente, criar mais gerações seria inútil. Ambos os critérios limitam a duração total da simulação, portanto, os valores de  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  e  $g_{max}$  devem ser definidos empiricamente, de acordo com os recursos disponíveis, como capacidade de processamento e armazenamento.

#### 3. Resultados e Discussão

As simulações foram realizadas para diferentes números de amostras (I=10, 25 e 50) e níveis de ruído ( $\sigma=9, 45.3 \text{ e } 90.6 \text{ metros}$ ) usando a biblioteca de otimização GA para MATLAB (HOUCK et al., 1995), assumindo que um projétil com massa m=15 kg é lançado com velocidade inicial  $x_0=y_0=z_0=150 \text{ m/s}$ . Suposições razoáveis sobre a velocidade inicial e a massa do projétil podem ser feitas com base nas características típicas de armas de artilharia. A localização do lançamento é a origem do sistema de coordenadas, ou seja, (0,0). Finalmente,  $C=0.4 \text{ e } g=9.81 \text{ m/s}^2$ . Sob essas condições, os três valores mencionados acima do desvio padrão do ruído correspondem a 1%, 5% e 10% da altitude máxima alcançada pelo projétil, respectivamente.

O objetivo ao usar o GA é minimizar o erro de reconstrução da trajetória do projétil. No entanto, se considerarmos uma aplicação do mundo real dessa técnica - por exemplo, medidas defensivas, como contra artilharia em uma situação de combate - o objetivo final da reconstrução é permitir a localização das coordenadas de lançamento do projétil, a fim de desabilitar o atacante. Nesse cenário, provavelmente apenas as seções finais do voo do projétil estarão acessíveis aos defensores. Consequentemente, nesta simulação, as amostras foram tomadas aleatoriamente ao longo dos dois terços finais da trajetória do projétil.

#### 3.1. Convergência do Algoritmo Genético

As Figuras 5, 6 e 7 representam os resultados obtidos com I=10 e  $\sigma=9$  metros. A Figura 5 mostra a aptidão do melhor indivíduo (ou seja, a melhor solução candidata) por geração, bem como a aptidão média da população de cada geração. A função de aptidão no GA é análoga à função objetivo em uma abordagem clássica de otimização. Como o elitismo está sendo usado, a aptidão do melhor indivíduo é uma função monotonamente crescente. A Figura 6 fornece mais informações sobre a convergência da solução GA, mostrando a posição estimada de lançamento indicada pelo melhor indivíduo em cada geração. Pode-se observar que as soluções estimadas se aproximam gradualmente da localização real de lançamento (mostrada em azul). A Figura 7 mostra a distância euclidiana entre os pontos de lançamento reais e estimados ao longo das gerações. Observe que, após a 96ª geração, o algoritmo atinge um estado estacionário (levando ao seu término 15 gerações após), e que a localização estimada do lançador está dentro de 10 metros da posição real.

#### 3.2. Efeito do Ruído no Erro de Reconstrução

A Figura 8 mostra as trajetórias reconstruídas pelo GA usando I=10 amostras corrompidas por diferentes níveis de ruído gaussiano. Os erros nas estimativas dos pontos de lançamento são de 9.6, 39.6 e 50.5 metros, respectivamente. Mesmo com um número tão pequeno de amostras (em comparação com as 90 amostras necessárias para fornecer uma estimativa com erro semelhante àquela obtida em Nelson et al. (2005)), o algoritmo pode reconstruir a trajetória do projétil de forma reconhecível. No entanto, para afirmar que o erro alcançado nas estimativas de posição de lançamento é aceitável, seria necessário considerar a aplicação projetada. Por exemplo, em uma medida defensiva para desativar uma posição de artilharia inimiga, um erro aceitável na estimativa das coordenadas de lançamento dos projéteis teria que ser menor que o raio máximo de alcance da explosão dos mísseis de contrabateria sendo usados.

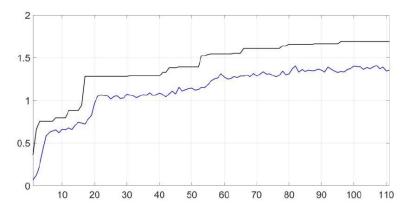


Figura 5 - Aptidão média da população (azul) e do melhor indivíduo (preto) por geração

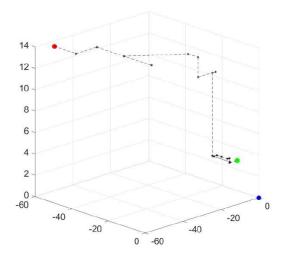


Figura 6 - Vista tridimensional das localizações estimadas do lançamento através das gerações, com as estimativas inicial (vermelho) e final (verde), bem como a localização real do lançamento (azul); todas as dimensões em metros.

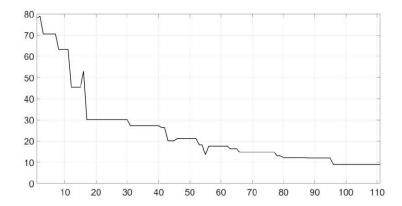


Figura 7 - Distância euclidiana em metros no espaço tridimensional entre a melhor solução de cada geração e o ponto real de lançamento.

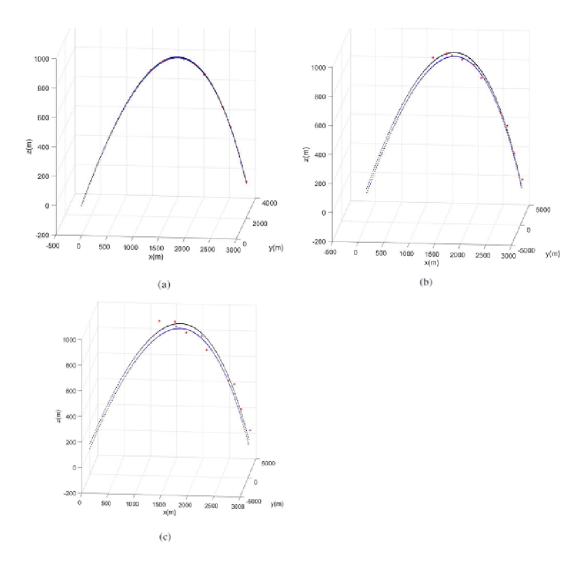


Figura 8 - Trajetórias reais (azul) e reconstruídas (preta) para  $\sigma$  igual a (a) 9 m, (b) 45.3 m e (c) 90.6 m. As localizações das amostras coletadas e corrompidas por ruído gaussiano também estão representadas (pontos vermelhos).

# 3.3. Efeito do Número de Amostras no Erro de Reconstrução

Para melhor avaliar o impacto do ruído no erro de reconstrução como função do número de amostras, o algoritmo é executado 100 vezes para I = 10, 25 e 50 amostras para três valores diferentes de σ. A Figura 9 resume os resultados, apresentando os boxplots do erro na estimativa da localização do ponto de lançamento. A Figura 9b mostra que, para o nível mais baixo de ruído ( $\sigma = 9$  m), o erro mediano é aproximadamente o mesmo para qualquer número de amostras: 21.6, 19.0 e 17.4 metros, para I = 10, 25 e 50 amostras, respectivamente. Por outro lado, a Figura 9f indica que, para o nível mais alto de ruído usado na simulação ( $\sigma = 90.6$  m), o erro mediano aumenta drasticamente à medida que o número de amostras diminui de 50 para 10. Mais amostras possibilitam resultados mais estáveis, com menor dispersão e erro máximo reduzido. Isso é evidenciado pelos resultados para I = 50: os boxplots para esse número de amostras são muito semelhantes para qualquer um dos valores de ruído considerados na simulação. Por exemplo, observe que, enquanto para I = 10 o erro mediano aumenta de 21.6 para 130 metros (um aumento de 500%) quando  $\sigma$  aumenta de 9 para 90.6 metros, para I = 50 a mesma variação de σ resulta em um aumento de apenas 100% no erro mediano (de 17.4 para 35.4 metros).

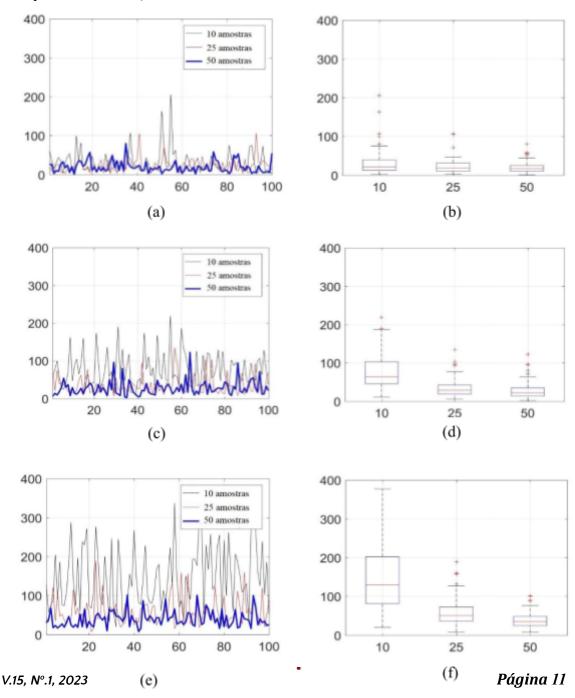


Figura 9 - Erros (distância euclidiana em espaço tridimensional) das estimativas de ponto de lançamento em 100 execuções do GA, e os respectivos boxplots, para σ igual a (a,b) 9 m, (c,d) 45.3 m e (e,f) 90.6 m.

#### 4. Conclusão

A importância do aprendizado de máquina (ML) em diversas aplicações de Engenharia está aumentando rapidamente. Algoritmos Genéticos (GAs) são uma das implementações mais importantes de Aprendizado Evolutivo, dentre a ampla variedade de paradigmas de ML. Neste experimento simulado, o GA é utilizado no problema inverso de reconstruir a trajetória tridimensional de um projétil a partir de amostras ruidosas para estimar a localização do ponto de lançamento. O emprego do GA em um problema bem conhecido e fácil de visualizar, fornece um ponto de entrada para estudantes de graduação (e pós-graduação) em Engenharia Mecânica no campo da Inteligência Artificial (IA) e permite uma melhor compreensão da metodologia de ML selecionada.

Para avaliar a validade da abordagem proposta, considerando sua natureza estocástica, o erro de estimativa do ponto de lançamento é analisado estatisticamente, executando o GA 100 vezes, cada vez com uma população inicial diferente gerada aleatoriamente. Os resultados mostram que a abordagem GA produz uma precisão comparável àquela fornecida por soluções numéricas ou analíticas clássicas.

Como desenvolvimento futuro, pode-se considerar incluir a velocidade inicial, a massa do projétil e o coeficiente de arrasto como parâmetros deste problema de otimização, codificando essas características como genes adicionais nos cromossomos das soluções candidatas. Embora isso aumente a carga computacional e o tempo de simulação, melhorará a aplicabilidade da busca adaptativa.

#### Referências

**ASTER, R. C.; BORCHES, B.; THURBER, C. H.** *Parameter Estimation and Inverse Problems*. 2. ed. Oxford Academic Press, 2013.

BRENT, R. Algorithms for Minimization Without Derivatives. Prentice-Hall, 1973.

**CORDENONSI, A. Z.; BARONI, D. A.; THIELO, M. R**. *Trajectories Control of a Projectile Using Genetic Algorithms in one Simulated Environment*. In: Proceedings of International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, p. 1289–1292, 1997.

FORSYTHE, G. G.; MALCOLM, M.; MOLER, C. Computer Methods for Mathematical Computations. Prentice-Hall, 1976.

**FREY, C.; OSBORNE, M**. *The Future of Employment: How Susceptible Are Jobs to Computerisation?* Technological Forecasting and Social Change, v. 114, p. 254–280, 2017.

**GOLBERG, D. E**. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. Addison-Wesley, 1989.

**GROETSCH, C. W.** *Inverse Problems: Activities for Undergraduates.* MAA Press, 1999.

HOLLAND, J. Adaptation in natural and artificial systems. MIT Press, 1992.

**HOUCK, C.; JOINES, J.; KAY, G. M.** A genetic algorithm for function optimization: a MATLAB implementation. NCSU-IE TR, vol. 95, n. 9, 1995.

KAISARE, N. S. Computational Techniques for Process Simulation and Analysis Using MATLAB. CRC

Press, 2017.

**LANGE, O. L.; PIERRUS, J.** Solved Problems in Classical Mechanics: Analytical and Numerical Solutions with Comments. Oxford Academic Press, 2010.

LAWRENCE, D. Handbook of Genetic Algorithms. Van Nostrand Reinhold, 1991.

MARSLAND, S. Machine learning: an algorithmic perspective. CRC Press, 2015.

**NELSON**, E.; **PACHTER**, M.; **MUSICK**, S. *Projectile Launch Point Estimation from Radar Measurements*. In: Proceedings of the 2005 American Control Conference, 2005.

**PARDALOS, M. P. ET AL.** Parallel search for combinatorial optimization: Genetic algorithms, simulated annealing, tabu search and GRASP. In: International Workshop on Parallel Algorithms for Irregularly Structured Problems, p. 317–331, 1995.

**THE BRITISH ARMY**. Artillery Locating Devices - MAMBA - Mobile artillery Monitoring Battlefield Radar (Ericsson ARTHUR). 2002. Available[Online]: <a href="www.armedforces.co.uk/army/listings/l0117.html">www.armedforces.co.uk/army/listings/l0117.html</a>.

**VDMA EUROPEAN OFFICE**. Artificial Intelligence in Mechanical Engineering - Perspectives and Recommendations for Action. 2018. Tech. Report. 976536291-45.