

## OTIMIZAÇÃO DE VIGAS EM CONCRETO ARMADO: PROPOSIÇÃO DE EQUAÇÃO PARA PRÉ-DIMENSIONAMENTO

Emanuelle Pinheiro Mendes (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul – IFMS – Campus Aquidauana) E-mail: emanuelle.mendes@estudante.ifms.edu.br

Milena Miranda Florentin (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul – IFMS – Campus Aquidauana) E-mail: milena.florentin@estudante.ifms.edu.br

Luan Matheus Moreira (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul – IFMS – Campus Aquidauana) E-mail: luan.moreira@ifms.edu.br

**Resumo:** Este artigo aborda a otimização de vigas em concreto armado, concentrando-se na proposição de uma equação para o pré-dimensionamento de vigas através da otimização e o uso da regressão linear. A pesquisa visa melhorar a eficiência no dimensionamento de vigas, considerando diversos parâmetros. Para tal, inicialmente foi estudado todo o processo para o dimensionamento de seções retangulares com armadura simples e dupla seguida das condições de verificação da deformação excessiva em vigas. Já para a implementação da otimização utilizou-se uma planilha eletrônica e a regressão linear foi realizada a partir de um banco de dados elaborado com os resultados da otimização. As equações propostas oferecem uma ferramenta prática para engenheiros projetistas, permitindo estimar a altura ideal das vigas de forma otimizada, economizando tempo e recursos durante a fase de projeto. Além disso, enfatiza-se a importância da validação das soluções obtidas por meio dessa equação, garantindo a segurança e a adequação estrutural. Este estudo contribui para o avanço da prática de projetos estruturais, promovendo a eficiência no projeto de vigas em concreto armado.

**Palavras-chave:** Concreto Armado, Otimização, Regressão linear, Armadura simples, Armadura dupla.

## OPTIMIZATION OF REINFORCED CONCRETE BEAMS: Proposal of an equation for pre-dimensioning

**Abstract:** This paper deals with the optimization of reinforced concrete beams, focusing on proposing an equation for the pre-design of beams through optimization and the use of linear regression. The research aims to improve efficiency in the design of beams, considering various parameters. To this end, the entire process for the design of rectangular sections with single and double reinforcement was initially studied, followed by the conditions for checking excessive deformation in beams. An electronic spreadsheet was used to implement the optimization, and linear regression was carried out using a database created with the optimization results. The proposed equations offer a practical tool for design engineers, allowing them to estimate the ideal height of beams in an optimized way, saving time and resources during the design phase. In addition, the importance of validating the solutions obtained using this equation is emphasized, guaranteeing safety and structural adequacy. This study contributes to the advancement of structural design practice, promoting efficiency in the design of reinforced concrete beams.

**Keywords:** Reinforced concrete, Optimization, Linear regression, Single reinforcement, Double reinforcement.

### 1. Introdução

Segundo Cardoso (2016, p. 10),

A escolha do arranjo estrutural de uma edificação é estabelecida de acordo com a sua forma, objetivando atender a estética, a funcionalidade, além de prover segurança, economia e durabilidade”. Ainda segundo a autora, o dimensionamento de vigas considera seu vão efetivo, suas vinculações, sua geometria, a classe de agressividade ambiental e as ações aplicadas (e. g., peso próprio, carga acidental etc.).

Como aponta Melo (2013) ao se iniciar um projeto estrutural apresentando um projeto arquitetônico, é impossível utilizar uma única equação para dimensionar uma estrutura, já que levando em consideração que cada peça terá variação devido a solicitação e restrição aos esforços, a sua geometria, a escolha dos apoios. Utilizando a teoria do cálculo estrutural com casos aplicados na prática foram geradas fórmulas simplificadas para o desenvolvimento do trabalho, no qual posteriormente busca validar o pré-dimensionamento teórico com valores reais para o estudo de caso e comparar os resultados. Com a comparação dos resultados pode-se observar que seguindo as normas, as fórmulas apresentadas no pré-dimensionamento precisaram ser ajustadas e comparadas à estrutura existente, assim podendo melhorar as fórmulas presentes no cálculo estrutural, assim facilitando o entendimento para iniciantes na área.

Santos (2019), fez um estudo sobre pré-dimensionamento da seção transversal de vigas de concreto armado, onde elaborou um projeto arquitetônico de um edifício residencial com um pavimento, através do software Revit, com uma área de 100 m<sup>2</sup>. Para o dimensionamento e verificação das vigas foi utilizado o software de projeto estrutural em concreto armado TQS. Foram analisadas as vigas que fazem o contorno da estrutura, trabalhando em conjunto com os demais elementos estruturais, formando-se um pórtico espacial. Lançando esse pórtico espacial no software e definindo-se os critérios de cálculo a serem utilizados nos pré-dimensionamentos, usando larguras das vigas fixadas em 15 cm, variou-se apenas a altura e o vão das mesmas. Os vãos foram de 5 m, 4 m, 3 m, e 2m (vãos livres). As cargas dispostas nas vigas foram resultantes de uma alvenaria de tijolo vazado de 50 cm de altura e uma parcela do carregamento oriundo de uma laje maciça de 10 cm de altura, ambas distribuídas uniformemente nas vigas analisadas e as alturas foram variando no percentual de 10%, 9%, 8% e 7% do vão efetivo. Quanto aos resultados, houve uma discrepância evidente de um dimensionamento de 10% para 7% do vão da viga para sua altura, que foram os valores oscilantes apresentados no estudo em questão. Isso mostra que o profissional deve ter sempre a destreza de analisar racionalmente as armaduras geradas para uma melhor concepção estrutural, pois não é coerente apenas aceitar o resultado emitido pelo software.

Pereira (2015), apresentou uma análise da eficiência do pré-dimensionamento de vigas. Para o pré-dimensionamento foi sugerido alguns métodos para estudo: Lança, Giongo, NBR 6118/80 e NBR 6118/80 MODIFICADO. São métodos baseados em algumas premissas fundamentais, como a consideração da carga permanente e da carga acidental, a definição de uma altura útil da viga e a determinação de um momento fletor de cálculo. A partir dessas premissas, são obtidas estimativas para a largura e a altura da viga, que são verificadas posteriormente com os critérios de segurança e eficiência da estrutura. Como resultados todos apresentaram uma margem de erro, mas o método Giongo é o que obteve melhor aproximação na avaliação. Em vigas interiores de vão único, o método é muito preciso com um erro médio de apenas 9%. Para vigas de dois e três vãos, a convergência é maior para as vigas externas, apresentando um erro de 18% a 23%.

A otimização se destaca na matemática como um campo de estudo de problemas, geralmente práticos, que visam minimizar ou maximizar uma função por meio de definições de variáveis e restrições associadas. A construção de modelos, permite a identificação numérica de melhores índices de desempenho, que possam auxiliar na tomada de decisões, por meio da definição de uma solução ótima, atendendo suas restrições (Spazzapan, 2018).

Maia (2009) comenta como é difícil chegar de maneira correta a um dimensionamento estrutural, pois ele depende de várias situações a serem analisadas que somadas fazem

parte do sistema estrutural, com isso os esforços buscam condições a serem satisfeitas. Os parâmetros de cálculo a serem estimados são através de aproximação ou experiências. Dificultando a ter uma análise sobre otimização na prática. O autor utiliza os conceitos do Método do Gradiente Reduzido Generalizado com o intuito de definir as variáveis reduzidas e com igualdade de restrição para chegar em um resultado independente. Em seu estudo a situação problema para ser utilizado são duas vigas retangulares biapoiadas e em balanço com flexão simples considerando a teoria clássica das vigas e a função solver do Excel operando pelo método simplex gradiente reduzido generalizado. Os resultados mostram a aplicabilidade da otimização encontrando uma solução de minimização volumétrica da viga conseguindo assim atender as necessidades do problema.

Correia (2016) analisou o estudo de uma viga retangular biapoiada em pilares com carregamento distribuído vertical sujeito a flexão simples e de cisalhamento. Utilizou a ferramenta solver do Excel, encontrando a altura e a base da viga. Os resultados apontaram que a altura do pré-dimensionamento se aproxima da altura otimizada.

Correia et al. (2017), apresentaram um estudo sobre a otimização de vigas com seção transversal T de concreto armado, utilizando algoritmos evolucionários. O problema de otimização foi formulado em uma planilha do Microsoft Excel e solucionado através da ferramenta de otimização Analytic Solver Platform, utilizando os métodos Algoritmos Genéticos e a Scatter Search (Busca Dispersa). Como o objetivo era encontrar uma solução que minimize o custo da viga, sem comprometer a sua segurança e resistência estrutural, foram consideradas variáveis como altura e largura da seção transversal da viga, quantidade e diâmetro da armadura, carga máxima suportada pela viga e fatores de segurança. Com os resultados obtidos, a Busca Dispersa apresentou melhor desempenho que os Algoritmos Genéticos, por resultar em menores valores de custo.

Nina (2006) desenvolveu um estudo sobre otimização de várias partes da estrutura como pilares pórticos e neste caso a ser analisado viga de concreto armado aplicando o método matemático de programação quadrática variáveis a serem definidas foi a largura predeterminada devido a espessura da parede é utilizada como dado de entrada com o intuito de buscar valores para uma altura ótima da viga. Como função objetivo de encontrar o menor custo pelo vão da viga durante todo o processo de execução. Suas restrições a ser submetida a uma flexão simples com o equilíbrio na seção transversal da viga. Com isso tem-se que a linha neutra é uma consideração importante para o estudo já que através dela define a altura da seção. Contudo as considerações finais mostram que quando a flexão é a restrição do problema tem-se que aumentar a altura viga enquanto o aço nessa situação é mais exigido o de tração ao de compressão tendo uma viga simples armada.

Rodrigues (2018) propôs um programa computacional para análise de problemas de otimização não linear com restrições. Foram realizadas análises numéricas e experimentais em diferentes seções compostas de vigas mistas de aço e concreto para determinar as condições de carregamento que levam à falha. O algoritmo implementado utiliza o método de programação linear sequencial em conjunto com o método Simplex para o dimensionamento otimizado de vigas mistas aço-concreto considerando os estados limites últimos de flexão e estado limite de serviço de deformação excessiva. Os exemplos analisados mostram que o objetivo do trabalho foi alcançado, pois atendeu às condições do projeto especificadas em normas técnicas, minimizando assim uma função objetivo custo definida a partir da quantidade de material e do custo desses.

Júnior (2017), apresenta uma pesquisa sobre a importância da não linearidade

geométrica na análise de vigas mistas de aço e concreto. Vigas mistas de aço e concreto são frequentemente usadas em estruturas de edifícios, pontes e outras obras de engenharia civil, devido à sua alta resistência, durabilidade e eficiência. No entanto, essas vigas podem apresentar comportamentos não lineares sob grandes deslocamentos e deformações, o que pode afetar significativamente a sua capacidade de carga. O estudo analisou a influência da não linearidade geométrica no comportamento de vigas mistas de aço e concreto. Foram realizadas análises numéricas e experimentais em diferentes configurações de vigas mistas para avaliar a importância da não linearidade geométrica na resposta estrutural desses elementos. O trabalho foi desenvolvido usando o código computacional CEMACOM e o software ANSYS customizado. No geral, o modelo numérico fornece resultados próximos aos resultados experimentais. No entanto, os resultados de deslizamento (deslocamento relativo) entre a laje de concreto e os perfis de aço não são ideais em comparação com os resultados experimentais.

Considerando-se o contexto da literatura apresentada, o objetivo desta pesquisa foi desenvolver uma equação simplificada voltada ao pré-dimensionamento de vigas em concreto armado, considerando-se o dimensionamento em armaduras simples e dupla (Estado Limite Último - ELU), assim como a verificação de deformação excessiva (Estado Limite de Serviço - ELS).

Com isso, pode-se contribuir com a prática da concepção de projetos estruturais ao oferecer um meio para o pré-dimensionamento incorporando-se critérios de segurança, desempenho e economia.

## 2. Metodologia

Esta pesquisa tem uma abordagem quantitativa, onde utiliza-se de procedimentos estatísticos para a produção de dados primários através da otimização e o uso da regressão para proposição da equação para pré-dimensionamento.

De acordo com Araújo (2014a, p.131-140), e conforme a Figura 1, a armadura simples e a armadura dupla são técnicas de reforço utilizadas em elementos estruturais de concreto armado, como vigas e lajes, para aumentar sua capacidade de suporte de cargas e melhorar sua resistência à deformação.

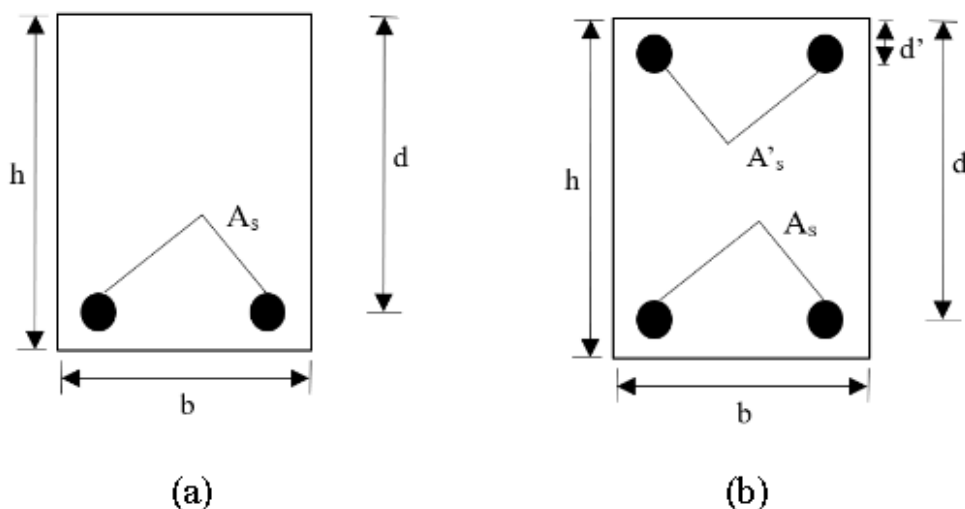


Figura 1 – Seção retangular com armadura simples e dupla

Fonte: Elaborada pelos autores

Onde:

- b: largura da seção.
- h: altura da seção.
- d: altura útil (é a distância do centróide da armadura tracionada até a borda comprimida).
- $A_s$ : área da seção da armadura tracionada.
- $A_s'$ : área da seção da armadura comprimida.

### 2.1. Dimensionamento de seções retangulares com armadura simples

Conforme Araújo (2014a, p. 141-143), para uma viga biapoiada com carregamento distribuído uniforme, o momento fletor máximo de serviço é dado pela Equação 1.1 e o momento fletor reduzido pela Equação 1.2.

$$M = \frac{p \cdot l^2}{8} \quad (1.1)$$

$$\mu = \frac{M d}{b \cdot d^2 \cdot \sigma_{cd}} \quad (1.2)$$

Onde,  $M_d$  é o momento fletor máximo de cálculo (momento fletor de serviço majorado por 1,4),  $p$  é o carregamento distribuído,  $l$  é o vão teórico da viga e a tensão de compressão de cálculo do concreto é  $\sigma_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd}$ . Se o valor do momento reduzido for menor ou igual a 0,2952 (ARAÚJO, 2014a, p. 129), tem-se armadura simples; caso contrário, tem-se armadura dupla.

Para resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ) de até 50 MPa (item 4.6.4.3 da ABNT NBR 6118:2023), prossegue-se com o dimensionamento da armadura tracionada ( $A_s$ ) e com a definição da armadura construtiva ( $A_s'$ ), conforme as Equações 1.3, 1.4, 1.5 e 1.6.

$$\xi = x/d \text{ em que } x/d \leq 0,45 \quad (1.3)$$

$$\xi = 1 - \frac{\sqrt{1-2\mu}}{0,8} \quad (1.4)$$

$$A_s = 0,8 \cdot \xi \cdot b \cdot d \cdot \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}} \quad (1.5)$$

$$A_s' = 2 \cdot \left( \frac{\pi \cdot (0,63)^2}{4} \right) \quad (1.6)$$

A armadura tracionada deverá ser maior ou igual a armadura mínima (item 17.3.5.2.1 da ABNT NBR 6118:2023), conforme a Equação 1.7.

$$A_{s,min} = \frac{0,15}{100} \cdot b \cdot h \quad (1.7)$$

### 2.2. Dimensionamento de seções retangulares com armadura dupla

Conforme Araújo (2014a, p. 141-143), para viga dimensionadas como armadura dupla, prossegue-se com o dimensionamento das armaduras tracionadas ( $A_s$ ) e comprimidas ( $A_s'$ ), conforme as Equações 1.8, 1.9, 2.0 e 2.1.

$$\varepsilon'_s = 3,5\% \cdot \left( \frac{0,45 - \left(\frac{d}{a}\right)}{0,45} \right) \quad (1.8)$$

$$\sigma'_{sd} = E_s \cdot \varepsilon'_s \leq f_{yd}, \text{ onde } E_s = 210 \text{ GPa} \quad (1.9)$$

$$A'_s = \frac{(\mu - 0,2952) \cdot b \cdot d \cdot \sigma_{cd}}{\left(1 - \left(\frac{d}{a}\right)\right) \cdot \sigma'_{sd}} \quad (2.0)$$

$$A_s = \left[ 0,8 \cdot 0,45 + \frac{(\mu - 0,2952)}{\left(1 - \left(\frac{d}{a}\right)\right)} \right] \cdot \frac{(b \cdot d \cdot \sigma_{cd})}{f_{yd}} \quad (2.1)$$

### 2.3. Verificação da deformação excessiva em viga

De acordo com o item 17.3.2.1.1 da ABNT NBR 6118:2023, a flecha em vigas pode ser avaliada por meio da rigidez equivalente, conforme a Equação 2.2.

$$EI_{eq} = E_{cs} \cdot \left\{ \left( \frac{M_r}{M} \right)^3 * I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M} \right)^3 \right] * I_2 \right\} \leq E_{cs} \cdot I_c \quad (2.2)$$

Onde,

- $I_c$  = momento de inércia da seção de concreto =  $\frac{b \cdot h^3}{12}$ .
- $I_2$  = momento de inércia da seção de concreto no estágio II, conforme Araújo (2014b, p. 275 e 306).
- $M$  = momento solicitante na seção crítica.
- $M_r$  = momento de fissuração (item 17.3.1 da ABNT NBR 6118:2023).
- $E_{cs}$  = módulo de elasticidade secante do concreto (item 8.2.8 da ABNT NBR 6118:2023).

O momento de fissuração para seções retangulares é calculado conforme a Equação 2.3.

$$M_r = \frac{1,5 * I_c * f_{ct}}{y_t} \quad (2.3)$$

Onde,

- $f_{ct}$  = resistência à tração direta do concreto =  $0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}}$  (item 8.2.5 da ABNT NBR 6118:2023).
- $y_t$  = distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada.

A flecha imediata na viga é calculada a partir da Equação 2.4 e a flecha máxima – devido ao acréscimo de flecha devido à fluência (item 17.3.2.1.2 da ABNT NBR 6118:2023) – é dada pela Equação 2.5, onde a data de aplicação da carga é de 28 dias e o tempo para formação da flecha diferida é acima de 70 meses.

$$W_{t0} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot EI_{eq}} \quad (2.4)$$

$$W_t = W_{t0} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{2-0,68}{1+50 \cdot \left( \frac{A_s}{b \cdot d} \right)} \right) \right] \quad (2.5)$$

## 2.4. Otimização não linear

Para Chapra (2011, p. 386), a otimização pode ser considerada como um problema de determinação de raízes, na qual busca encontrar os zeros em uma função. No entanto tem-se como resultado da otimização dos pontos máximos e mínimos encontrados no intervalo das raízes realizadas através de estudos matemáticos. As técnicas podem ser divididas entre unidimensional sem restrição, multidimensional sem restrições limitando a problemas bidimensionais pode ser categorizada pelo método direto ou dos gradientes definido com a utilização da derivada. Já a otimização com restrições, qual será utilizada nesta pesquisa, tendo em vista que será aplicado restrições, para encontrar a altura ótima da viga dada a característica dela.

Ainda segundo Chapra (2011, p. 332), o método de otimização não linear é uma abordagem para encontrar os valores ótimos de um problema de otimização que envolve uma função objetivo não linear e restrições não lineares. O objetivo da otimização não linear é encontrar o ponto onde a função objetivo atinge seu valor mínimo ou máximo, considerando as restrições impostas. Existem várias técnicas de otimização não linear disponíveis, e a escolha do método depende das características do problema em questão, como a natureza das funções, o número de variáveis, a presença de restrições e a disponibilidade de informações sobre a função objetivo e as restrições.

## 2.5. Regressão linear

De acordo com Chapra (2011, p.396), a regressão linear múltipla é uma técnica estatística usada para modelar a relação entre uma variável dependente e duas ou mais variáveis independentes. A regressão linear múltipla permite quantificar como as variáveis independentes influenciam a variável dependente e como elas interagem entre si.

O objetivo da regressão linear múltipla é encontrar uma equação que represente a relação linear entre as variáveis (conforme Equação 2.6). Essa equação é expressa na forma de uma função linear, onde a variável dependente é estimada como uma combinação linear ponderada das variáveis independentes, adicionada a um termo de erro.

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + e \quad (2.6)$$

## 3. Resultados e Discussões

### 3.1. Amostra selecionada

Foi construído um conjunto de dados a partir da definição de 3 situações típicas de carregamentos distribuídos aplicado em uma viga em concreto armado considerando-se edificações usuais.

O limite inferior de carregamento é equivalente a uma situação onde a viga está submetida apenas ao seu próprio peso. O limite intermediário de carregamento consiste

no limite inferior adicionando a carga parcial de uma laje em concreto armado apoiada sobre a viga. O limite superior de carregamento consiste no limite intermediário adicionando-se a carga de uma parede de tijolos cerâmicos sobre a viga.

Além disso, também foram adotados 3 valores para a resistência característica do concreto, assim como 7 valores distintos de vão teórico para a viga. Na Tabela 1 apresenta-se um resumo das características da amostra construída.

Tabela 1 – Características da amostra de vigas selecionada para otimização e regressão

Limite inferior de carregamento	$= \frac{(\rho_{CA} \cdot b_{viga} \cdot h_{viga})}{100}$ $= \frac{(25 \frac{kN}{m^3} \cdot 0,12 m \cdot 0,6 m)}{100}$ $= 0,018 \frac{kN}{cm}$
Limite intermediário de carregamento	$= \frac{(\rho_{CA} \cdot b_{viga} \cdot h_{viga})}{100} + \frac{(\frac{\rho_{CA} \cdot h_{laje} \cdot l_{laje}}{4})}{100}$ $= \frac{(25 \frac{kN}{m^3} \cdot 0,12 m \cdot 0,6 m)}{100} + \frac{(\frac{(25 \frac{kN}{m^3} \cdot 0,1 m \cdot 8 m)}{4})}{100} = 0,068 \frac{kN}{cm}$
Limite superior de carregamento	$= \frac{(\rho_{CA} \cdot b_{viga} \cdot h_{viga})}{100} + \frac{(\frac{\rho_{CA} \cdot h_{laje} \cdot l_{laje}}{4})}{100} + \frac{(\rho_{ALV-6 furos} \cdot b_{ALV} \cdot h_{ALV})}{100}$ $= \frac{(25 \frac{kN}{m^3} \cdot 0,12 m \cdot 0,6 m)}{100} + \frac{(\frac{(25 \frac{kN}{m^3} \cdot 0,1 m \cdot 8 m)}{4})}{100} + \frac{(13 \frac{kN}{m^3} \cdot 0,12 m \cdot 2,6 m)}{100} = 0,109 \frac{kN}{cm}$
Resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ )	2; 3,5; 5 (kN/cm <sup>2</sup> )
Vão teórico da viga (l)	200; 300; 400; 500; 600; 700; 800 (cm)
Total de combinações	63 vigas

$\rho_{CA}$ : peso específico do concreto armado.

$\rho_{ALV-6 furos}$ : peso específico da alvenaria de tijolo cerâmico de 6 furos.

$b_{viga}$ : largura da viga hipotética.

$h_{viga}$ : altura da viga hipotética.

$h_{laje}$ : altura da laje hipotética.

$l_{laje}$ : comprimento da laje hipotética (quadrada).

$b_{ALV}$ : largura da alvenaria hipotética.

$h_{ALV}$ : altura da alvenaria hipotética.

Fonte: Elaborado pelo autores

### 3.2. Otimização

O processo de otimização ocorreu com o auxílio de uma planilha eletrônica, onde a mesma foi dividida em 3 partes: (i) inserir dados, (ii) dimensionamento das áreas de aço e (iii) verificação da deformação excessiva. Na Figura 2 apresenta-se o layout elaborado.



INSERIR DADOS		DIMENSIONAMENTO		DEFORMAÇÃO EXCESSIVA	
fck =	5 kN/cm <sup>2</sup>	m =	0,09209686118	I =	272380,3513 cm <sup>4</sup>
fyk =	50 kN/cm <sup>2</sup>	armadura simples		Mr =	5132,626904 kN.cm
pk =	0,109 kN/cm				
Mk =	8720 kN.cm	As_inf =	4,891415949 cm <sup>2</sup>	a1 =	6
h =	64,82242271 cm	As_sup =	0,6234490621 cm <sup>2</sup>	a2 =	30,99491672
b =	12 cm	Ast =	5,514865011 cm <sup>2</sup>	a3 =	-1704,958155
l =	800 cm	Asmin =	1,617967671 cm <sup>2</sup>	x2 =	14,47086156 cm
Eci =	3959,797975 kN/cm <sup>2</sup>	Asmax =	31,1147629 cm <sup>2</sup>	I2 =	71373,141 cm <sup>4</sup>
Ecs =	3662,813127 kN/cm <sup>2</sup>				
alpha =	5,733298226			Eieq =	411566346,4 kN.cm <sup>2</sup>
				Wi =	1,412489963 cm
				Wt =	3,199999985 cm
				Wlim =	3,2 cm

Figura 2 – Layout da otimização

Fonte: Elaborada pelos autores

Após inserir os dados de cada combinação de viga (i. e., resistência característica do concreto, carregamento distribuído e vão teórico da viga), acionou-se o solver da planilha eletrônica. Neste, foi selecionado o método de solução Evolutionary (Xie; Steven, 1993) e definidas as seguintes condições de contorno que satisfazem os limites normativos e os Estados Limites Último e de Serviço:

- Altura da viga ( $h$ )  $\geq 20$  cm (arbitrário);
- Área de aço total na seção transversal da viga ( $A_{st}$ )  $\leq$  Área de aço máxima ( $A_{smax}$ , item 17.3.5.2.4 da NBR 6118:2023);
- Área de aço total na seção transversal da viga ( $A_{st}$ )  $\geq$  Área de aço mínima ( $A_{smin}$ , item 17.3.5.2.1 da NBR 6118:2023);
- Deformação máxima na viga ( $W_t$ )  $\leq$  Deformação limite ( $W_{lim}$ , aceitabilidade sensorial, tabela 13.3 da NBR 6118:2023).

Após rodar a otimização (i. e., encontrar valor mínimo para altura da viga da amostra), confere-se se as condições de contorno foram atendidas e anota-se o valor estimado. Após executar esse procedimento para cada uma das 63 vigas que compõem a amostra, construiu-se um banco de dados formado por uma matriz de 4 colunas (i. e., resistência característica do concreto, carregamento distribuído, vão teórico da viga e altura estimada) e 63 linhas (i. e., valores para cada coluna referentes às 63 combinações de viga).

### 3.3. Regressão

A partir do banco de dados elaborado, foram realizadas duas regressões: (i) linear múltipla, considerando-se a altura estimada como variável dependente e as demais como variáveis independentes; e (ii) linear simples, considerando-se a altura estimada como variável dependente e apenas o vão teórico da viga como variável independente.

Na Tabela 2 apresentam-se os resultados da regressão linear múltipla.

Tabela 2 – Resumo da regressão linear múltipla

R <sup>2</sup> ajustado da regressão	0,86			
Erro padrão da regressão	6,03			
	Coefficiente s	Erro padrão	Teste t	Valor p
Intersecção	-1,03	3,27	-0,32	0,75
Resistência característica do concreto	-2,33	0,62	-3,75	0,000403*
Carregamento distribuído	229,14	20,53	11,16	3,56e-16*
Vão teórico da viga	0,061	0,0038	16,05	3,41e-23*
<i>p &lt; 0,05 = estatisticamente significativo*</i>				

Fonte: Elaborado pelo autores

De acordo com os resultados obtidos pelo modelo elaborado, o mesmo explica 86% da variação dos dados e todas as variáveis independentes mostraram estatisticamente significativas. Assim, o modelo pode ser utilizado como uma equação para o pré-dimensionamento de vigas em concreto armado, conforme a Equação 2.7.

$$h = -1,03 - 2,33 \cdot f_{ck} + 229,14 \cdot q_k + 0,061 \cdot l_0 \quad (2.7)$$

Onde,

- $h$ : altura da viga (em cm).
- $f_{ck}$ : resistência característica do concreto (em kN/cm<sup>2</sup>).
- $q_k$ : carregamento distribuído aplicado sobre a viga (em kN/cm).
- $l_0$ : vão teórico da viga (em cm).

Na Tabela 3 apresentam-se os resultados da regressão linear simples.

Tabela 3 – Resumo da regressão linear simples

R <sup>2</sup> ajustado da regressão	0,56			
Erro padrão da regressão	10,86			
	Coefficiente s	Erro padrão	Teste t	Valor p
Intersecção	5,68	3,69	1,54	0,13
Vão teórico da viga	0,061	0,0068	8,92	1,19e-12*
<i>p &lt; 0,05 = estatisticamente significativo*</i>				

Fonte: Elaborado pelo autores

De acordo com os resultados obtidos pelo modelo elaborado, o mesmo explica 56% da variação dos dados (menor confiabilidade do que o modelo anterior) e a variável independente mostrou-se estatisticamente significativa. Assim, o modelo também pode ser utilizado como uma equação para o pré-dimensionamento de vigas em concreto armado, conforme a Equação 2.8.

$$h = 5,68 + 0,061 \cdot l_0 \quad (2.8)$$

Dada a simplicidade do segundo modelo, optou-se por compará-lo com outras duas opções existentes na literatura com o intuito de validá-lo como opção para o pré-dimensionamento de vigas em concreto armado (vide Apêndice). Na tabela 4 apresentam-se os valores otimizados para a altura das 63 combinações de vigas do banco de dados e os valores estimados por equações simplificadas. Utilizou-se o desvio padrão das diferenças entre valores observados e otimizados (i. e., resíduos) como indicador de confiabilidade.

Tabela 4 – Comparação entre modelos para pré-dimensionamento de vigas biapoiadas em concreto armado

	$h = 5,68 + 0,061 \cdot l_0$	$h = \frac{l_0}{13,2}$	$h = \frac{l_0}{12}$	$h = \frac{l_0}{11}$	$h = \frac{l_0}{10}$
Desvio padrão dos resíduos	10,78	11,18	11,68	12,35	13,34

Fonte: Elaborado pelo autores

Como o modelo elaborado nesta pesquisa apresentou o menor valor de desvio-padrão dos resíduos, pode-se inferir que este possui a maior confiabilidade para a estimativa da altura de vigas em concreto armado a partir do vão teórico das mesmas.

### 3. Considerações finais

Ao longo deste artigo, buscou-se apresentar a literatura existente envolvendo otimização de vigas em concreto armado, assim como as propostas existentes para o pré-dimensionamento de vigas. Observou-se que existia uma lacuna na literatura sobre incorporar ao processo de otimização tanto o dimensionamento no ELU das vigas para armadura dupla quanto a verificação no ELS para deformação excessiva.

Com isso, construiu-se um modelo de otimização que gerou 63 vigas com características distintas e alturas otimizadas. Estes resultados serviram como banco de dados para a elaboração de dois modelos de regressão (linear e múltipla) que culminaram em duas equações para o pré-dimensionamento de vigas em concreto armado (Equações 1 e 2). A segunda equação, que contém apenas uma variável independente (vão teórico da viga) apresentou resultados de maior confiabilidade quando comparados às equações de pré-dimensionamento utilizadas usualmente na prática de projetos estruturais.

Portanto, esta pesquisa contribui para o campo da engenharia de estruturas quanto a sua dimensão prática e será útil para projetistas de estruturas que lidam com a tomada de decisão quanto ao pré-dimensionamento de vigas em concreto armado.

Como temas para trabalhos futuros, sugere-se a inclusão da verificação do ELS para abertura de fissuras no modelo de otimização.

**Referências**

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.** *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento.* Rio de Janeiro, 2023.
- ARAÚJO, J. M.** *Curso de concreto armado.* Editora Dunas, v. 1, 2014.
- ARAÚJO, J. M.** *Curso de concreto armado.* Editora Dunas, v. 2, 2014.
- CARDOSO, J. R.** *Pré-dimensionamento da seção transversal de vigas de transição para edificações em concreto armado.* 2016. Trabalho de Conclusão Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Curso de Engenharia Civil, Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2016.
- CHAPRA, S. C.** *Métodos numéricos para engenharia.* 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.
- CORREIA, R. S.** *Otimização de vigas de concreto armado, utilizando a ferramenta solver.* 2016. Trabalho de Conclusão Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2016.
- CORREIA, R. S.; BONO, G. F. F.; BONO, G.** *Otimização de vigas de concreto armado com seção T utilizando algoritmos evolucionários.* *Mecânica Computacional*, n. 29, 2017.
- MAIA, J. P. R.** *Otimização estrutural: estudo e aplicações em problemas clássicos vigas utilizando a ferramentas solver.* 2009. 83 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- MELO, P. R.** *Pré-dimensionamento de estruturas de madeira, de aço e de concreto para auxílio à concepção de projetos arquitetônicos.* 2013. 113 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2013.
- MITTELSTADT JÚNIOR, L.C.** *Estudo sobre a Aplicação da Não Linearidade Geométrica na Análise de Vigas Mistas de Aço e Concreto.* 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.
- NINA, T. C.** *Otimização de seções transversais de concreto armado: aplicação a pórticos planos.* 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- PEREIRA, R. R. B.** *Avaliação do pré-dimensionamento de peças estruturais de concreto armado: vigas, lajes e pilares.* 2015. Trabalho de Conclusão Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.
- RODRIGUES, T. A.** *Dimensionamento otimizado de vigas mistas aço-concreto.* 2018 Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto- Escola de Minas, Ouro Preto, 2018.
- SANTOS, I. F.** *Pré-dimensionamento da seção transversal de vigas de concreto armado.* 2019. Trabalho de Conclusão Curso (Graduação em Engenharia Civil) -Fundação Presidente Antônio Carlos, Faculdade Presidente Antônio Carlos de Teófilo Otoni, Teófilo Otoni, 2019.
- SPAZZAPAN, A. A.** *Otimização de vigas retangulares de concreto armado.* 2018. 84 f. Trabalho de Conclusão Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2018.
- XIE, M. Y, e STEVEN, G. P.** *A Simple evolutionary procedure for structural optimization.* *Computer & Structures*, v. 49, p. 885-896, 1993.