

ESTUDO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO DE UMA VIGA BIENGASTADA

Bruno Hoffmann (Pontifícia Universidade Católica de Goiás).

E-mail: b.hoffmann.oficial@gmail.com

André Luiz Cardoso da Silva (Pontifícia Universidade Católica de Goiás).

E-mail: andreluiz@pucgoias.edu.br

Clóves Gonçalves Rodrigues (Pontifícia Universidade Católica de Goiás).

E-mail: cloves@pucgoias.edu.br

Resumo: Neste artigo é apresentado um estudo sobre os modos de vibrações de uma viga biengastada (barra fixada em dois extremos). As equações obtidas reduzem-se a uma equação diferencial parcial conhecida como equação de Euler-Bernoulli que apresenta uma descrição razoavelmente boa para os modos de vibração de vigas esbeltas, sem cisalhamento, se comparados com dados empíricos. O estudo desta dinâmica foi realizado de forma analítica e por simulação. Dessa forma, as frequências de vibração foram obtidas a partir das raízes de equações transcendentais usando o software GEOGEBRA e pelo método dos elementos finitos.

Palavras-chave: Viga biengastada, equação de Euler-Bernoulli, simulação computacional, elementos finitos.

STUDY OF VIBRATION MODES OF A BIENGAGED BEAM

Abstract: *This paper presents a study on the vibration modes of a split beam (bar fixed at two ends). The equations obtained are reduced to a partial differential equation known as the Euler-Bernoulli equation, which presents a reasonably good description for the vibration modes of slender beams, without shear, when compared with empirical data. The study of this dynamics was carried out analytically and through simulation. In this way, the vibration frequencies were obtained from the roots of transcendental equations using the GEOGEBRA software and the finite element method.*

Keywords: *Double-braced beam, Euler-Bernoulli equation, computer simulation, finite elements.*

1. Introdução

O estudo sobre vibrações é de fundamental importância, desde as vibrações do ar que provocam oscilações na membrana timpânica (BORGES, 2017), até as estruturas mecânicas da engenharia, tais como casas, prédios, pontes, motores, fuselagem e turbinas de aviões, etc. (SAVI, 2017).

Tradicionalmente, as estruturas são projetadas para resistir a cargas estáticas. Porém, elas podem estar sujeitas a eventos que geram cargas dinâmicas, como terremotos, ventos, ondas e tráfego de veículos. Este tipo de carga pode causar movimentos vibratórios que podem prejudicar a estrutura e trazer perigo para as pessoas que a utilizam. Em prédios altos, por exemplo, as vibrações induzidas por vento podem causar desconforto aos moradores (especialmente nos andares superiores) e até danos estruturais. Devido a isso, engenheiros, físicos e matemáticos estudam formas de desenvolver estruturas mais seguras. Construções que sofreram problemas com vibrações se tornam alvo de estudo e servem como fonte de conhecimento para evitar problemas similares no futuro. Da mesma maneira, construções de sucesso produzidas com tecnologia avançada de amortecimento de vibrações também são extensivamente estudadas (INMAN, 2007).

Uma linha de estudo de bastante interesse é a de vibrações transversais ou axiais de vigas submetidas a determinados vínculos. Esse elemento é um dos modelos fundamentais das estruturas elásticas, e é utilizada em uma variedade de aplicações como, por exemplo, em hélices de helicópteros, satélites flexíveis, asas de aviões, braços robóticos, trilhos de trem, construção civil, etc. (INMAN, 2007). O estudo das respostas elásticas e dinâmicas de componentes estruturais, sob várias condições de carga é muito útil para a modelagem e análise do comportamento de estruturas mais reais e complexas sujeitas a carregamentos similares (SAVI, 2017). Os modelos físico-matemáticos mais utilizados no estudo das deflexões ou vibrações transversais de vigas são: Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear (ou Vlasov) e Timoshenko (RAO, 2008). Esses modelos diferenciam-se pelos efeitos físicos considerados, via hipóteses simplificadoras, o que gera resultados com distintos níveis de precisão a depender da aplicação de interesse.

A teoria de Euler-Bernoulli, também conhecida por teoria clássica do estudo de vigas, é a mais comumente utilizada por ser simples e fornecer aproximações razoáveis para muitos problemas (HAN, 1999). Porém, esta teoria tende a ser superestimada para frequências naturais dos maiores modos de vibração. Além disso, as predições feitas para as frequências por essa teoria é melhor para vigas finas ou delgadas do que para vigas não delgadas. Já a teoria de Rayleigh apresenta um avanço em termos de modelagem em relação à teoria de Euler-Bernoulli por incluir o efeito da rotação da seção transversal (STRUTT, 2011). Como consequência, corrige parcialmente os efeitos da superestimação das frequências naturais do modelo de Euler-Bernoulli.

O modelo de *Shear* (ou Vlasov) adiciona distorção de cisalhamento ao modelo de Euler-Bernoulli e, dessa forma, a estimativa das frequências naturais melhora consideravelmente (VLASOV, 1961; CASTRO, 2016).

O modelo de Timoshenko (TIMOSHENKO, 1955) adiciona tanto o efeito de cisalhamento quanto o efeito de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli. O modelo de Timoshenko foi uma grande melhoria para aproximação da resposta de vigas não-delgadas e para altas frequências, onde os efeitos do cisalhamento e da rotação não podem ser desprezados (KAPUR, 1966). Seguindo Timoshenko, vários autores têm obtido as equações para frequência e modos para várias configurações de condições de contorno (CARRER, 2013).

Portanto, quando se estuda as vibrações de vigas, todas as abordagens apresentam suas vantagens e desvantagens (RAO, 2008). Neste sentido, utilizamos nesse trabalho a abordagem de Euler-Bernoulli pela sua simplicidade.

O artigo está assim estruturado. A Seção 2 apresenta um pequeno histórico sobre as vibrações mecânicas. A Seção 3 é dedicada à importância do estudo das vibrações, suas classificações, os procedimentos de análise, controle das vibrações, medições de vibrações e aplicações. Na Seção 4 é apresentado o modelo de viga “biengastada” construindo-se a dinâmica a partir do formalismo newtoniano para obter a equação de Euler-Bernoulli e os modos de vibração em determinadas condições iniciais e de contorno (ou vínculos). Na Seção 5 são apresentados os fundamentos básicos da simulação computacional pelo método dos elementos finitos (MEF) como uma forma numérica de se obter os modos de vibração com resultados em forma gráfica. A Seção 6 se reserva a comentários e conclusões finais.

2. Breve histórico sobre o estudo das vibrações mecânicas

As vibrações mecânicas são um objeto de estudo explorado por diversas áreas, principalmente pela engenharia em projetos de construções baseados nos fundamentos de mecânica.

Pode-se dizer que o interesse e estudo sobre as vibrações já existia em 4000 a.C., quando já se tinha um senso crítico sobre as vibrações em instrumentos musicais como os tambores. Essa observação partiu dos chineses, japoneses, hindus e egípcios (RONAN, 1985).

Em aproximadamente 3000 a.C. surgiram pelo mundo outros instrumentos musicais mais elaborados como harpas e instrumentos de corda. O filósofo e matemático Pitágoras de Samos (570-495 a.C.) (FERGUSON, 2008) estudou o comportamento das vibrações em um aparelho conhecido como monocórdio. O Monocórdio, Fig. 1, era uma tábua retangular possuindo três suportes de madeira, dois fixos e um móvel responsável por variar o comprimento da corda e controlar suas vibrações.

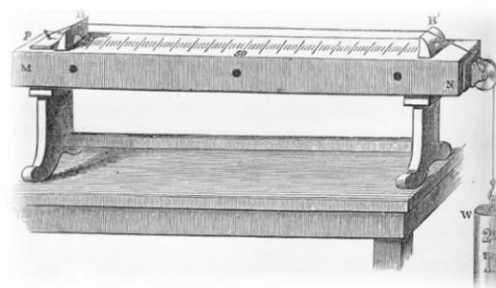


Figura 1 – Monocórdio. Fonte: Adaptado de (RODRIGUES, 2020).

Por volta de 350 a.C Aristóteles (384-322 a.C) iniciou estudos sobre as harmônicas e as diferenças nos sons produzidos por diferentes instrumentos (CHROUST, 2016). Mais tarde um de seus alunos, Aristóxeno de Tarento (360-300 a.C.) escreveu, por volta de 320 a.C., o livro *Elementos de Harmonia* (CRUZEIRO, 2021). Em seguida, Euclides de Alexandria (c. 300 a.C.) (MACARDLE, 2008) realizou um estudo sobre a teoria da música em *Introdução aos Harmônicos*, e aproximadamente em 20 a.C o arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio (século I a.C) fez estudos sobre as propriedades acústicas em teatros e de como o som se comportava em locais abertos e fechados (POLLIO, 2007).

Em 132 d.C. em uma região na China em que ocorriam muitos terremotos, o astrônomo, pintor e erudito da literatura chinesa Zhang Heng (78-139 d.C.) criou o que se conhece hoje como o primeiro sismógrafo do mundo, Fig. 2. Seu funcionamento se dava por meio de quatro tábuas formando uma cruz de noventa graus umas com as outras dentro de um vaso com água. No centro dessas tábuas havia uma bola de ferro que estava presa por uma pequena inclinação muito sutil, e ao fim de cada tábua no sentido para fora do centro havia uma saída para os vasos que eram a boca de quatro dragões e logo abaixo um sino para cada possível queda. Logo, quando ocorresse um terremoto provocaria uma inclinação fazendo com que a bola de ferro rolasse para fora do vaso e tocasse um dos sinos, fazendo então alguém tomar alguma atitude se prevenindo para o terremoto (RONAN, 1987).

Um dia Galileu Galilei (1564-1642) estava em uma igreja em Pisa e observou os movimentos periódicos que um lustre da igreja fazia (BRODRICK, 1965). Ele então contou o tempo que o lustre gastava para retornar ao mesmo lugar, e publicou em 1638

um artigo discutindo corpos vibratórios em *Discourses Concerning Two New Sciences*. No entanto, o primeiro estudo com as expressões matemáticas corretas só foi publicado mais tarde pelo matemático e teólogo francês Marin Mersenne (1588-1648) no seu livro de 1637 *Harmonie Universelle* (GROSSLIGHT, 2013).

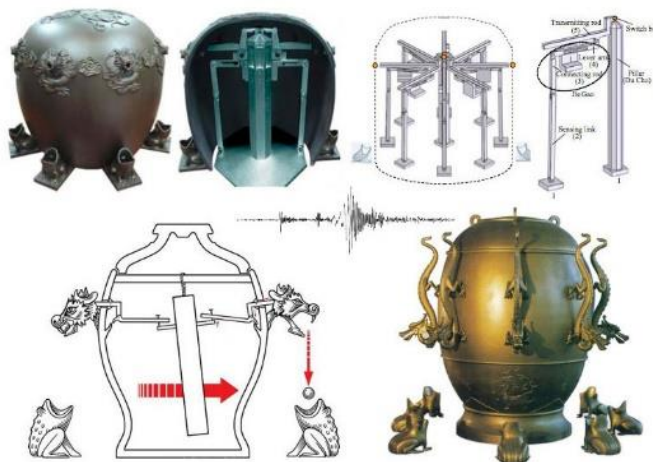


Figura 2 – Monocórdio. Fonte: (ARQUEOLOGIA, 2024).

O cientista inglês Robert Hooke (1635-1703) estudou as frequências emitidas por diferentes comprimentos de cordas, com dados experimentais sobre a relação entre a frequência e a tonalidade de uma oscilação (PURRINGTON, 2009).

Mais tarde, de forma independente, o cientista francês Joseph Sauveur (1653-1716) e o clérigo e matemático inglês John Wallis (1616-1703) constataram que existiam pontos de uma corda em vibração que tinham uma amplitude de vibração maior (ventres) e outros pontos que ficavam imóveis (nós) (FIX, 2015; SCRIBA, 1970). Com este estudo chegou-se à conclusão que esses nós tinham uma relação direta com múltiplos inteiros da frequência de vibração mais simples. Foi Sauveur quem formulou a palavra “acústica” para designar o estudo do som.

No ano de 1686, Isaac Newton (1643-1727) fez grande contribuição com o seu livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, onde sua segunda lei é usada para as derivações do movimento de vibração de uma corda (WESTFALL, 2007). Mas a sua dinâmica só foi solucionada mais tarde pelo matemático (e advogado) inglês Brook Taylor (1685-1731) (FEIGENBAUM, 1985), sendo um sucesso, visto que concordava com Galileu e Mersenne.

Posteriormente, a teoria sobre as vibrações foi melhorada por Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean D’Alembert (1717-1783) e Leonard Euler (1707-1783), onde a dinâmica pôde ser explicada com derivadas parciais das funções de onda com a distribuição de um comprimento equivalente à soma de infinitos pontos consecutivos sobrepondo as posições das funções das vibrações (BALL, 2003; BERNARD, 1980; CALINGER, 1996). A solução analítica do movimento da corda vibratória foi resolvida por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), que foi publicada em sua memória pela Academia de Turim em 1759 (BALTUS, 1994). Em 1822 Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) comprovou a veracidade das equações obtidas por expansões em série em seu livro *Teoria Analítica do Calor* (FOURIER, 1822).

O físico e músico alemão Ernst Florens Friedrich Chladni (1756-1827) fez importantes estudos sobre as vibrações em placas bidimensionais, sendo convidado pela Academia Francesa para dar uma palestra sobre suas descobertas de desenhos complexos que

apareciam sobre uma placa quando se jogava areia em cima enquanto a mesma vibrava (ROSSING, 1982). Ato visto por Napoleão Bonaparte (1769-1821) que ficou encantado com todas aquelas figuras complexas formadas pela vibração da placa, tendo doado uma quantia de três mil francos à Academia a ser dado como prêmio para a primeira pessoa que formulasse uma teoria analítica que explicasse o fenômeno.



Figura 3 – Placas de Chladni. Fonte: (CHLADNI, 2024).

Em 1811, a física, matemática e filósofa francesa Marie-Sophie Germain (1776-1831) apresentou uma explicação analítica para o problema (BUCCIARELLI, 1980). Lagrange era um dos juízes e não lhe concedeu o prêmio por haver um erro em sua dedução. Em 1815 após ter corrigido o erro ela recebeu o prêmio pela explicação, mesmo que os juízes não estivessem completamente satisfeitos (CENTINA, 2005). Em 1850, o físico e matemático alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) (EVEREST, 1969) corrigiu um erro sobre as condições de contorno tomadas Sophie. Outros dois interessantes problemas solucionados foram sobre o som emitido por um tambor, pelo francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), e o problema da membrana circular pelo alemão Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833-1872) (WILKINS, 2024; CLEBSCH, 2002).

Após vários estudos sobre sistemas mecânicos e estruturais usuais, John William Strutt (1842-1919), mais conhecido como 3º Barão de Rayleigh (HUMPHREY, 1992) publicou em 1877 seu livro sobre a teoria do som (STRUTT, 2011), o qual ainda é uma referência nesse assunto. Um feito notável de Rayleigh foi seu estudo sobre como determinar a frequência natural de uma onda usando a conservação de energia, agora conhecido como método de Rayleigh.

Contribuições mais recentes ao estudo das vibrações em estruturas podem ser dadas a: Hermann Frahm, Aurel Stodola, de Laval, Timoshenko e David Mindlin.

O engenheiro naval alemão Hermann Frahm (1867-1939) notou a importância de se obter conhecimento sobre torções de uma viga sobre seu eixo para tratar sobre as vibrações das pás em hélices de navios a vapor (SCHNADEL, 1961). Dedicado a criar um sistema de amortecedores de vibrações, Frahm observou, em 1909, a importância da adição de um sistema massa-mola no formalismo dinâmico já estudado.

Aurel Boreslav Stodola (1859-1942) contribuiu com estudos sobre vibrações em pás de turbinas de navios (STODOLA, 1945), seguido pelo engenheiro mecânico sueco Karl Gustaf Patrik de Laval (1845-1913) que apresentou uma solução para o problema de um disco rotativo desbalanceado, após notar falhas em eixos de aço em turbinas de alta velocidade (ANDERSON, 2004).

Stephen Prokofievich Timoshenko (1878-1972) modernizou uma teoria sobre vibrações em vigas que ficou muito conhecida como teoria da viga grossa, que considerava os

efeitos da inércia da rotação e da deformação por cisalhamento (TIMOSHENKO, 1983). Uma explicação similar foi dada por Raymond David Mindlin (1906-1987) para uma análise de vibração em placas grossas, que também inclui os efeitos de inércia da rotação e da deformação por cisalhamento (DERESIEWICZ, 1989). Deve-se comentar que Mindlin participou de uma série de cursos de verão ministrados por nada menos que Stephen Timoshenko.

3. Vibração: conceitos básicos

Em geral a vibração consiste num sistema que converte energia potencial em energia cinética, e essas variações das trocas é chamada de oscilação. As soluções de sistemas vibrantes podem ter de um até infinitos graus de liberdade, desde um pêndulo simples a uma viga grossa vibrando em três dimensões.

Uma vibração pode ser considerada como “livre” ou “forçada” (SYMON, 1971). Uma vibração é livre quando o movimento inicial perpetua sem a interação de forças externas sobre o objeto, como um sistema massa mola fechado com as condições de atrito ideais (sem atrito). Já na vibração forçada existe uma força externa contínua que mantém as trocas de energia potencial e cinética como, por exemplo, em motores de veículos onde a força criada pelo motor do automóvel mantém o ciclo do virabrequim (peça responsável por transferir a energia dos pistões para a transmissão das rodas).

Uma vibração também pode ser “amortecida” ou “não amortecida” (SYMON, 1971). Na vibração amortecida o sistema irá dissipar a sua energia mecânica, perdendo sua amplitude de oscilação com o tempo. Um exemplo prático de amortecimento é o sistema de suspensão de um automóvel, responsável por dissipar a energia mecânica reduzindo os movimentos de oscilação para cima e para baixo. Uma oscilação não amortecida é idealizada, visto que, não existe um sistema que não tenha algum tipo de interação na forma de atrito.

As vibrações podem também ser classificadas como “lineares” e “não lineares” (BEER, 2015). Um sistema é considerado sob vibração linear quando todos os componentes do sistema se comportam de acordo com uma equação linear, ou seja, uma equação do tipo $y = \alpha x$. Por outro lado, tem-se um sistema sob vibração não-linear quando pelo menos um componente se comportar de forma não linear.

Existem ainda vibrações chamadas de “determinísticas” e “aleatórias” (THOMPSON, 1997). Nas determinísticas o movimento vibratório pode ser representado por uma equação, sendo então, possível determinar a magnitude das vibrações em qualquer tempo. Por outro lado, quando não é possível representar a vibração mecânica por uma equação, a vibração é considerada aleatória.

O principal procedimento na análise de uma vibração é estudar as trocas de energias do sistema, analisando a rigidez e a elasticidade para cada passo do sistema. Numa segunda etapa deve se isolar as massas para modelar o sistema usando os princípios da dinâmica, determinando as equações diferenciais ordinárias ou parciais que caracterizam o sistema. A terceira etapa consiste em utilizar métodos matemáticos para encontrar o conjunto de soluções para as equações diferenciais obtidas a partir do diagrama desse sistema. Por fim, a quarta e última etapa é a interpretação ou a comparação (se possível) dos resultados encontrados com valores obtidos experimentalmente.

Na abordagem dinâmica de vigas, as vibrações e deflexões são determinadas pela mecânica newtoniana ou por métodos variacionais usando a densidade lagrangeana, obtendo-se equações diferenciais parciais com enorme potencial de aplicabilidade, destacando-se entre elas a *equação de Euler-Bernoulli*. A teoria construída a partir

dessa equação é conhecida como *teoria clássica de vigas*, fornecendo resultados razoáveis para frequências de vigas que não incluem o cisalhamento longitudinal.

Na próxima seção é apresentado o modelo de viga *biengastada* e a partir da dinâmica newtoniana são obtidos os modos de vibração da viga a partir de Euler-Bernoulli.

4. Objeto de estudo: viga biengastada

4.1 Viga biengastada

Vigas não são apenas simples barras, mas elementos estruturais que suportam forças aplicadas em vários pontos ao longo de seu eixo e geralmente são prismáticas, retas e longas. Diversas estruturas complexas são compostas por vigas e projetadas para resistirem a cargas estáticas. Porém, elas podem estar sujeitas a eventos podem causar movimentos vibratórios.

Consideremos uma viga *biengastada de Euler-Bernoulli*, como ilustrado na Fig. 4. A viga está presa em *A* e *B* por vínculos que restringem os translacionais e rotacionais. Além disso, ela é prismática possuindo um comprimento *L*, largura *a* e altura *b*. A viga possui uma linha neutra (onde a tensão $\sigma_x = 0$), e o eixo *z* está posicionada em um plano que intercepta a viga em *h/2* e seu momento de inércia da seção em relação à linha neutra é $I = bh^3/12$ e seu coeficiente de Poisson ν é definido pela razão:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}, \quad (1)$$

onde ε_α são as deformações específicas (deformações por comprimento).

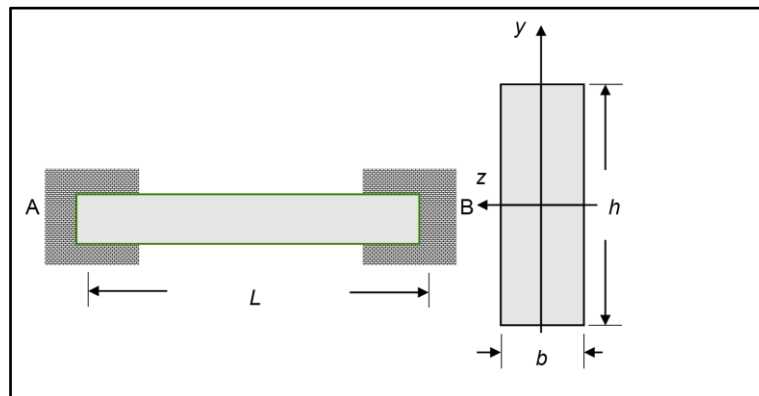


Figura 4 – Viga biengastada de vão *L*, largura *b* e altura *h*. Fonte: o autor.

A viga da Fig. 4, não deformada, pode ser considerada composta por infinitas fibras longitudinais. Quando a viga sofre flexão, as fibras próximas à superfície côncava contraem-se sob pressão de compressão e as fibras próximas à superfície convexa devem distender por tensão de tração. A superfície que separa a região de compressão da região de deformação (onde o comprimento permanece inalterado) é chamada de superfície neutra. A intersecção entre superfície neutra e o plano de simetria é chamada de linha neutra.

A equação que determina a tensão de flexão é dada por (BEAUFIT, 1977):

$$\sigma_x = -\frac{M}{I}y, \quad (2)$$

onde *I* é o momento de inércia da seção reta, *M* é momento fletor em relação a linha neutra e *y* é a distância da linha neutra a um ponto da viga. Sua curvatura κ é definida

como o inverso do raio de curvatura ϱ , ficando determinada pela relação (BUFFONI, 2023):

$$\kappa = \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EI} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{d^2y}{dx^2}$$

que no caso de pequenas deflexões ($dy/dx = 0$), se reduz a

$$\varrho^{-1} = \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}. \tag{3}$$

A viga ilustrada na Fig. 4 é considerada de *Euler-Bernoulli* se satisfazer as seguintes hipóteses: a) O formato da viga é um prisma reto, cujo comprimento é muito maior que as outras dimensões da viga; b) A viga é constituída de um material linearmente elástico; c) O coeficiente de Poisson é negligenciável (não teve contração ou expansão transversal ao longo dos eixos y ou z); d) A seção transversal é simétrica em relação ao plano vertical, de forma que a linha neutra está contida nele (a linha neutra é posicionada em $h/2$); e) Planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares depois da deformação; f) O ângulo de rotação é muito pequeno; g) O efeito de momento de inércia de rotação e a energia envolvida no cisalhamento são desprezíveis; h) A viga é constituída de material homogêneo com densidade ρ .

4.2 Dinâmica de Newton: equação de Euler-Bernoulli

Considere o diagrama de corpo livre de um pequeno elemento de viga de massa dm , comprimento dx e uma área de seção transversal $A(x)$ em uma vibração transversal ao longo de y com uma carga distribuída, Fig. 5. O elemento foi obtido usando o método da seção, fazendo um corte nos pontos O e O' a uma distância x de A . Nas seções O e O' aparecem o momento fletor $M(x, t)$, a força cortante $V(x, t)$, e a carga distribuída $f(x, t)$ é uma força por unidade de comprimento. O elemento de massa pode ser determinado a partir da relação $dm = \rho dV$ onde ρ é a densidade volumétrica da viga em questão.

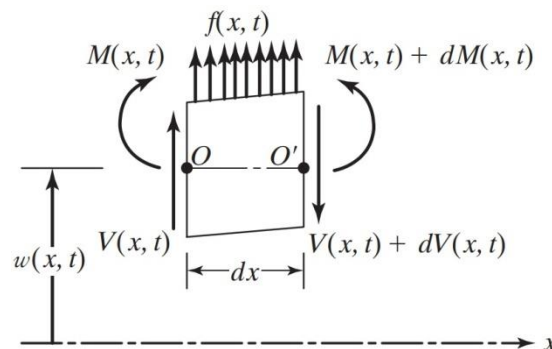


Figura 5 – Elemento de viga. Fonte: adaptado de (RAO, 2008).

De acordo com a dinâmica newtoniana a força resultante ao longo de y e o momento em relação à O (nulo) são determinados por (CAMPANARI, 1985):

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_y &= ma_y, \\
 -(V + dV) + f(x, t)dx + V &= \rho A(x)dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{4}
 \end{aligned}$$

e

$$\downarrow + \sum M_{O_i} = 0 ,$$

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 , \quad (5)$$

onde w na Eq. (4) é a amplitude de oscilação. Escrevendo:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad \text{e} \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx , \quad (6)$$

e desconsiderando os termos que envolvem potências ao quadrado em dx ($dx \ll 1$), as Eqs. (4) e (5) podem ser escritas como,

$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + f(x, t) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} , \quad (7)$$

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = V(x, t) . \quad (8)$$

Em seguida, combinando as Eqs. (6) e (5) obtém-se:

$$-\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} . \quad (9)$$

Da teoria elementar de flexão de vigas (também conhecida como teoria de Euler-Bernoulli ou teoria da viga delgada ou fina) (RAO, 2008) a relação entre o momento fletor e a deflexão pode ser expressa a partir da Eq. (3), e a Eq. (7) pode ser reduzida a uma equação diferencial parcial de quarta ordem em x e segunda ordem em t , a saber:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) . \quad (10)$$

Para a viga ilustrada na Fig. 4, em que a área da seção transversal é constante, as vibrações são livres ($f(x, t) = 0$) e a Eq. (10) se reduz à equação de Euler-Bernoulli para vibrações livres:

$$c^4 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 , \quad (11)$$

onde:

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} . \quad (12)$$

4.3 Condições iniciais e de vínculos

Uma vez que a equação de movimento envolve uma derivada de segunda ordem em relação ao tempo e uma derivada de quarta ordem em relação a x , são necessárias duas condições iniciais e quatro condições de contorno para determinar uma solução única para $w(x, t)$. Normalmente, os valores de deslocamento lateral e velocidade são especificados como $w(x, t)$ e $\partial w(x, t)/\partial t$ em $t = 0$, de modo que as condições iniciais se tornam

$$w(x, t = 0) = w_0(x) , \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = p_0(x) , \quad (14)$$

onde $w_0(x)$ e $p_0(x)$ são funções que dependem das condições iniciais escolhidas.

As condições de contorno de uma viga biengastada são obtidas das condições de que a deflexão e a inclinação são nulas em $x = 0$ e $x = L$, isto é

- Para $x = 0$:

$$w(x = 0, t) = 0, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right|_{x=0} = 0, \quad (16)$$

e

- Para $x = L$:

$$w(x = L, t) = 0, \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right|_{x=L} = 0. \quad (18)$$

Estas equações determinam as formas nodais (funções nodais) e as frequências naturais de vibração da viga biengastada. As condições dadas pelas Eqs. (15)–(18) são as condições de vínculos da viga em questão, por não existir efeito de rotação e translação nos pontos A e B (vide Fig. 4).

4.4 Vibrações livres

Para estudar os modos de vibração livre da viga biengastada deve-se usar a Eq. (11) e as condições dadas pelas Eqs. (13)–(18). A solução pode ser determinada usando o método de separação de variáveis fazendo $w(x, t) = W(x)T(t)$ (RODRIGUES, 2017), que substituída na Eq. (11) fornece:

$$c^2 \frac{1}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = - \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \omega^2. \quad (19)$$

A Eq. (19) pode ser separada em duas equações diferenciais:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0, \quad (20)$$

e

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0, \quad (21)$$

onde

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (22)$$

Assim, as Eqs. (20) e (21) permitem soluções analíticas em t e x .

4.5 Solução Temporal

A solução da Eq. (20) é obtida procurando soluções do tipo $T(t) = e^{st}$, a qual fornece a equação de autovalor

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

cujas soluções são $\pm i\omega$. Portanto, a solução temporal é dada pela combinação linear:

$$T(t) = A^* \cos(\omega t) + B^* \sin(\omega t), \quad (23)$$

onde foi usada a relação (RODRIGUES, 2017):

$$e^{\pm i\omega} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t), \quad (24)$$

e as definições $A^* = A + B$ e $B^* = i(A - B)$.

4.6 Solução Espacial

A solução da Eq. (21) é obtida procurando soluções do tipo $W(x) = e^{sx}$, que fornece a equação de autovalor

$$(s^2 - \beta^2)(s^2 + \beta^2) = 0,$$

cujas soluções são: $s = \pm\beta$ e $s = \pm i\beta$. Portanto a solução espacial é dada pela combinação linear:

$$W(x) = C^* \cosh(\beta x) + D^* \sinh(\beta x) + E^* \cos(\beta x) + F^* \sin(\beta x), \quad (25)$$

onde foram usadas as relações (RODRIGUES, 2017):

$$e^{\pm\beta x} = \cosh(\beta x) \pm \sinh(\beta x), \quad (26a)$$

$$e^{\pm i\beta x} = \cos(\beta x) \pm i \sin(\beta x), \quad (26b)$$

e as definições: $A^* = A + B$, $D^* = C - D$, $E^* = E + F$, e $F^* = i(E - F)$. A Eq. (25) com as condições de contorno (15)–(18), permite obter a equação:

$$\cosh(\beta L) \cos(\beta L) = 1, \quad (27)$$

As soluções da Eq. (27) permitem obter os valores de βL e conseqüentemente as frequências dos modos de vibração da viga com:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (28)$$

sendo

$$\omega = \frac{(\beta L)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, \quad (29)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, $I = bh^3/12$ é o momento de inércia em relação à linha neutra (onde a tensão é nula), ρ é a densidade do material e L o seu comprimento. Os valores adotados para essas constantes estão listadas na Tabela 1.

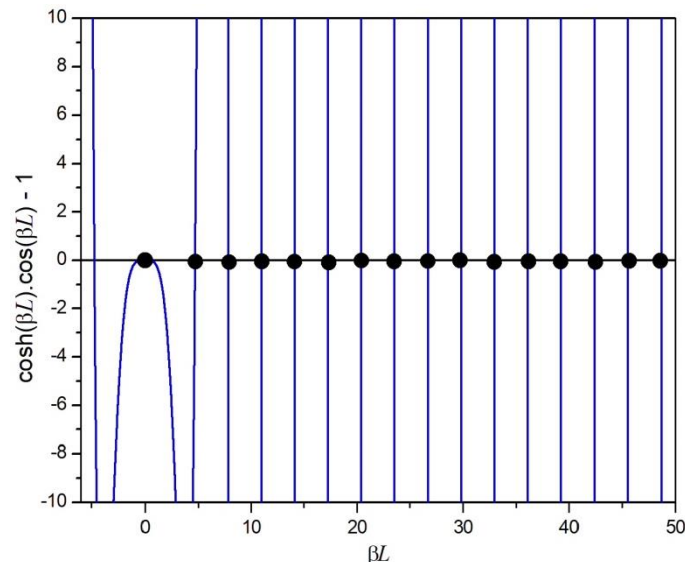
As soluções da Eq. (27) podem ser obtidas por softwares gratuitos disponíveis na internet, como por exemplo, os softwares *desmos* (DESMOS, 2024) ou *Geogebra* (GEOGEBRA, 2024). Neste trabalho optou-se pela calculadora gráfica *desmos* lançada em 2011 pela Universidade de Yale. Ela possui uma interface gráfica que permite obter gráficos com boa qualidade. Usando a calculadora gráfica *desmos*, apresenta-se na Fig. 6 as possíveis soluções da Eq. (27) na forma:

$$\cosh(\beta L) \cos(\beta L) - 1 = 0$$

Na Seção 5, os valores de βL determinados usando o software *desmos* (os círculos assinalados na Fig. 6) serão tabelados para determinar as 15 (quinze) primeiras frequências dos modos de vibração da viga engastada e o resultado será comparado com os obtidos por simulação computacional usando o método dos elementos finitos (MEF).

Tabela 1 – Características da viga em balanço. Fonte: o autor.

| Constante | Valor |
|-----------|------------------------|
| ρ | 7888 kg/m ³ |
| b | 4 mm |
| h | 17 mm |
| L | 65 cm |
| E | 200 GPa |

Figura 6 – modos de vibração utilizando o software *desmos*. Fonte: o autor.

5. Simulação computacional: método dos elementos finitos

5.1 Simulação Computacional

O método dos elementos finitos (MEF) tornou-se uma ferramenta poderosa na solução numérica de uma grande variedade de problemas de Física e Engenharia. As aplicações variam desde a análise de tensão, deformação e vibrações em estruturas até a análise de transferência de calor, escoamento de fluidos, fluxo magnético, infiltração, etc. (ASSAN, 1999; COOK, 1989; OZISIK, 1994). Com o avanço da tecnologia de computação e sistemas, problemas complexos podem ser modelados com mais facilidade. Diversas configurações alternativas podem ser testadas em um computador antes que o primeiro protótipo seja construído. A simulação computacional usando o MEF pode ser realizada em qualquer linguagem de programação como Fortran, C, C++ ou ainda softwares como MATLAB (MATLAB, 2024) ou OCTAVE (OCTAVE, 2024). Neste trabalho usou-se o MATLAB.

O MATLAB (abreviatura de MaTriX LABoratory) é um programa de computador especializado e otimizado para cálculos científicos e de Engenharia (CHAPMAN, 2016; FERREIRA, 2008). Inicialmente ele foi projetado para cálculos matriciais e ao longo dos anos, transformou-se em um sistema computacional flexível, capaz de resolver muitos problemas técnicos. O software implementa a linguagem de programação de mesmo nome, juntamente com uma vasta biblioteca de funções predefinidas que torna as tarefas de programação técnica mais fáceis e eficientes. Além disso, o MATLAB tem muitas vantagens, em comparação com linguagens computacionais convencionais com o C++, Fortran e Python. Entre elas podemos citar: facilidade de uso, independência da plataforma, funções predefinidas, diagramações independentes de dispositivos e interface gráfica de usuário.

5.2 O método dos elementos finitos

As ideias básicas do método dos elementos finitos (MEF) se originaram dos avanços na análise estrutural de aeronaves. Em 1941, Alexander Hrennikoff apresentou uma solução para problema de elasticidade usando *método de teoria de estruturas* (HRENNIKOFF, 1941). Nesse artigo era apresentada uma interpolação polinomial por partes sobre sub-regiões triangulares para modelar problemas de torção. Turner e Clough derivaram matrizes de rigidez para treliça, viga e outros elementos, e apresentaram seus resultados em 1956 (TURNER, 1956). O termo elemento finito foi a princípio criado por R. W. Clough na década de 1960.

Na década de 1960, os engenheiros usaram o método para aproximar a solução de problemas de análise de tensão, escoamento de fluidos e transferência de calor. Um dos pioneiros nesta área foi John Hadji Argyris, que publicou em 1955 um livro sobre o teorema de energia e métodos matriciais, estabelecendo uma base para outros desenvolvimentos sobre elementos finitos (ARGYRIS, 1960). O primeiro livro sobre elementos finitos, de O. C. Zienkiewicz et al., foi publicado em 1967 (ZIENKIEWICZ, 2005). No final da década de 1960 e no início da de 1970, a análise de elementos finitos foi aplicada a problemas não lineares e a grandes deformações. Uma importante referência sobre este assunto é o livro de John Tinsley Oden sobre contínuos não lineares, publicado em 1967 (ODEN, 2006). Portanto, as bases matemáticas do método foram estabelecidas na década de 1970. O desenvolvimento de novos elementos, estudo de convergência e outras áreas relacionadas se encaixaram nessa categoria.

No método de análise do MEF, uma região complexa definindo um meio contínuo é transformada em formas geométricas simples e discretas, chamadas de “elementos finitos”. As propriedades dos materiais e as relações governantes são consideradas sobre esses elementos e expressas em termos de valores, considerando o carregamento e os vínculos, resultando em um conjunto de equações. A solução dessas equações nos dá o comportamento aproximado do meio contínuo.

Uma viga no MEF é dividida em elementos, como ilustrado na Fig. 7. Cada nó tem dois graus de liberdade (GDL). Normalmente, os GDL do nó i são Q_{2i-1} e Q_{2i} . O GDL Q_{2i-1} é o deslocamento transversal, e Q_{2i} é a declividade ou rotação da tangente à linha elástica (ou linha neutra). O vetor

$$\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{10}\}, \quad (30)$$

representa o vetor deslocamento global. Para um único elemento, os GDL locais são indicados por

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}^T, \quad (31)$$

onde o supraíndice T indica a matriz transposta.

O vetor \mathbf{q} é o mesmo que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}^T$. As funções de interpolação de v em um elemento são definidas por meio da variável ξ no intervalo de -1 a $+1$. Como são envolvidos deslocamentos e declividades, definimos funções de forma de Hermite, que satisfazem os requisitos de continuidade de deslocamento e declividade nodal. Cada uma das funções de forma tem ordem cúbica representada por

$$H_i = a_i + b_i \xi + c_i \xi^2 + d_i \xi^3, \quad (32)$$

onde $i = 1, 2, 3, 4$ e com as condições dadas na Tabela 2.

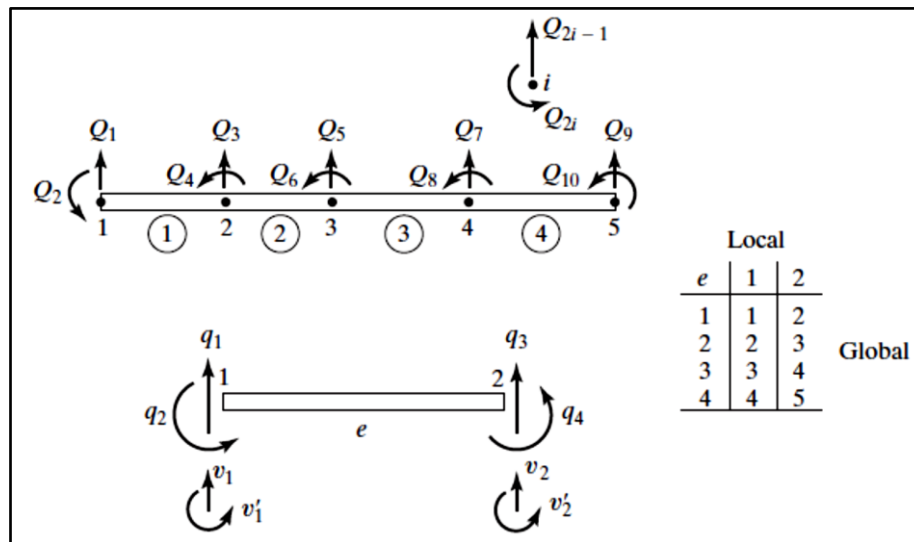


Figura 7 – Discretização em elementos finitos. Fonte: Adaptado de (CHANDRUPATLA, 2015).

Tabela 2 – Condições de H_i e suas derivadas H'_i para cada valor ξ .

| ξ | H_1 | H'_1 | H_2 | H'_2 | H_3 | H'_3 | H_4 | H'_4 |
|-------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|
| -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Os coeficientes a_i , b_i , c_i e d_i podem ser obtidos com a imposição dessas condições. Assim:

$$H_1 = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3), \tag{33}$$

$$H_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3), \tag{34}$$

$$H_3 = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3), \tag{35}$$

$$H_4 = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3), \tag{36}$$

A Fig. 8 apresenta as funções de forma de Hermite. Dessa forma, os polinômios de Hermite podem ser usados para escrever as funções de interpolação $v(\xi)$

$$v(\xi) = H_1 v_1 + H_2 \left(\frac{dv}{d\xi} \right)_1 + H_3 v_3 + H_4 \left(\frac{dv}{d\xi} \right)_1, \tag{37}$$

As coordenadas transformam-se pela relação

$$x = \frac{1 - \xi}{2} x_1 + \frac{1 + \xi}{2} x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \xi = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{\ell_e}{2} \xi, \tag{38}$$

onde ℓ_e é o comprimento do elemento de viga. Usando a regra da cadeia

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{d\xi} = \frac{\ell_e}{2} \frac{dv}{dx}, \tag{39}$$

e observando que dv/dx avaliado nos nós 1 e 2 é igual a q_2 e q_4 respectivamente, tem-se:

$$v(\xi) = H_1 q_1 + \frac{\ell_e}{2} H_2 q_2 + H_3 q_2 + \frac{\ell_e}{2} H_4 q_4, \quad (40)$$

que pode ser escrita na forma matricial:

$$v = \mathbf{H} \mathbf{q}, \quad (41)$$

onde a matriz \mathbf{H} é dada por:

$$\mathbf{H} = \left[H_1, \frac{\ell_e}{2} H_2, H_3, \frac{\ell_e}{2} H_4 \right], \quad (42)$$

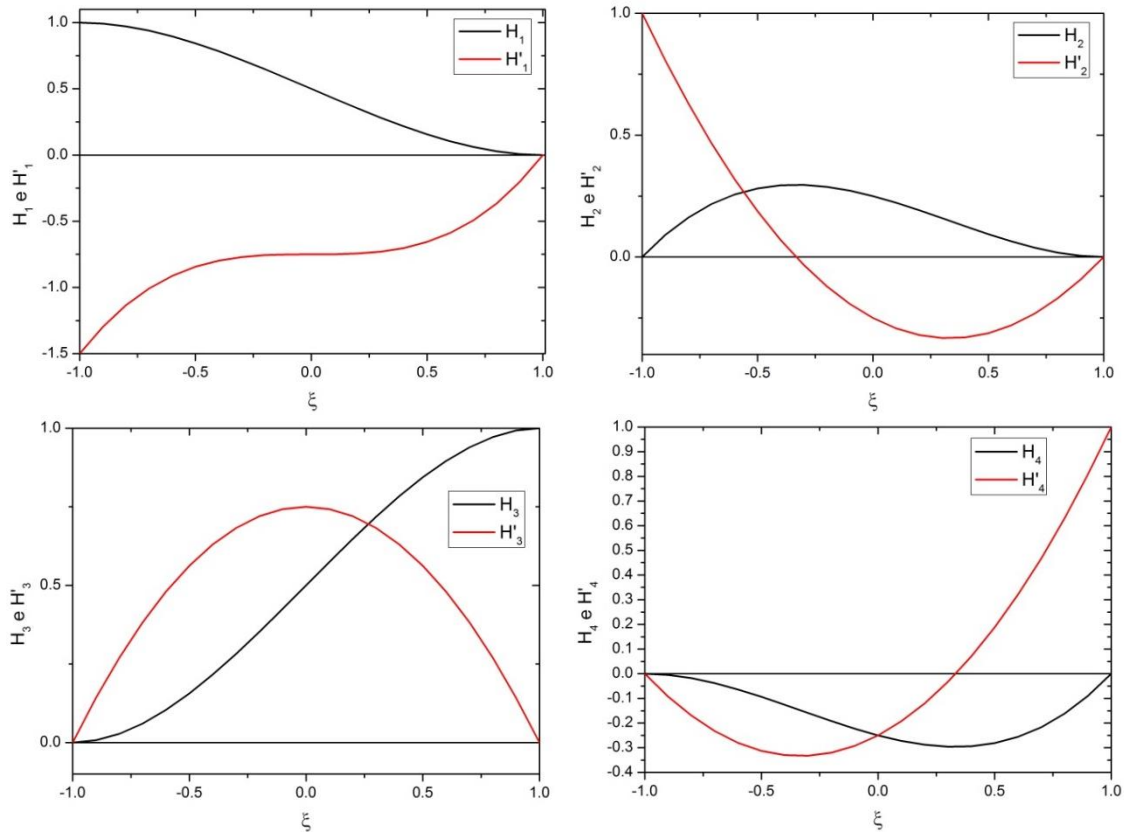


Figura 10 – Funções de forma de Hermite. Fonte: o autor.

Uma energia cinética T e uma energia potencial de flexão transversal U podem ser associadas a cada elemento de viga sob flexão dinâmica. Essa energia é obtida da relação $\mathcal{L} = T - U$, onde \mathcal{L} é a lagrangeana (NETO, 2013). Essas energias serão definidas em termos de funções nodais.

A energia potencial em uma flexão é dada pela relação (BUFFONI, 2024):

$$U_e = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (43)$$

onde E e I são respectivamente o módulo de elasticidade e o momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra e v é a deflexão. Calculando a derivada segunda que aparece no integrando da Eq. (43) tem-se:

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 = \mathbf{q}^T \frac{16}{(\ell_e)^4} \left(\frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \right)^T \left(\frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \right), \quad (44)$$

em que

$$\left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right) = \left[\frac{3}{2}\xi, \frac{-1 + 3\xi}{2} \frac{\ell_e}{2}, -\frac{3}{2}\xi, \frac{1 + 3\xi}{2} \frac{\ell_e}{2}\right]. \quad (45)$$

Com a substituição de $dx = \ell_e d\xi/2$ e as Eqs. (44) e (45) em (43), obtém-se a seguinte expressão (FELTON, 1996):

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{8EI}{(\ell_e)^3} \int_{-1}^1 \mathbf{q} dx \mathbf{S}, \quad (46)$$

onde:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 9\xi^2/4 & 3(-1 + 3\xi)\ell_e/8 & -9\xi^2/8 & 3(1 + 3\xi)\ell_e/8 \\ 0 & (-1 + 3\xi)^2(\ell_e)^2/16 & -3(-1 + 3\xi)\ell_e/8 & -(-1 + 9\xi^2)(\ell_e)^2/16 \\ 0 & 0 & 9\xi^2/4 & 9\xi(-1 + 3\xi)\ell_e/4 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + 3\xi)^2(\ell_e)^2/16 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Assim, a Eq. (46) pode ser escrita como:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_e \mathbf{q}, \quad (48)$$

onde \mathbf{k}_e é a matriz de rigidez do elemento de viga:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} 12 & 6\ell_e & -12 & 6\ell_e \\ 6\ell_e & 4(\ell_e)^2 & -6\ell_e & 2(\ell_e)^2 \\ -12 & -6\ell_e & 12 & -6\ell_e \\ 6\ell_e & 2(\ell_e)^2 & -6\ell_e & 4(\ell_e)^2 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

A matriz de rigidez é muito utilizada no método matricial da rigidez (em inglês direct stiffness method, DSM), sendo aplicável no cálculo de estruturas hiperestáticas de barras que se comportam de forma linear elástica. O método matricial se baseia em estimar as componentes das relações de rigidez para resolver as forças ou os deslocamentos por meio computacional. As propriedades de rigidez do material são computadas em uma única equação matricial que governa o comportamento interno da estrutura idealizada. Os dados que se desconhecem na estrutura são as forças e os deslocamentos, que podem ser determinados resolvendo esta equação. O método direto da rigidez é o mais comum nos programas de cálculo de estruturas.

A Energia Cinética do elemento de viga é definida pela relação:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \rho dV, \quad (50)$$

onde ρ é a densidade volumétrica (massa por volume) e $\dot{\mathbf{u}} = [\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}]$ é o vetor velocidade em um ponto x . No MEF, a viga é dividida em elementos, expressados por \mathbf{u} em função dos deslocamento nodais \mathbf{q} . Assim $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}$. Em análise dinâmica, os elementos de \mathbf{q} são dependentes do tempo, enquanto \mathbf{N} representa funções de forma (espaciais) definidas em um elemento mestre. O vetor velocidade é dado por: $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}$. Portanto, a energia cinética de um elemento pode ser escrita na forma:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[\int \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \right] \dot{\mathbf{q}}, \quad (51)$$

onde

$$\mathbf{m}_e = \int_e \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \quad (52)$$

é a matriz de massa do elemento. Essa matriz é consistente com as funções de forma escolhidas e é chamada matriz de massa consistente. Para o elemento de viga, usa-se a função de forma de Hermite (vide Eqs. 33–36):

$$\mathbf{m}_e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \rho A_e \frac{\ell_e}{2} d\xi. \quad (53)$$

Integrando todos os elementos da matriz, tem-se a matriz de massa para o elemento de viga:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho A_e \ell_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell_e & 54 & -13\ell_e \\ 22\ell_e & 4(\ell_e)^2 & 13\ell_e & -3(\ell_e)^2 \\ 54 & 13\ell_e & 156 & -22\ell_e \\ -13\ell_e & -3(\ell_e)^2 & -22\ell_e & 4(\ell_e)^2 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Para aproximações discretas da mecânica de meios contínuos, como no método de elementos finitos, pode haver mais de uma maneira de construir a matriz de massa, dependendo da precisão e desempenho computacionais desejados.

A energia total da viga no MEF é obtida do lagrangeano da soma da diferença da energia cinética e potencial de cada um dos elementos de viga, isto é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - U, \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (55)$$

onde,

$$\dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{Q}} = \sum_e \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{q}}, \quad (56)$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} = \sum_e \mathbf{q}^T \mathbf{k}_e \mathbf{q}, \quad (57)$$

para vibrações livres. Portanto, a equação de movimento é obtida da equação de Lagrange. Para as condições de regime permanente, começando a partir da posição de equilíbrio $\mathbf{Q} = \text{sen}(\omega t)$, onde \mathbf{U} é o vetor de amplitudes nodais de vibração, a equação de movimento é dada por:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{U}. \quad (58)$$

As frequências naturais dos modos normais de vibração e os vetores nodais são obtidos a partir da diagonalização das matrizes (57), isto é:

$$\{\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{I}\} \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (59)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade, $\{\mathbf{0}\}$ é a matriz nula e $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} = \{\mathbf{D}\}$ é conhecida como matriz dinâmica. A Eq. (57) é um problema de autovalores e autovetores, de modo que ω^2 são os autovalores da matriz dinâmica do sistema. Tendo em mãos as frequências naturais de vibração, a matriz \mathbf{U} será a matriz de autovetores associada às frequências naturais de vibração. A diagonalização da matriz dinâmica permite encontrar as frequências naturais dos modos de vibração da viga, isto é:

$$\omega^2 = \text{diagonal}\{\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}\}, \quad (60)$$

e as frequências dos modos de vibração são determinadas a partir da relação $f = \omega/2\pi$.

5.3 Resultados e Discussões

Para verificar o resultado teórico obtido a partir da equação de Euler-Bernoulli para uma viga biengastada foi utilizado o método dos Elementos finitos implementado em MATLAB. A simulação computacional fornece os seus modos de vibração, para sua respectiva frequência natural, o fator de partição e a massa modal efetiva para cada modo, com o número de elementos iguais a 100. Com os dados da Tabela 1 e usando a Eq. (28) foram determinadas as frequências de Euler-Bernoulli obtida da dinâmica de newton usado a relação,

$$f = \frac{(\beta L)^2}{4\pi^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, \quad (61)$$

com os resultados apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Frequência dos modos de vibração. Fonte: o autor.

| Modo | βL | $f_{\text{teórico}}(\text{Hz})$ | $f_{\text{simulação}}(\text{Hz})$ | %E |
|------|-----------|---------------------------------|-----------------------------------|------|
| 1 | 4,73 | 208.4 | 211.7 | 1,58 |
| 2 | 7,85 | 574.3 | 583.7 | 1,60 |
| 3 | 10,99 | 1126.1 | 1144.0 | 1,56 |
| 4 | 14,14 | 1861.3 | 1891.0 | 1,57 |
| 5 | 17,28 | 2780.6 | 2826.0 | 1,61 |
| 6 | 20,42 | 3883.4 | 3946.0 | 1,59 |
| 7 | 23,56 | 5170.4 | 5254.0 | 1,59 |
| 8 | 26,70 | 6641.3 | 6749.0 | 1,59 |
| 9 | 29,84 | 8295.6 | 8430.0 | 1,59 |
| 10 | 32,99 | 10134.1 | 10300.0 | 1,61 |
| 11 | 36,13 | 12156.0 | 12350.0 | 1,57 |
| 12 | 39,27 | 14362.0 | 14590.0 | 1,56 |
| 13 | 42,41 | 16752.0 | 17020.0 | 1,57 |
| 14 | 45,55 | 19326.0 | 19640.0 | 1,59 |
| 15 | 48,69 | 22083.0 | 22440.0 | 1,59 |

Os modos de vibração da viga para cada frequência tabelada é mostrado nas Figs. 9 e 10 para os doze primeiros modos de frequência da viga em balanço simulado no MEF para divisões de 30 elementos. Nota-se que os resultados são bons, pois, as diferenças entre os resultados teóricos e os obtidos por simulação no software MatLab estão entre 1,56% e 1,61%. No entanto, estudos prolongados e testes nas próximas sequências mostram uma margem de erro maior a partir do 15º modo de vibração, Fig. 11. As frequências começam a ficar mais complexas e exigem cada vez mais pontos entre um intervalo e outro para definir melhor o gráfico da função, visto que as distâncias entre os βL 's são cada vez maiores dentre um ponto e outro à medida que a frequência aumenta. Como a frequência é inversamente proporcional ao comprimento de onda, frequências infinitas tendem a necessitar de pontos infinitos para serem mais precisos. Dessa forma o programa fica mais pesado e o código pode não funcionar em vigas muito grandes, grossas ou compridas, o mesmo para altas frequências.

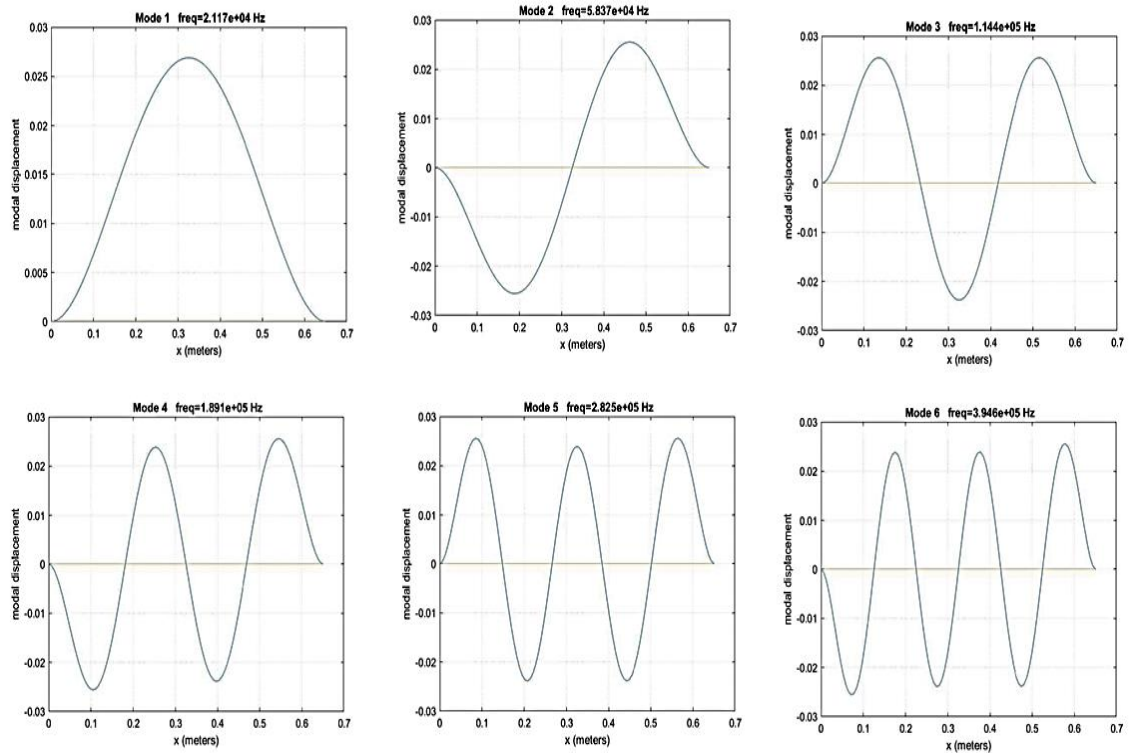


Figura 9 – Modos de vibração intervalos de 1 a 6. Fonte: o autor.

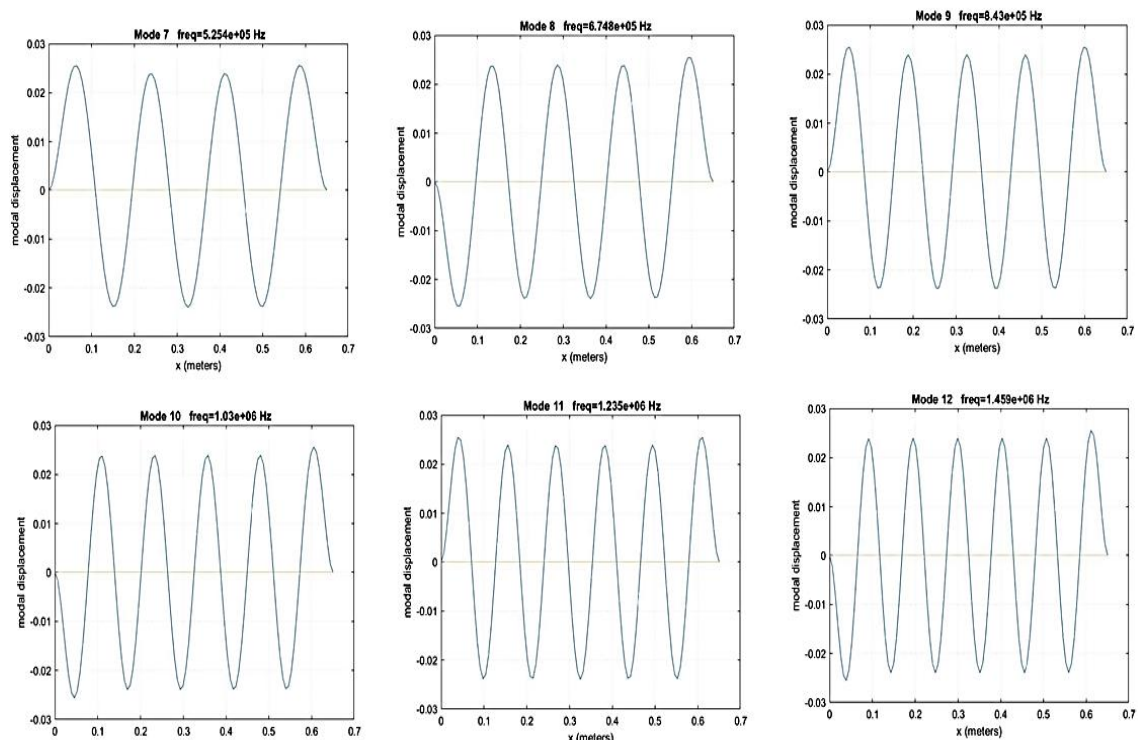


Figura 10 – Modos de vibração intervalos de 7 a 12. Fonte: o autor.

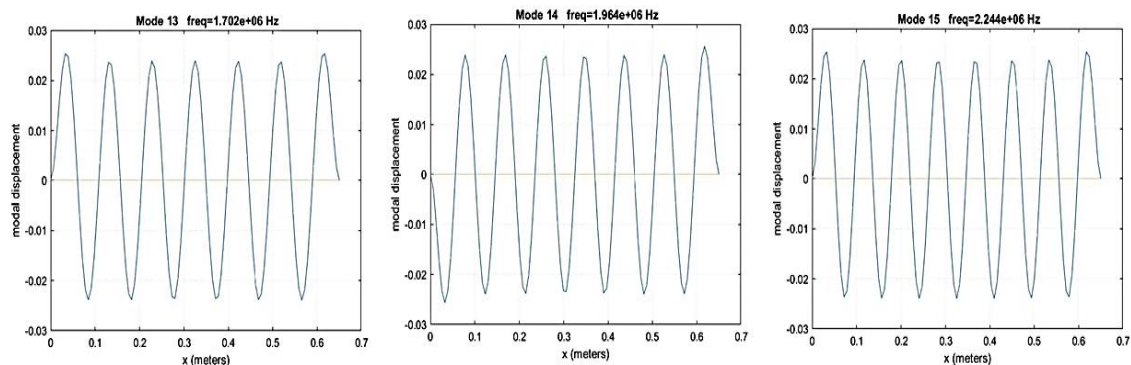


Figura 11 – Modos de vibração intervalos de 13 a 15. Fonte: o autor.

6. Conclusões

Pode se concluir com esse estudo que as configurações de vinculação que possuem uma rigidez maior apresentam precisão inferior quando verificadas em uma malha menos refinada. Além dessas observações podemos verificar também que as vinculações que acarretam em uma condição de contorno dependente de derivadas de ordens mais elevadas, apresentando uma maior dificuldade de convergir, por conta de sua complexidade.

Como constatado, esta relação entre as configurações de vinculação e os resultados apresentados não é exclusiva do modelo dinâmico de Euler-Bernoulli e do MDF, porque verifica-se um comportamento análogo no modelo estático e em outros modelos matemáticos que governam a deflexão de vigas, assim como em outros métodos numéricos. Portanto, este comportamento é natural à vinculação e não à modelagem matemática ou ao método numérico empregado.

Ademais, por meio da comparação entre o modelo dinâmico e o estático, depreende-se que a flecha média do modelo dinâmico resulta no mesmo valor da flecha estática. Ao se avaliar esta relação, observou-se um comportamento anômalo. Entretanto, a oscilação apresentada tende a convergir. Conseqüentemente, sua descoberta não invalida a relação citada entre os modelos dinâmico e estático, mas sim evidencia um grau de complexidade superior ao esperado.

O estabelecimento de um critério de estabilidade adequado constituiu um dos desafios a serem transpostos, uma vez que há mais de uma abordagem possível. Além disso, não é comum na literatura a apresentação do critério para o problema em questão. A distribuição de erros também constituiu uma barreira importante, pois a identificação das regiões críticas identificadas com maiores índices de erro, como coincidentes de pontos de inclinação nula, também não é trivial nem automática.

Com base na experiência adquirida neste estudo, pode-se propor para futuros estudos uma análise mais aprofundada das regiões críticas, avaliando se a presença de outros parâmetros ameniza a oscilação identificada ao se comparar a média da flecha dinâmica com a flecha estática, bem como uma investigação da configuração de vinculação fixa-fixa, matematicamente possível e relevante para avaliação de certos comportamentos.

Finalizando, este estudo pode servir como base para outros trabalhos interdisciplinas de física que envolvam áreas da computação, engenharia e Matemática.

Referências

- ANDERSON, J. D. *Modern Compressible Flow*. Boston: McGraw-Hill, 2004. ISBN: 0-07-124136-1.
- ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. *Energy theorems and structural analysis: a generalised discourse with applications on energy principles of structural analysis including the effects of temperature and nonlinear stress-strain relations*. London: Butterworth, 1960.
- ARQUEOLOGIA. Disponível em: <http://arqueologiaibanez.blogspot.com/2016/09/o-detector-de-terremotos-com-200-anos.html>. Acessado em 24 de maio de 2024.
- ASSAN, A. E. *Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos*. Campinas: Editora da Unicamp, 1999.
- BALL, W. W. R. *The Bernoullis. A Short Account of the History of Mathematics*. New York: Dover, 2003. ISBN: 0-486-20630-0.
- BALTUS, C. Continued fractions and the Pell equations: The work of Euler and Lagrange. *Comm. Anal. Theory Contin. Fractions*, Vol. 3, 4–31, 1994.
- BEAUFIT, F. W. *Basic Concepts of Structural Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, 1977.
- BEER, F. P.; JOHNSTON, E.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. *Mecânica dos Materiais*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 2015.
- BERNARD, J. W. The Principle and the Elements: Rameau's Controversy with D'Alembert, *Journal of Music Theory*, Vol. 24, n. 1, 37–62 (1980).
- BORGES, A. N.; RODRIGUES, C. G. *Introdução à Física Acústica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.
- BRODRICK, J. S. J. *Galileo: the man, his work, his misfortunes*. Londres: G. Chapman, 1965.
- BUCCIARELLI, L. L.; DWORSKY, N. *Sophie Germain: An Essay in the History of the Theory of Elasticity*. Dordrecht: D. Reidel, 1980. ISBN: 978-90-277-1135-9
- BUFFONI, S. S. O. *Energia de deformação na flexão*. Disponível em: <https://www.professores.uff.br/salete/wp-content/uploads/sites/111/2017/08/aula121.pdf>
- BUFFONI, S. S. O. *Tensões de Flexão nas Vigas*. Disponível em: <https://www.professores.uff.br/salete/wp-content/uploads/sites/111/2017/08/aula11.pdf>
- CALINGER, R. Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727–1741). *Historia Mathematica*, Vol. 23, n. 2, 121–166, 1996. DOI:10.1006/hmat.1996.0015
- CAMPANARI, F. A. *Teoria das Estruturas*. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1985.
- CARRER, J. A. M.; FLEISCHFRESSER, S. A.; GARCIA, L. F. T.; MANSUR, W. J. Dynamic analysis of Timoshenko beams by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, n. 12, 1602–1616 (2013). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2013.08.007>
- CASTRO, D. M. *Análise de Tensões de Vigas Através da Teoria de Vlasov para Torção Não Uniforme com Empenamento Restringido*. Porto Alegre: Departamento de Engenharia Mecânica, UFRS, 2016. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/150559/001008692.pdf?sequence=1>
- CENTINA, A. D. Letters of Sophie Germain preserved in Florence. *Historia Mathematica*, Vol. 32, n. 1, 60–75, 2005. DOI: 10.1016/j.hm.2003.11.001
- CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D. *Elementos Finitos*. São Paulo: Pearson, 2015.
- CHAPMAN, S. J. *Programação em MATLAB para engenheiros*. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- CHLADNI, Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni. Acessado 20 de maio de 2024.
- CHROUST, A. H. *Aristotle: New Light on His Life and On Some of His Lost Works*. London: Routledge, 2016.
- CLEBSCH, R. F. A. *Theorie der Elasticität fester Körper*. Berlin: Springer-Verlag, 2002. ISBN: 0543956504
- COOK, R. E.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1989.

- CRUZEIRO, N. I.** *Os Elementos de Harmonia de Aristóximo de Tarento: tradução e comentário*, tese de mestrado. São Paulo: USP, 2021.
- DERESIEWICZ, H.; BIENIEK, M. P.; DIMAGGIO, F. L.** eds. *The Collected Papers of Raymond D. Mindlin*. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- DESMOS.** Disponível em: <https://www.desmos.com/calculator?lang=pt-BR>
- EVEREST, A. S.** Kirchhoff-Gustav Robert 1824–1887. *Physics Education*, Vol. 4, n. 6, 341, 1969. DOI: 10.1088/0031-9120/4/6/304
- FEIGENBAUM, L.** Brook Taylor and the Method of Increments. *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 34, n. 1-2, 1–140, 1985. DOI:10.1007/BF00329903. S2CID 122105736.
- FELTON, L. P.; NELSON, R. B.** *Matrix Structural Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- FERGUSON, K.** *Pythagoras: His Lives and the Legacy of a Rational Universe*. London: Icon Books, 2008.
- FERREIRA, A. J. M.** *MATLAB Codes for Finite*. Lisboa: El. Porto, 2008.
- FIX, A.** A science superior to music: Joseph Sauveur and the estrangement between music and acoustics. *Physics in Perspective*, Vol. 17, n. 3, 173–97 (2015).
- FOURIER, J.** *Théorie Analytique de la Chaleur*. Paris: Firmin Didot Père et Fils, 1822.
- GEOGEBRA.** Disponível em: <https://www.geogebra.org/?lang=pt>
- GROSSLIGHT, J.** Small Skills, Big Networks: Marin Mersenne as mathematical intelligencer. *History of Science*, Vol. 51, n. 3, 337–374 (2013). DOI: 10.1177/007327531305100304
- HAN, M. S.; BENAROYA, H.; WEI T.** Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225, n. 5, 935–988, 1999.
- HRENNIKOFF, A.** Solution of problems of elasticity by the framework method. *Journal of applied mechanics*, Vol. 8, n. 4, 169–175, 1941.
- HUMPHREY, A. T.** Lord Rayleigh – the last of the great victorian polymaths. *GEC Review*, Vol. 7, n. 3, 167, 1992. Disponível em: <https://archive.ph/20130411013600/https://googledrive.com/host/0B-UggpdTDpJEQVIHcUtSOUZ6eGM/GECEReviewv7n3p167.htm>
- INMAN, D. J.** *Engineering Vibration*. New York: Prentice Hall, 2007.
- KAPUR, K. K.** Vibrations of a Timoshenko beam, using a finite element approach. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 40, 1058–1063, 1966.
- MACARDLE, M.** *Scientists: Extraordinary People Who Altered the Course of History*. New York: Metro Books, 2008.
- MATLAB.** Disponível em: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>
- NETO, J. B.** *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana E Hamiltoniana*. São Paulo: Livraria da Física, 2013.
- OCTAVE.** Disponível em: <https://octave.org/>
- ODEN, J. T.** *Finite Elements of Nonlinear Continua*. New York: Dover Publications, 2006.
- OZISIK, N.** *Finite Difference Methods in Heat Transference*. Florida: CRC press, 1994.
- POLLIO, M. V.** *Tratado de Arquitetura*. São Paulo: Martins Fontes, 2007. ISBN: 978-8577070039
- PURRINGTON, R. D.** *The First Professional Scientist: Robert Hooke and the Royal Society of London*. Berlin: Springer Science & Business Media, 2009. ISBN 3-034-60037-2
- RAO, S. S.** *Vibrações Mecânicas*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- RONAN, C. A.** *História Ilustrada da Ciência: Das Origens à Grécia*, Vol. 1. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1985.
- RODRIGUES, C. G.** *Ondas, Acústica, Psicoacústica e Poluição Sonora*. Goiânia: [s.n], 2020. ISBN: 9786500068467. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/343431173_Ondas_Acustica_Psicoacustica_e_Poluicao_Sonora
- RODRIGUES, C. G.** *Tópicos de Física Matemática para Licenciatura*. São Paulo: Editora LF, 2017.

RONAN, C. A. *História Ilustrada da Ciência: Oriente, Roma e Idade Média*, Vol. 2. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1987.

ROSSING, T. D. Chladni's law for vibrating plates. *American Journal of Physics*, Vol. 50, 271–274, 1982.

SAVI, M. S.; PAULA, A. S. *Vibrações Mecânicas*. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2017.

SCHNADEL, G.; FRAHM, H. in: *Neue Deutsche Biographie*, Vol. 5, p. 313, 1961. Disponível em: <https://www.deutsche-biographie.de/ppn137502273.html>

SCRIBA, C. J. The autobiography of John Wallis, F.R.S. *Notes and Records of the Royal Society of London*, Vol. 25, 17–46, 1970. DOI:10.1098/rsnr.1970.0003. S2CID 145393357.

STODOLA, A. B. *Steam and Gas Turbines*. New York: P. Smith, 1945.

STRUTT, J. W. *The theory of sound*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139058087>

SYMON, K. R. *Mechanics*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1971.

TIMOSHENKO, S. P. *History of Strength of Materials*. New York: Dover, 1983. ISBN: 0-486-61187-6.

TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D. Y. *Vibration Problems in Engineering*. New York: D. van Nostrand, 1955.

THOMPSON, W. T.; DAHLET, M. D. *Theory of Vibration with Applications*. New York: Prentice Hall, 1997.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, n. 9, 805–823 1956.

VLASOV, V. Z. *Thin-Walled Elastic Beams*. Israel Program for Scientific Translations Ltd., 1^o edition, 1961.

WESTFALL, R. S. Isaac Newton. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. ISBN: 978-0-19-921355-9

WILKINS, D. R. Siméon Denis Poisson (1781–1840). School of Mathematics Trinity College, Dublin. Disponível em: https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Poisson/RouseBall/RB_Poisson.html. Acesso em: 20/03/2024.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Berlin: Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN: 0750663200.