

ANÁLISE DE DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS EM PLACAS ESCONSAS SOB CARGA DISTRIBUÍDA TRANSVERSAL UTILIZANDO SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS

Sérgio Luiz Schulz (Universidade Estadual de Ponta Grossa) E-mail: slschulz@uepg.br

Resumo: Neste trabalho foi feita a análise estática e linear física e geométrica de deslocamentos transversais de placas esconsas na forma de paralelogramo, de material isotrópico e de espessura fina e constante, com diversas condições de apoios das bordas (engaste, apoio simples ou livre) e sob carga distribuída transversal constante sobre toda a superfície, utilizando o *software* de Elementos Finitos Ansys. De maneira geral, os resultados obtidos tiveram boa concordância com aqueles disponíveis na literatura. Adicionalmente, foram propostas soluções para três casos não presentes na literatura citada.

Palavras-chave: placas esconsas, deslocamento transversal, Método dos Elementos Finitos, ANSYS, análise estática linear.

TRANSVERSE DISPLACEMENT ANALYSIS OF SKEW PLATES UNDER DISTRIBUTED TRANSVERSE LOAD USING FINITE ELEMENT SOFTWARE

Abstract: In this work, the static physical and geometric linear analysis of transverse displacements of skew thin plates of parallelogram shape and constant thickness, made of isotropic material and under several support conditions (fixed, simply supported, free) and under transverse uniform distributed load over the entire surface, was performed using the Finite Element software Ansys. In general, good results were obtained when compared with those available in the literature. Additionally, solutions for three cases absent in the works cited were proposed.

Keywords: skew plates, transverse displacement, Finite Element Method, ANSYS, static linear analysis.

1. Introdução

As placas esconsas ocorrem com frequência na Engenharia, por questões práticas ou mesmo estéticas, usualmente associadas à sua função e/ou aos espaços disponíveis para seu uso ou para a sua execução; alguns exemplos são as lajes de pontes e de marquises, na Engenharia Civil, e as asas de aviões na Engenharia Aeroespacial (Morley, 1963, p. ix; Szilard, 2004, p. 546; Srinivasa, Suresh e Prema Kumar, 2014; Timoshenko e Woynowsky-Krieger, 1959, p. 318). As placas esconsas também são utilizadas como *patch-tests* na análise da convergência da solução e do desempenho de elementos de placas em *softwares* baseados no Método dos Elementos Finitos (Grbac e Ribarić, 2022, p. 238).

A equação diferencial da placa esconsa relativamente fina de espessura constante h e feita de material isotrópico com módulo de elasticidade longitudinal E e coeficiente de Poisson ν , em um sistema de coordenadas oblíquas \bar{x} - \bar{y} conforme ilustrado na Figura 1, segundo Szilard (2004, p. 547) é expressa por

$$\frac{D}{\cos^4 \varphi} = \left[\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + 2(1 + 2 \sin^2 \varphi) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} - 4 \sin \varphi \left(\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^3 \partial \bar{y}} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^3} \right) + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} \right] = \bar{P}_z(\bar{x}, \bar{y}), \quad (1)$$

onde \bar{w} é o deslocamento transversal e $\bar{p}_z(\bar{x}, \bar{y})$ é uma carga distribuída transversal em certa região da superfície da placa; as coordenadas retangulares e oblíquas de um ponto qualquer estão relacionadas por

$$\bar{x} = x - y \operatorname{tg} \varphi \text{ e } \bar{y} = \frac{y}{\cos \varphi}, \quad (2)$$

e D é a rigidez à flexão das placas e cascas, dada por

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (3)$$

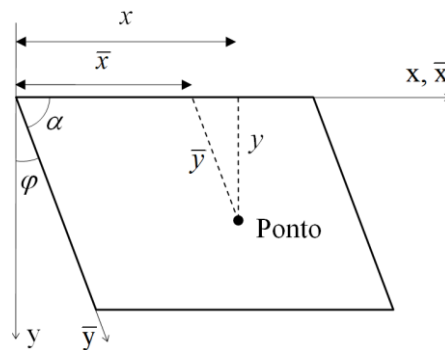


Figura 1 – Sistema de coordenadas oblíquas da placa esbelta. Fonte: adaptado de Szilard (2004).

A obtenção da solução analítica da Equação 1 é relativamente complexa, e usualmente recorre-se a métodos numéricos como o Método das Diferenças Finitas, o Método da Analogia das Grelhas ou o Método dos Elementos Finitos (Szilard, 2004, p. 547); de maneira geral, o deslocamento transversal w de determinado ponto da placa sob carga distribuída transversal q de valor constante sobre toda a sua superfície com sentido para baixo, é dado por

$$w = k \frac{qa^4}{D}, \quad (4)$$

onde a é uma dimensão de referência no plano da placa e k é uma constante que depende das condições de apoio e da posição do ponto analisado no plano da placa.

2. Materiais e métodos

Para a análise computacional das placas no presente trabalho foi utilizado o *software* de Elementos Finitos Ansys 2024 R1 Student/System Analysis: Static Structural, e optou-se pela simulação das placas inteiras com malhas estruturadas, compostas exclusivamente por elementos finitos de mesmo formato e tamanho. O Ansys dispõe dos seguintes tipos de elementos estruturais: sólido bidimensional (*2D solid body*), sólido tridimensional (*3D solid body*), superficial tridimensional (*3D surface body*) e linear tridimensional (*3D line body*). Placas e cascas são analisadas com os elementos superficiais tridimensionais quadriláteros que podem ser lineares (SHELL181, com nós localizados apenas nos vértices) ou quadráticos (SHELL281, com nós nos vértices e também na metade dos lados); cada nó tem três graus de liberdade translacionais, e três graus de liberdade rotacionais (Lee, 2023, p. 37-38; Ansys, Inc., 2024). Elementos superficiais tridimensionais triangulares são degenerados dos quadriláteros; na “Biblioteca de Elementos” do Ansys consta a recomendação de se utilizar elementos triangulares de

casca apenas para preenchimento de malhas (Ansys, Inc., 2024), nos casos em que se trabalha com malhas mistas de elementos quadrilaterais e triangulares. Somente elementos superficiais tridimensionais quadrilaterais lineares foram utilizados no presente trabalho, com refino de malha tipo “h”, ou seja, aquele em que se diminui o tamanho dos elementos e se aumenta seu número, mantendo-se a ordem. Para todos os Problemas foram geradas malhas de 10 x 10, 20 x 20 e 40 x 40 elementos para cada ângulo em estudo, cujo número de nós da malha (NNM) e de elementos da malha (NEM) são, respectivamente, 121 e 100; 441 e 400; 1681 e 1600. Por ter sido utilizado o sistema global de eixos do Ansys onde o eixo z tem sentido para cima, os deslocamentos transversais w têm sinal negativo quando a carga distribuída q tem sentido para baixo.

Nas Figuras representativas dos Problemas, as placas foram desenhadas fora de escala, e nas respectivas Tabelas constam, para cada inclinação α ou φ das placas: a área A total da superfície; as coordenadas x e y do(s) ponto(s) em estudo, quer sejam do centro da placa, da metade de uma borda livre ou de um canto; o deslocamento transversal teórico ou de referência do ponto em estudo, w_t ; a razão w_s/w_t , onde w_s é o deslocamento encontrado no ponto em estudo utilizando o *software*; e a malha adotada. Em alguns Problemas, k é especificada nas Tabelas. Também é mostrada graficamente para cada Problema a convergência da solução, expressa em termos da razão w_s/w_t , em função das malhas de elementos finitos adotadas.

Para a representação das condições de borda das placas, foi adotada a convenção apresentada por Szilard (2004, p. xxiii), esquematizada na Figura 2.

Condição de borda	Seção	Vista de topo
Livre		
Simplemente apoiada		
Engastada		

Figura 2 – Condições de borda das placas. Fonte: adaptado de Szilard (2004).

3. Resultados e discussões

3.1 Problema 1: placa com quatro bordas simplesmente apoiadas

Timoshenko e Woynowsky-Krieger (1959, p. 318) apresentam soluções via Método das Diferenças Finitas para o deslocamento transversal do ponto central desta placa, esquematizada na Figura 3; a placa tem base ma e altura a do paralelogramo, e são analisadas as inclinações φ de 0° , 30° , 45° , 60° e 75° , sendo especificado $\nu = 0,2$. Os valores arbitrados para h , a , E e q no presente trabalho também constam na Figura 3, e os dados da constante m , do produto ma , e da constante k para cada um dos ângulos φ são fornecidos na Tabela 1. Com relação à convergência da solução para cada ângulo, na Figura 4 se observa que as malhas 40 x 40 forneceram resultados próximos daqueles obtidos com as malhas 20 x 20; entretanto, para $\varphi = 60^\circ$ esta proximidade é menor e a razão w_s/w_t para a malha 40 x 40 é a mais distante da unidade (0,8425). Análise complementar para este ângulo com malha mais densamente refinada, de 80 x 80 elementos finitos com NNM = 6561 e NEM = 6400, conduziu ao resultado $w_s/w_t = 0,8584$, verificando-se estabilidade da solução computacional. Uma possível causa da diferença entre este resultado pelo presente trabalho e a solução original é o uso de uma malha relativamente pouco refinada no Método das Diferenças Finitas.

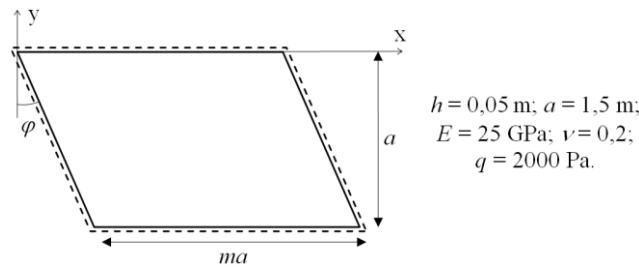


Figura 3 – Propriedades geométricas, propriedades físicas e carregamento do Problema 1 por Timoshenko e Woynowsky-Krieger. Fonte: o autor.

Tabela 1 – Dados e resultados do Problema 1 por Timoshenko e Woynowsky-Krieger. Fonte: o autor.

φ (°)	m	ma	A (m ²)	x_{centro} (m)	y_{centro} (m)	k	w_t (m)	w_s/w_t	Malha
0	2	3	4,5000	1,5000	-0,75	0,01013	-0,000378	1,0034	10 x 10
								1,0097	20 x 20
								1,0140	40 x 40
30	2,02	3,03	4,5450	1,9480	-0,75	0,01046	-0,0003904	0,9352	10 x 10
								0,9479	20 x 20
								0,9554	40 x 40
45	2	3	4,5000	2,2500	-0,75	0,00938	-0,0003501	0,9321	10 x 10
								0,9609	20 x 20
								0,9768	40 x 40
60	2	3	4,5000	2,7990	-0,75	0,00796	-0,0002971	0,7609	10 x 10
								0,8129	20 x 20
								0,8425	40 x 40
75	2	3	4,5000	4,2990	-0,75	0,00094	-0,00003509	0,9740	10 x 10
								1,0041	20 x 20
								1,0021	40 x 40

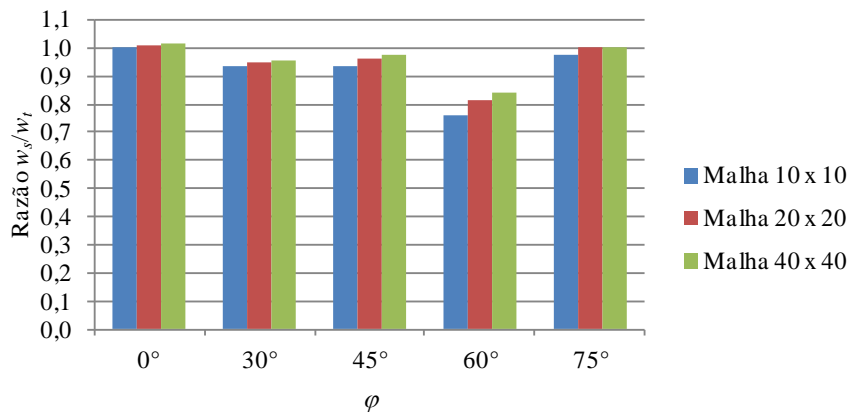


Figura 4 – Convergência da solução do Problema 1 por Timoshenko e Woynowsky-Krieger. Fonte: o autor.

Morley (1963, p. 78) trata caso semelhante, também via Método das Diferenças Finitas e analisando o deslocamento transversal do ponto central; porém, especifica que $\nu = 0,3$ e que as placas têm bordas de comprimentos iguais ($a = b$), e são considerados ângulos internos α de 90° , 80° , 60° , 50° , 40° e 30° . Os valores arbitrados no presente trabalho para h , a , E e q são mostrados na Figura 5. Quanto à convergência, na Tabela 2 e na Figura 6 se observa que as malhas 40 x 40 forneceram resultados mais próximos daqueles obtidos com as malhas 20 x 20 à medida que o ângulo α é maior; e para todos os casos, as razões

w_s/w_t são bem próximas da unidade com a malha 40 x 40. Grbac e Ribarić (2022, p. 239) analisam este Problema (somente $\alpha = 30^\circ$) com malha 1024 x 1024 de elementos finitos de três nós, no *software* Finite Element Analysis Program da Universidade da Califórnia em Berkeley (FEAP, 2024); empregam $a = b = 100$, $h = 1$, $E = 10,92$ e $q = 1$, e reportam uma diferença de 1,31% com relação ao resultado de Morley (1963).

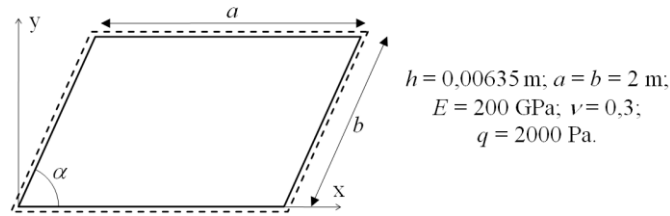


Figura 5 – Propriedades geométricas, propriedades físicas e carregamento do Problema 1 por Morley. Fonte: o autor.

Tabela 2 – Dados e resultados do Problema 1 por Morley. Fonte: o autor.

α (°)	A (m ²)	x_{centro} (m)	y_{centro} (m)	k	w_t (m)	w_s/w_t	Malha
90	4,0000	1,0000	1,0000	0,00406	-0,02770	0,9975	10 x 10
						1,0000	20 x 20
						1,0008	40 x 40
80	3,9392	1,1736	0,9848	0,00386	-0,02634	0,9980	10 x 10
						1,0014	20 x 20
						1,0025	40 x 40
60	3,4641	1,5000	0,8660	0,00254	-0,01733	0,9839	10 x 10
						0,9976	20 x 20
						1,0047	40 x 40
50	3,0642	1,6428	0,7660	0,00167	-0,01140	0,9737	10 x 10
						0,9992	20 x 20
						1,0165	40 x 40
40	2,5712	1,7660	0,6428	0,000922	-0,006291	0,9372	10 x 10
						0,9769	20 x 20
						1,0121	40 x 40
30	2,0000	1,8660	0,5000	0,000384	-0,002620	0,8947	10 x 10
						0,9451	20 x 20
						1,0068	40 x 40

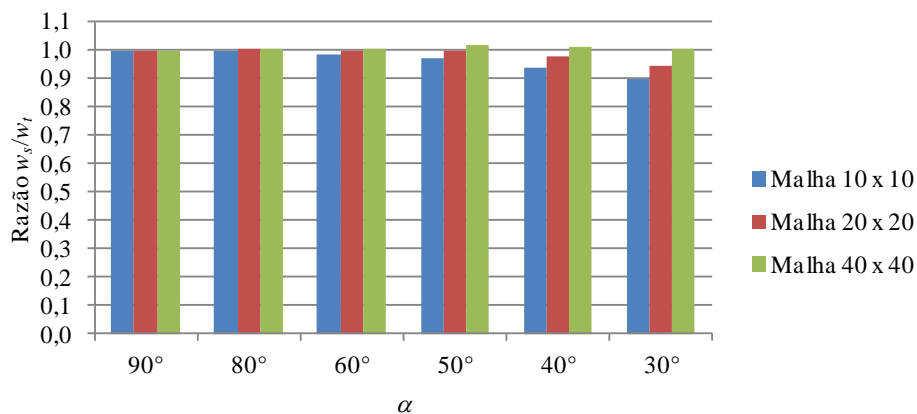


Figura 6 – Convergência da solução do Problema 1 por Morley. Fonte: o autor.

3.2 Problema 2: placa com duas bordas opostas simplesmente apoiadas e duas bordas opostas livres

Este caso, tratado por Timoshenko e Woynowsky-Krieger (1959, p. 318), difere-se do Problema 1 pela ausência de apoios nas duas bordas opostas de extensão ma . São apresentadas soluções via Método das Diferenças Finitas para o deslocamento transversal do ponto central e também do ponto localizado na metade da borda livre, para $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ e 60° , e especificamente $\nu = 0,2$. Os valores arbitrados no presente trabalho para $h, a = 2$ m, E e q são mostrados na Figura 7; portanto, as coordenadas dos pontos localizados no centro das bordas analisadas são $x_{borda} = 1,5$ m e $y_{borda} = 0$ para $\varphi = 0^\circ, 45^\circ$ e 60° , e $x_{borda} = 1,44$ m e $y_{borda} = 0$ para $\varphi = 30^\circ$. Observa-se na Tabela 3 e na Figura 8 que para $\varphi = 60^\circ$ e malha 40×40 , para o ponto localizado na metade da borda livre a razão w_s/w_t ficou ligeiramente mais elevada que as demais (1,0457), e para $\varphi = 30^\circ$ as razões w_s/w_t são as mais baixas, mesmo para as malhas 40×40 , tanto para o ponto central (0,9700) quanto para o ponto localizado na metade da borda livre (0,9669); tal como feito no Problema 1 por Timoshenko e Woynowsky-Krieger, análise com malha 80×80 demonstrou estabilidade da solução computacional do presente trabalho, pois conduziu a resultados 1,0634, 0,9729 e 0,9699, respectivamente. Também aqui o motivo das diferenças pode estar relacionado com o refino da malha pelo Método das Diferenças Finitas. Grbac e Ribarić (2022, p. 245) propõem que soluções obtidas utilizando *software* de elementos finitos com malhas densas sejam tomadas como referência, em contraponto às soluções obtidas com outros métodos numéricos.

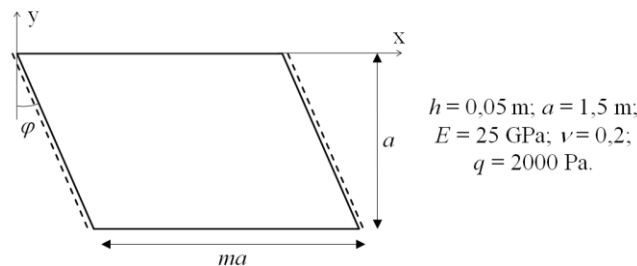


Figura 7 – Propriedades geométricas, propriedades físicas e carregamento do Problema 2 por Timoshenko e Woynowsky-Krieger. Fonte: o autor.

Tabela 3 – Dados e resultados do Problema 2 por Timoshenko e Woynowsky-Krieger. Fonte: o autor.

φ (°)	m	A (m ²)	x_{centro} (m)	y_{centro} (m)	k ponto central; k borda	w_t ponto central; w_t borda (m)	w_s/w_t ponto central	w_s/w_t borda	Malha
0	2	4,5	1,5000	-0,75	0,214; 0,224	-0,007988; -0,008361	0,9745	0,9721	10 x 10
							0,9871	0,9844	20 x 20
							0,9903	0,9877	40 x 40
30	1,92	4,32	1,8730	-0,75	0,1183; 0,1302	-0,004416; -0,004860	0,9435	0,9418	10 x 10
							0,9630	0,9599	20 x 20
							0,9700	0,9669	40 x 40
45	2	4,5	2,2500	-0,75	0,0708; 0,0869	-0,002643; -0,003244	0,9518	0,9656	10 x 10
							0,9886	0,9938	20 x 20

							1,0031	1,0067	40 x 40
							0,8910	0,9507	10 x 10
60	2	4,5	2,7990	-0,75	0,0186; 0,0396	-0,0006942; -0,001478	0,9609	1,0151	20 x 20
							0,9926	1,0457	40 x 40

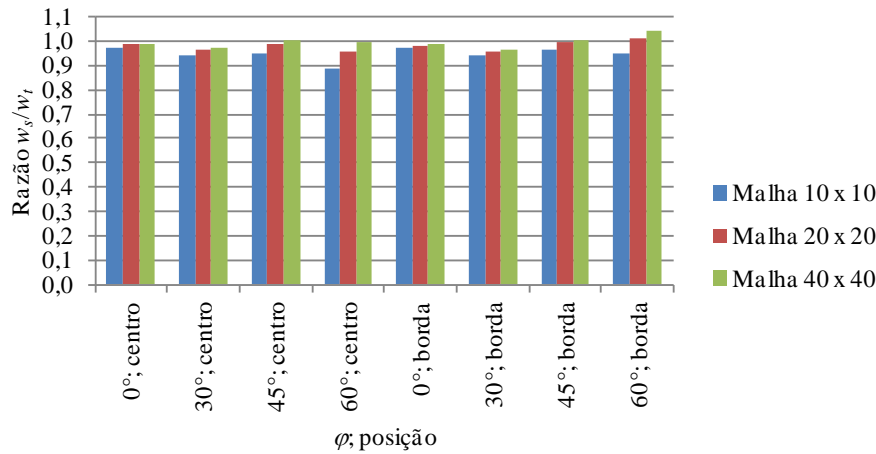


Figura 8 – Convergência da solução do Problema 2 por Timoshenko e Woynowsky-Krieger. Fonte: o autor.

Razzaque (1973, p. 337) trata placa semelhante, porém apenas para $\alpha = 60^\circ$ e somente o deslocamento transversal do ponto central é analisado; além disso, especifica que as bordas têm mesmo comprimento $a = b$, e $\nu = 0,31$. As condições de borda e os valores arbitrados no presente trabalho para h , $a = b$, E e q são mostrados na Figura 9. Para o cálculo do deslocamento transversal do ponto central da placa, são reportados dois valores de k (Razzaque, 1973, p. 338): 0,007945, referente à análise via Método das Diferenças Finitas; e 0,00785, referente ao emprego do elemento finito triangular “A-9” com nove graus de liberdade e desenvolvido com derivadas “suavizadas”, sendo utilizada uma malha estruturada de 4×6 ($\times 2$) = 48 elementos finitos triangulares. No presente trabalho, foi adotado $k = 0,00785$ como referência, e como pode ser observado na Tabela 4 e na Figura 10, a razão w_s/w_t é próxima da unidade já para a malha 20 x 20, e a razão obtida com a malha 40 x 40 é ligeiramente superior. Grbac e Ribarić (2022, p. 243) também analisam esta placa, conforme exposto no Problema 1, e reportam uma diferença de 0,42% com relação ao resultado de Razzaque (1973).

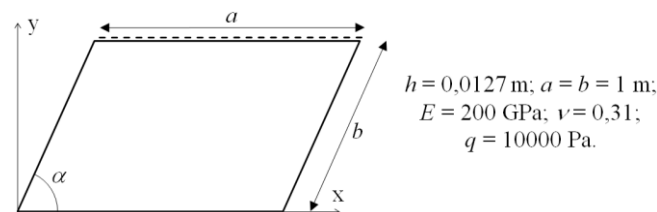


Figura 9 – Propriedades geométricas, propriedades físicas e carregamento do Problema 2 por Razzaque. Fonte: o autor.

Tabela 4 – Dados e resultados do Problema 2 por Razzaque com $k = 0,00785$. Fonte: o autor.

A (m ²)	x_{centro} (m)	y_{centro} (m)	w_t (m)	w_s/w_t	Malha
				0,9854	10 x 10
0,8660	0,75	0,4330	-0,002078	1,0056	20 x 20
				1,0115	40 x 40

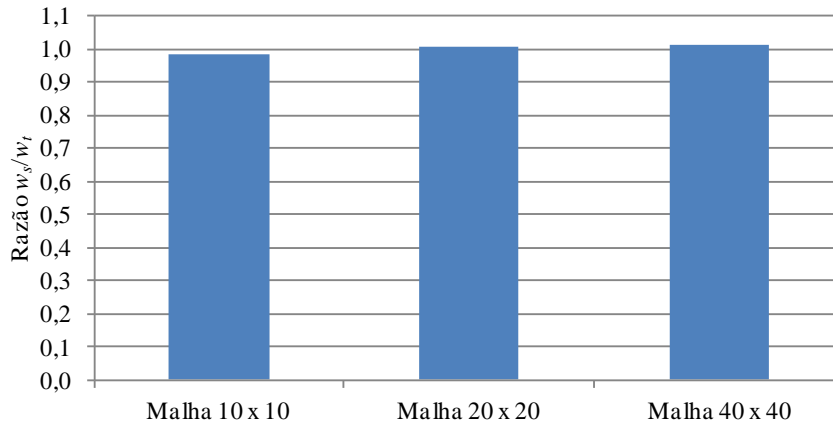


Figura 10 – Convergência da solução do Problema 2 por Razaque com $k = 0,00785$. Fonte: o autor.

3.3 Problema 3: placa com quatro bordas engastadas

Morley (1963, p. 113) resolve analiticamente este caso via expansão em série trigonométrica infinita simples para a solução da equação diferencial da placa em coordenadas oblíquas. Constantes k para o cálculo do deslocamento transversal do ponto central, apresentadas na Tabela 5, são reportadas para ângulos internos $\alpha = 45^\circ, 60^\circ$ e 75° e razões entre os comprimentos das bordas $a/b = 1; 1,25; 1,5; 2$. Valores arbitrados no presente trabalho para h, a, E, ν e q são mostrados na Figura 11. Observa-se na Tabela 5 e na Figura 12 boa proximidade com a unidade das razões w_s/w_t , sendo mais afastadas para os casos $a/b = 1,25$ e $\alpha = 60^\circ$ (0,9861), e $a/b = 2$ e $\alpha = 45^\circ$ (1,0254), em ambos os casos com malha 40 x 40. Tomando por base análises feitas no Ansys com malhas 80 x 80 de elementos finitos quadrilaterais lineares de casca, são propostas constantes k para o cálculo do deslocamento transversal do ponto central desta placa, especificadas na Tabela 6, para os casos $\alpha = 60^\circ$ e $a/b = 1, \alpha = 45^\circ$ e $a/b = 1, \alpha = 45^\circ$ e $a/b = 1,25$, não presentes na literatura citada. Nesta Tabela, também constam para cada caso a área e as coordenadas do ponto central da placa.

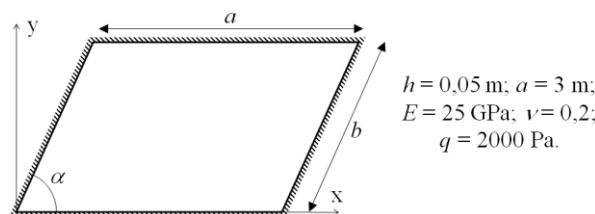


Figura 11 – Propriedades geométricas, propriedades físicas e carregamento do Problema 3. Fonte: o autor.

Tabela 5 – Dados e resultados do Problema 3. Fonte: o autor.

α (°)	a/b	A (m ²)	x_{centro} (m)	y_{centro} (m)	k	w_t (m)	w_s/w_t	Malha
75	1	8,6933	1,8882	1,4489	1,792	-0,0006689	0,9991	10 x 10
							1,0056	20 x 20

							1,0072	40 x 40
							0,9977	10 x 10
1,25	6,9547	1,8106	1,1591	1,057	-0,0003945	1,0046	20 x 20	
							1,0064	40 x 40
							0,9977	10 x 10
1,5	5,7956	1,7588	0,9659	0,612	-0,0002284	1,0060	20 x 20	
							1,0082	40 x 40
							0,9948	10 x 10
2	4,3467	1,6941	0,7244	0,222	-0,00008286	1,0083	20 x 20	
							1,0118	40 x 40
							0,9753	10 x 10
1,25	6,2354	2,1000	1,0392	0,734	-0,0002740	0,9838	20 x 20	
							0,9861	40 x 40
							0,9948	10 x 10
60	1,5	5,1962	2,0000	0,8660	0,411	-0,0001534	1,0047	20 x 20
							1,0074	40 x 40
							0,9962	10 x 10
	2	3,8971	1,8750	0,6495	0,145	-0,00005412	1,0124	20 x 20
							1,0165	40 x 40
							0,9739	10 x 10
	1,5	4,2426	2,2071	0,7071	0,197	-0,00007353	0,9858	20 x 20
							0,9894	40 x 40
45							0,9991	10 x 10
	2	3,1820	2,0303	0,5303	0,0652	-0,00002434	1,0203	20 x 20
							1,0254	40 x 40

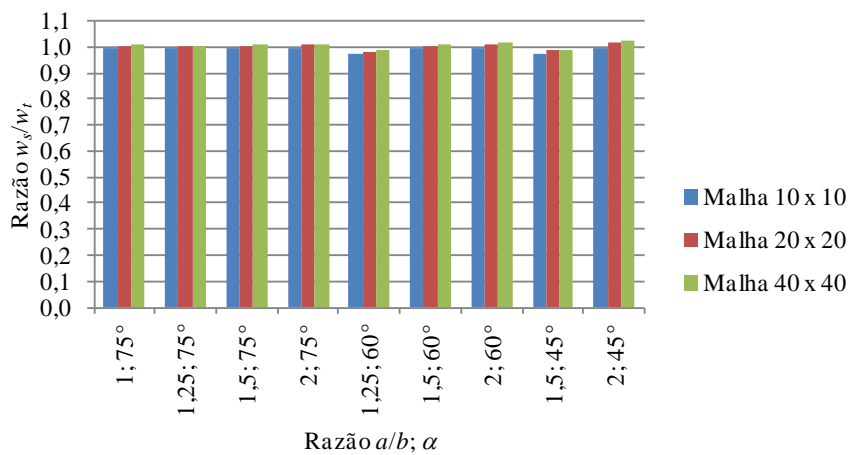


Figura 12 – Convergência da solução do Problema 3. Fonte: o autor.

Tabela 6 – Constantes *k* propostas para o Problema 3. Fonte: o autor.

Caso	A (m ²)	x _{centro} (m)	y _{centro} (m)	k
α = 60° e a/b = 1	7,7942	2,2500	1,2990	1,237
α = 45° e a/b = 1	6,3640	2,5607	1,0607	0,608
α = 45° e a/b = 1,25	5,0912	2,3485	0,8485	0,350

3.4 Problema 4: placa com uma borda engastada e três bordas livres

Morley (1963, p. 61) apresenta soluções para os deslocamentos transversais dos cantos A e B desta placa, localizados nos encontros das bordas livres, apenas para o caso em que as bordas têm o mesmo comprimento $a = b$, e para o ângulo interno α assumindo valores entre 30° e 90° , conforme esquematizado na Figura 13, onde constam também os valores arbitrados no presente trabalho para h , $a = b = 0,4572$ m, E , ν e q , do que se depreende que para todos os ângulos α as coordenadas do canto A são $x_A = 0,4572$ m e $y_A = 0$. Para o ângulo $\alpha = 90^\circ$, os resultados do canto B são os mesmos do canto A, e por este motivo não constam na Tabela 7. Dois conjuntos de constantes k são fornecidos através de um ábaco: aqueles obtidos analiticamente por Morley (1963), a partir da minimização da energia potencial através do cálculo variacional e da consideração de eixos referenciais oblíquos, para $30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$; e valores discretos para $\alpha = 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$ e 90° , reportados como obtidos experimentalmente por Williams (1950 *apud* Morley, 1963, p. 65). Os valores aproximados de k do ábaco por Morley para $90^\circ, 70^\circ, 50^\circ$ e 30° são, respectivamente, 0,125, 0,0931, 0,0487 e 0,0130 para o canto A, e 0,125, 0,131, 0,0914 e 0,0308 para o canto B. Os valores aproximados de k por Williams foram adotados como referência no presente trabalho, e constam na Tabela 7. Todos os valores discretos e aproximados de k são ilustrados na Figura 14, onde se procurou manter o formato do ábaco original. Quanto à convergência da solução, observa-se na Tabela 7 e na Figura 15 que somente para o caso $\alpha = 90^\circ$ e canto A a razão w_s/w_t melhor se aproximou da unidade, com as três malhas; e para os casos $\alpha = 70^\circ$ e canto A, $\alpha = 90^\circ$ e canto A, e $\alpha = 70^\circ$ e canto B os resultados obtidos com as três malhas foram praticamente idênticos. Os casos $\alpha = 30^\circ$ e canto A, e $\alpha = 30^\circ$ e canto B, apresentaram as menores razões w_s/w_t mesmo para a malha 40×40 , respectivamente 0,8996 e 0,9095; análise com malha 80×80 conduziu aos resultados 0,9076 para o canto A e 0,9173 para o canto B, indicando estabilidade da solução computacional. Morley atribui a diferença de seus resultados com relação aos de Williams pelo fato de ter adotado uma função relativamente simples para os deslocamentos; propõe o emprego de uma função mais completa, mas não apresenta os resultados correspondentes (Morley, 1963, p. 66). A diferença entre os resultados do presente trabalho e os de Williams pode estar relacionada com a qualidade e a precisão dos instrumentos de medição durante o procedimento experimental, ou ainda com a efetividade das condições de apoio e/ou de carregamento.

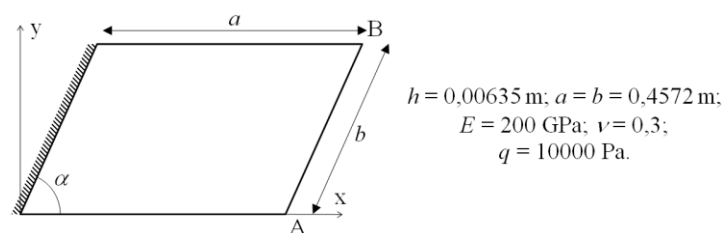


Figura 13 – Propriedades geométricas, propriedades físicas e carregamento do Problema 4. Fonte: o autor.

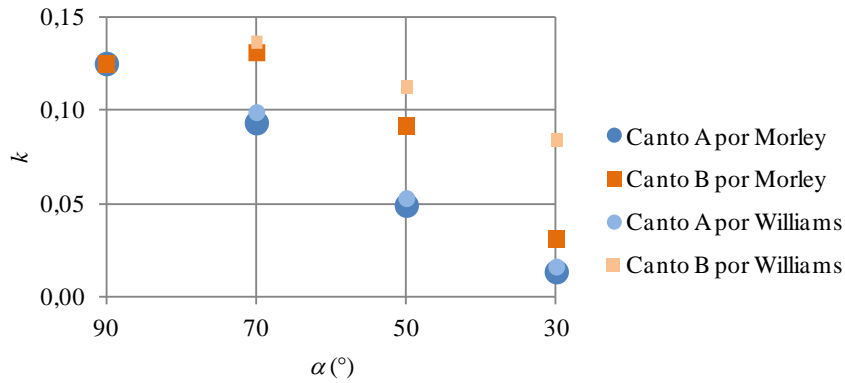


Figura 14 – Constantes k do Problema 4. Fonte: adaptado de Morley (1963, p. 66).

Tabela 7 – Dados e resultados do Problema 4 com k por Williams. Fonte: o autor.

α (°)	A (m ²)	Canto A			Canto B		Malha
		k ; w_t (m)	w_s/w_t	x_B (m)	y_B (m)	k ; w_t (m)	
30	0,1045	0,0157; -0,001463	0,8573	0,8531	0,2286	0,0842; -0,007845	0,8625 10 x 10
			0,8862				0,8941 20 x 20
			0,8996				0,9095 40 x 40
50	0,1601	0,0525; -0,004892	0,9364	0,7511	0,3502	0,113; -0,010529	0,9453 10 x 10
			0,9430				0,9504 20 x 20
			0,9460				0,9534 40 x 40
70	0,1964	0,0987; -0,009196	0,9605	0,6136	0,4296	0,137; -0,012765	0,9504 10 x 10
			0,9631				0,9510 20 x 20
			0,9641				0,9516 40 x 40
90	0,2090	0,125; -0,011647	1,0168	—	—	—	10 x 10
			1,0180	—	—	—	20 x 20
			1,0185	—	—	—	40 x 40

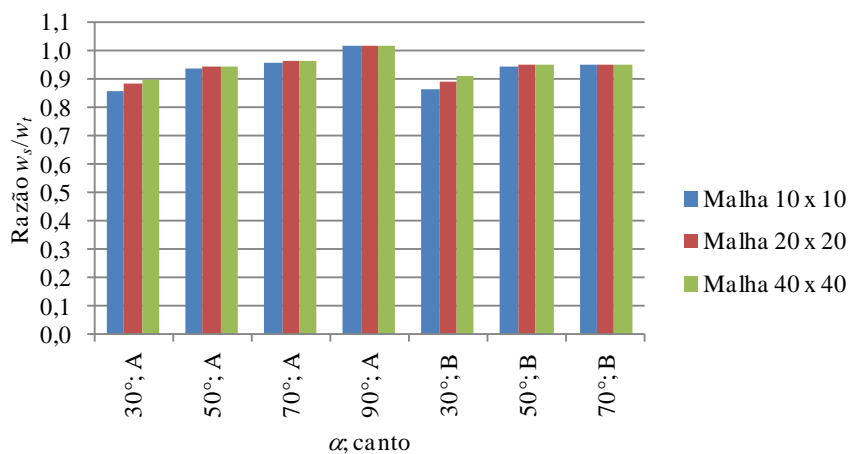


Figura 15 – Convergência da solução do Problema 4 com k por Williams. Fonte: o autor.

4. Conclusões

De maneira geral, os resultados obtidos com malhas de 40 x 40 elementos finitos superficiais tridimensionais quadrilaterais de mesmo formato e tamanho no Ansys

tiveram boa concordância com aqueles disponíveis na literatura; porém, nos casos onde a razão entre o valor encontrado com o *software* e o valor teórico ou de referência de deslocamento transversal das placas teve um afastamento relativamente maior da unidade, simulações adicionais foram feitas com malhas mais densas de 80 x 80 elementos e se observou estabilidade da solução computacional, e foram discutidos possíveis motivos para as diferenças encontradas, em que pese serem desconhecidas certas condições originais como tamanhos de malhas de diferenças finitas ou equipamentos usados em análise experimental. Para a placa com quatro bordas engastadas foram propostas soluções para três casos de inclinações e razões entre as dimensões das bordas que não constam na literatura citada, baseadas em análises feitas com malhas 80 x 80. O trabalho terá sequência com a análise de placas esconsas sob carga concentrada transversal, e de tensões máximas nas placas esconsas. Também é desejável que os Problemas ora tratados sejam analisados com um elemento finito triangular de placa, ou mesmo quadrilateral, desenvolvido em código próprio.

Referências

- Ansys, Inc.** *Ansys Help*. Canonsburg, Pennsylvania, 2024. Disponível em: https://ansyshelp.ansys.com/public/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v242/en/ans_elem/Hlp_E_SHELL181.html?q=shell181. Acesso em: 24 set. 2024.
- FEAP.** *A Finite Element Analysis Program*. Berkeley, Califórnia, 2024. Disponível em: <http://projects.ce.berkeley.edu/feap/>. Acesso em: 24 set. 2024.
- GRBAC, M.; RIBARIĆ, D.** *Accurate numerical solutions for standard skew plate benchmark problems*. Proceedings of Faculty of Civil Engineering, Rijeka, Croatia, v. 25, n. 1, p. 237-246, 2022.
- LEE, H.** *Finite element simulations with ANSYS Workbench 2023: theory, applications, case studies*. Mission, Kansas: SDC Publications, 2023.
- MORLEY, L. S. D.** *Skew plates and structures*. New York: Macmillan, 1963.
- RAZZAQUE, A.** *Program for triangular bending elements with derivative smoothing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 6, n. 3, p. 333-343, 1973.
- SRINIVASA, C. V.; SURESH, Y. J.; PREMA KUMAR, W. P.** Experimental and finite element studies on free vibration of skew plates. International Journal of Advanced Structural Engineering, v. 6, n. 48, 2014.
- SZILARD, R.** *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*. New York: John Wiley & Sons, 2004.
- TIMOSHENKO, S. P.; WOYNOWSKY-KRIEGER, S.** *Theory of plates and shells*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.