

ANÁLISE ANALÍTICA E NUMÉRICA DO MOMENTO CRÍTICO ELÁSTICO DE VIGAS DE AÇO DE PERFIL I

Guilherme Francyan Teixeira Alves (Universidade Federal de Rondônia) E-mail:

guilhermefrancyan@gmail.com

Victória Geovana Hollanda do Amaral (Universidade Federal de Rondônia) E-mail:

victoriahollanda17@gmail.com

Pedro Ignácio Lima Gadêlha Jardim (Universidade Federal de Rondônia) E-mail:

eng.pedrojardim@gmail.com

André Luis Christoforo (Universidade Federal de São Carlos) E-mail: alchristoforo@ufscar.br

Diego Henrique de Almeida (Universidade Federal de Rondônia) E-mail: diegoalmeida@unir.br

Resumo: A flambagem em vigas submetidas à flexão reta simples é avaliada pelo momento crítico elástico (Mcr). No entanto, as equações normativas e da literatura exigem diversas propriedades físico-geométricas, que variam conforme o perfil adotado. Uma alternativa eficiente para essa análise é o método dos elementos finitos (MEF), que oferece precisão e praticidade em estudos numéricos complexos. O presente trabalho avaliou a precisão na obtenção do Mcr em vigas de aço de perfil I biapoiadas submetidas à flexão reta simples, comparando métodos analíticos e numéricos. O Mcr representa o momento máximo suportado antes da instabilidade. Para a análise via MEF, foram realizadas 32 simulações com elementos de casca. A malha adotada foi de 10 mm, garantindo baixo erro e tempo de processamento eficiente. A média dos erros foi de 2,70%, indicando alta confiabilidade nos resultados. Entre os parâmetros analisados, o comprimento da viga foi o que causou maior impacto no Mcr. Os valores obtidos numericamente foram consistentes com os cálculos analíticos presentes no documento normativo brasileiro, demonstrando a eficácia do uso dessas equações. O estudo reforça a aplicabilidade desse método na análise estrutural de vigas de aço, proporcionando uma abordagem precisa e confiável para avaliar a flambagem.

Palavras-chave: Flambagem elástica, vigas de aço, simulação numérica; momento crítico elástico.

ANALYTICAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF THE ELASTIC CRITICAL MOMENT OF I-SECTION STEEL BEAMS.

Abstract: Buckling in beams subjected to simple straight bending is evaluated by the elastic critical moment (Mcr). However, the normative equations and those in the literature require various physical-geometric properties, which vary according to the profile adopted. An efficient alternative for this analysis is the finite element method (FEM), which offers precision and practicality in complex numerical studies. This study evaluated the accuracy of obtaining the Mcr in bi-axial I-profile steel beams subjected to simple straight bending, comparing analytical and numerical methods. The Mcr represents the maximum moment supported before instability. For the FEM analysis, 32 shell element simulations were carried out. The mesh size adopted was 10 mm, ensuring low error and efficient processing time. The average error was 2.70%, indicating high reliability of the results. Among the parameters analyzed, the length of the beam had the greatest impact on the Mcr. The values obtained numerically were consistent with the analytical calculations in the Brazilian standards document, demonstrating the effectiveness of using these equations. The study reinforces the applicability of this method in the structural analysis of steel beams, providing an accurate and reliable approach to assessing buckling.

Keywords: Elastic buckling, steel beams, numerical simulation; elastic critical moment.

1. Introdução

Em elementos de vigas submetidas à flexão reta simples, solicitação usualmente encontrada em projetos de estruturas de aço para esses elementos, a ocorrência da flambagem é verificada pela determinação do momento crítico elástico na peça. O fenômeno da instabilidade, também chamado de flambagem, mais comumente observado em elementos de casca fina como nas vigas em aço, é um fator de atenção em projetos, podendo ocasionar a perda da estabilidade dos componentes da seção transversal antes da plastificação e contribuir para o colapso global (GOMES, 1993; ROSSI, 2018).

A flambagem global ocorre por meio da flambagem lateral por torção, tendo como sua característica combinações de deslocamentos laterais, enquanto a instabilidade local ocorre isoladamente nos elementos da seção transversal (alma e mesa), sendo denominado de flambagem local na alma e flambagem local na mesa (GOMES, 1993).

Segundo Fakury, Silva e Caldas (2016), se desconsiderar as imperfeições geométricas iniciais, a translação lateral e torção podem ser analisadas pela teoria clássica da flambagem. Quando o momento fletor de colapso é atingido, ocorre o estado-limite último chamado de flambagem lateral com torção (Figura 1).

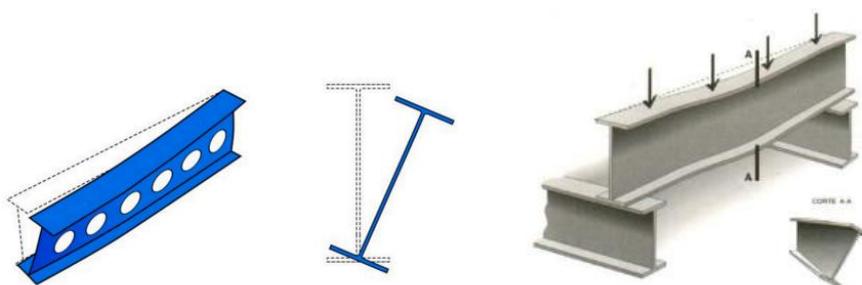


Figura 1-Flambagem Lateral com torção.

Fonte: (CARVALHO *et al.*, 2023; SOUZA, 2009)

O momento crítico elástico (M_{cr}) é o momento fletor máximo que uma viga pode resistir antes que aconteça a FLT ou outro modo de instabilidade da viga (LOPES, COUTO, LOPES, 2017). Esse comportamento é descrito no documento normativo brasileiro ABNT NBR 8800 (2024) onde é apresentado um método para sua verificação. Entretanto, o documento normativo europeu, a Eurocode 3 (CEN,2005), não fornece a providência para o cálculo do momento crítico elástico em vigas de aço (CARVALHO *et al.*, 2023; LOPES *et al.*, 2016).

Uma possível alternativa para a realização das análises de flambagem é a utilização de ferramentas computacionais numéricas com implementação do método dos elementos finitos (MEF), onde é realizada a modelagem do elemento analisado e o programa realiza o processamento para obtenção dos modos de flambagem. Sendo assim, uma investigação sobre a aplicabilidade e a precisão do uso de ferramentas computacionais com MEF para análise da flambagem em vigas de aço pode contribuir para a diminuição dos erros de projeto e uma análise mais detalhada desse fenômeno.

Diante do exposto, esse trabalho teve como objetivo analisar a precisão da obtenção do momento crítico elástico (M_{cr}) de vigas de aço submetidas à flexão simples reta por meio de métodos analítico e numérico e verificar a influência das dimensões do perfil I no cálculo do M_{cr} .

2. Materiais e Métodos

Esta pesquisa foi realizada por meio de simulação numérica através do método dos elementos finitos, sendo realizado um estudo paramétrico para melhor compreensão da influência das propriedades físico-geométricas de vigas de aço na previsão do M_{cr} . Para o cálculo do momento crítico fornecido pela ABNT NBR 8800 (2024).

Após o processamento de todas as vigas, foi realizada a análise dos valores dos momentos críticos elásticos que foram obtidos através do processamento no software e comparados com os cálculos realizados de maneira analítica do M_{cr} por meio do *software* Microsoft Excel. Para a determinação do M_{cr} de vigas de seção I e H duplamente simétricas, fletidas em relação ao eixo de maior inércia, deve ser empregada a Equação 1 para o cálculo do M_{cr} da FLT. Essa equação é fornecida pela ABNT NBR 8800 (2024) no anexo G.

$$M_{cr} = \frac{C_b \pi E I_y}{L^2 b} \sqrt{\frac{C_w}{I_y} \left(1 + 0,039 \frac{J L^2 b}{C_w}\right)} \quad (1)$$

Foram adotados diferentes modelos de vigas para verificar o momento crítico elástico através da simulação numérica. O comprimento das vigas utilizados foram de 4000 mm e 8000 mm. As alturas da alma foram de 337 mm e 575 mm. As larguras da mesa consistiram em 140 mm e 220 mm. A espessura da alma de 4,75 mm e 8,00 mm, e a espessura da mesa foi de 6,3 mm e 12,5 mm. Os valores adotados representam dimensões usuais em projetos de estruturas de aço e foram obtidos nas tabelas apresentadas por Fakury, Silva e Caldas (2016). Esses parâmetros foram combinados, resultando na elaboração de 32 modelos.

Para realizar a identificação das vigas, foi atribuído um código alfanumérico para cada uma. O código foi dividido em 4 partes, sendo a primeira informado o tipo de aço com o início A, como o utilizado foi o aço 572, a primeira parte do código consiste em A572. A segunda parte informa a altura da alma acrescido da espessura da alma, representada pelas letras A e B. Caso seja a letra A, significa 4,75 mm de espessura de alma, e B para 8,00 milímetro. Sendo assim para informar uma altura da alma de 337 mm, com uma espessura da alma de 4,75 mm, a segunda parte do código será 337A. A terceira parte foi similar com a segunda, entretanto, essa parte informa a largura da mesa, acrescido das letras A e B representando a espessura da mesa. Sendo A para 6,3 mm e B para 12,5 mm. No caso de uma largura da mesa de 140 mm com uma espessura de 12,5 milímetro, a terceira parte do código será 140B. A última parte do código informa o comprimento total da viga: 4000 mm ou 8000 mm.

Sendo assim uma viga do estudo com comprimento de 4000 mm, altura da alma de 337 mm, espessura de 4,75 mm. Largura da mesa de 140 mm e espessura da mesa de 6,3 mm, o código será A572-337A-140A-4000. Conforme detalhado pela Figura 2.



Figura 2-Modelo de código para identificação de vigas

A viga utilizada para realizar a validação do modelo numérico, apresentada na Figura 3, consistiu em uma viga de 4000 mm de comprimento (L), largura da mesa (bf) de 140 mm e espessura (tf) de 6,3 mm, com altura da alma (h) de 337 mm e espessura (tw) de 4,5 mm. O aço adotado possui um módulo de elasticidade (E) de 200 GPa.

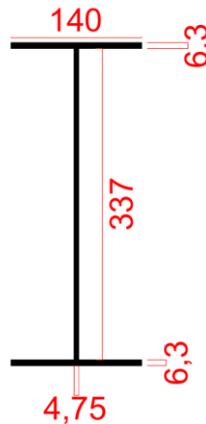


Figura 3-Seção transversal da viga utilizada (medidas em mm)

Para a viga de validação, o momento de inércia na direção X (I_x) e na direção Y (I_y) e inércia polar (J) são, respectivamente: $6712,95 \text{ cm}^4$, $288,42 \text{ cm}^4$, $3,56 \text{ cm}^4$. O módulo de resistência elástico (W_c) de $384,04 \text{ cm}^3$, uma constante de empenamento de seção transversal (C_w) de $84979,56 \text{ cm}^4$. E com fator de multiplicação para momento fletor não-uniforme (C_b) de 1.

Inicialmente, foi elaborado um modelo com elementos finitos de 100 mm para validação. Isso se deu pelo rápido processamento devido uma configuração de malha maior. Posteriormente, foi realizado um teste de malha para verificar o efeito do refinamento dos elementos finitos adotados na capacidade de previsão do M_{cr} .

O teste de malha consiste em realizar diversas simulações variando o tamanho da malha. No caso do presente estudo, o tamanho, em milímetros, das malhas analisadas foram as seguintes: 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 25, 20, 15, 10 e 5.

Em seguida, foi necessário observar o erro do modelo numérico em relação aos valores obtidos por meio analíticos. A Equação 2 apresenta o cálculo para obtenção do erro percentual da simulação numérica.

$$\text{Erro}(\%) = \frac{M_{crAbaqus}}{M_{crNorma}} - 1 \quad (2)$$

3. Análise dos resultados

3.1 Validação do modelo numérico

Inicialmente foi realizada a validação do modelo numérico utilizando uma viga de 4000 mm de comprimento, 337 mm da altura da alma, largura da mesa de 140 mm, espessura de 6,3 mm e espessura da alma de 4,75 mm, código A572-337A-140A-4000. O teste inicial adotou uma malha pré-definida de 100 milímetros (Figura 4).

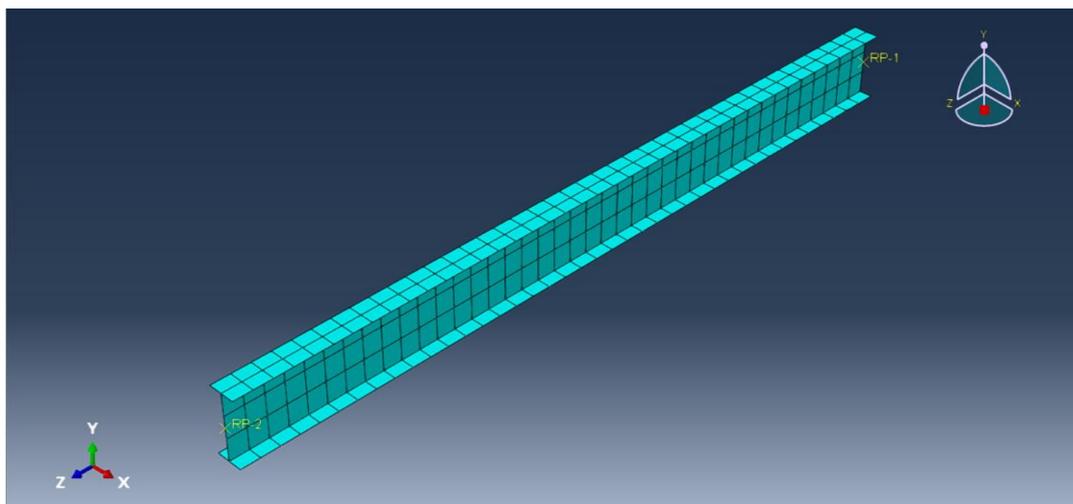


Figura 4- Malha de 100 milímetros

O resultado do momento crítico obtido através da simulação na viga apresentada na Figura 4 foi de 58,5 kN.m. O valor do M_{cr} encontrado por meio analítico, através da Equação 1, foi de 68,6 kN.m. A diferença encontrada foi de 14,73%, sendo realizado um teste de malha para otimização deste valor. A Tabela 2 apresenta os valores de momento crítico do teste de malha realizado para cada tamanho de malha. É possível observar que o erro em relação ao cálculo estabelecido em norma foi reduzido conforme a malha foi refinada.

Tabela 1 – Pesquisa qualitativa *versus* pesquisa quantitativa

Tamanho malha (mm)	Momento crítico Simulação (kN.m)	Erro (%)	Tempo de processamento (s)
100	58,60	14,73	13
90	58,90	14,26	11
80	58,50	14,89	9
70	57,60	16,16	19
60	57,20	16,74	13
50	56,70	17,47	13
40	67,90	1,23	16
30	67,30	2,03	18
25	69,00	0,38	34
20	69,20	0,79	25
15	69,20	0,67	68
10	69,00	0,48	128
5	68,90	0,29	545

A Figura 5 apresenta a variação do tempo de processamento em função da variação da malha. Foi possível verificar que a partir da malha de 20 mm, o crescimento no tempo de duração do processamento cresce gradativamente à medida que o tamanho da malha é reduzido, tornando-se mais refinada. Apesar do tempo de duração do processamento prolongar-se à medida que a malha reduz, os valores tornam-se mais próximos conforme visto na

Tamanho malha (mm)	Momento crítico Simulação (kN.m)	Erro (%)	Tempo de processamento (s)
100	58,60	14,73	13
90	58,90	14,26	11

80	58,50	14,89	9
70	57,60	16,16	19
60	57,20	16,74	13
50	56,70	17,47	13
40	67,90	1,23	16
30	67,30	2,03	18
25	69,00	0,38	34
20	69,20	0,79	25
15	69,20	0,67	68
10	69,00	0,48	128
5	68,90	0,29	545

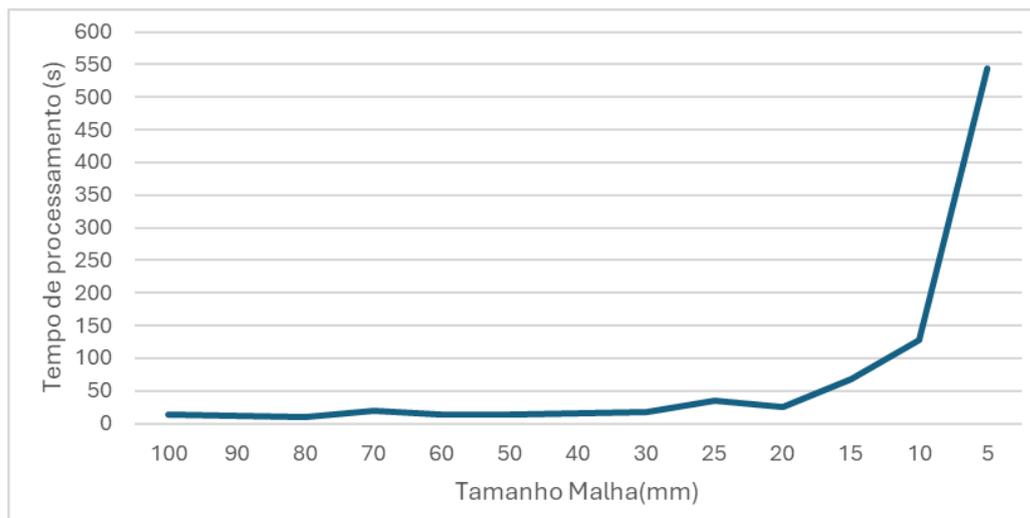


Figura 5-Tempo de processamento em função do tamanho da malha

Foi possível verificar que o resultado obtido através da simulação foi similar ao obtido de forma analítica, especialmente para os modelos com elementos finitos de 25 mm e menores. A Figura 6 apresenta o momento crítico das variações de malha comparados ao resultado obtido de forma analítica.

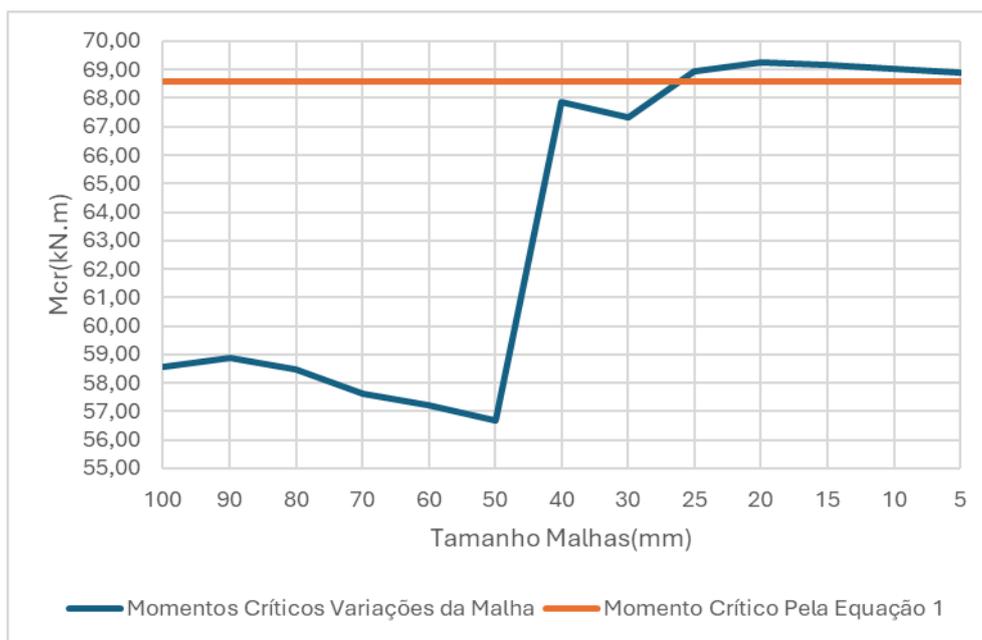


Figura 6-Variação de Mcr de acordo com a malha.

Sendo assim, o tamanho de malha escolhido foi o de 10 mm. Esse fato deve-se ao baixo erro encontrado e tempo de processamento considerado adequado para o prosseguimento deste estudo. A Figura 7 apresenta os resultados da malha de 10 mm utilizada na validação do modelo.

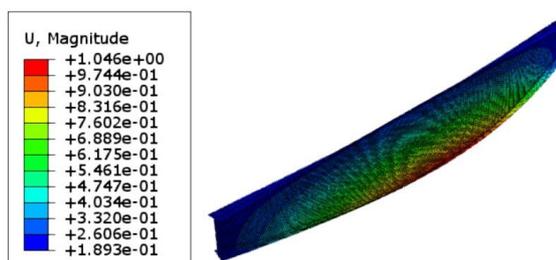


Figura 7-Modelo com malha de 10 mm.

3.2 Estudo paramétrico

Após o teste de malha e ajuste da simulação, deu-se início ao processo de simulação de todas as outras vigas previstas no estudo paramétrico. A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos. Foi possível observar que 29 das simulações apresentaram casos de flambagem lateral a torção, enquanto três vigas tiveram instabilidades locais, sendo uma flambagem local na mesa e duas flambagens locais tanto na alma quando na mesa.

Tabela 2 – Valores da simulação numérica e normativos

Viga Simulada	M _{cr} por simulação numérica (kN.m)	M _{cr} pela ABNT NBR 8800 (2024)	Tipo de Flambagem
A572-337A-140A-4000	69,028	68,60	FLT
A572-337A-140A-8000	22,05	21,80	FLT

A572-337A-140B-4000	152,00	161,00	FLT
A572-337A-140B-8000	56,89	60,00	FLT
A572-337A-220A-4000	206,90	-----	FLM/FLA
A572-337A-220A-8000	69,02	69,30	FLT
A572-337A-220B-4000	163,99	173,00	FLT
A572-337A-300B-8000	361,92	382,00	FLT
A572-337B-140A-4000	80,72	77,50	FLT
A572-337B-140A-8000	29,28	28,30	FLT
A572-337B-140B-4000	16,66	16,90	FLT
A572-337B-140B-8000	64,12	65,20	FLT
A572-337B-220A-4000	259,10	258,00	FLT
A572-337B-220A-8000	79,00	77,00	FLT
A572-337B-220B-4000	536,39	550,00	FLT
A572-337B-220B-8000	176,32	180,00	FLT
A572-575A-140A-4000	110,50	109,00	FLT
A572-575A-140A-8000	32,10	31,20	FLT
A572-575A-140B-4000	225,73	232,00	FLT
A572-575A-140B-8000	71,76	73,80	FLT
A572-575A-220A-4000	307,99	-----	FLM/FLA
A572-575A-220A-8000	107,99	108,00	FLT
A572-575A-220B-4000	61,79	-----	FLA
A572-575A-220B-8000	61,79	238,00	FLT
A572-575B-140A-4000	126,94	119,00	FLT
A572-575B-140A-8000	41,920	39,00	FLT
A572-575B-140B-4000	246,01	242,00	FLT
A572-575B-140B-8000	82,372	81,00	FLT
A572-575B-220A-4000	424,32	419,00	FLT
A572-575B-220A-8000	120,72	117,00	FLT
A572-575B-220B-4000	844,88	854,00	FLT
A572-575B-300B-8000	245,77	247,00	FLT

3.3 Análise dos casos de flambagem lateral com torção

Tendo em vista que a Equação 1 atende apenas casos de FLT nas vigas de aço. Os casos que apresentaram outros tipos de flambagem não puderam ser estudados através dessa equação. Sendo assim, a **Erro! Fonte de referência não encontrada.** apresenta as 29 vigas com casos de FLT, trazendo os erros da simulação em comparação ao que foi obtido de forma numérica. A Figura 8 apresenta uma comparação das vigas do valor de M_{cr} apresentado pelo Abaqus com os valores analíticos. Foi possível observar que a viga A572-575A-220A-8000, apresentada na

9, possui o menor erro em relação ao modelo numérico e ao modelo, seguidos pelos modelos A572-337A-220A-8000 e A572-337A-220A-8000.

Tabela 3 – Valores dos erros da simulação numérica

Viga simulada	Abaqus (kN.m)	NBR 8800 (2024) (kN.m)	Erro (%)
A572-337A-140A-4000	69,02	68,6	0,63
A572-337A-140A-8000	22,05	21,80	1,17
A572-337A-140B-4000	152,00	161,00	5,59
A572-337A-140B-8000	56,89	60,00	5,18
A572-337A-220A-8000	69,02	69,30	0,40
A572-337A-220B-4000	163,99	173,00	5,20
A572-337A-300B-8000	361,92	382,00	5,25
A572-337B-140A-4000	80,72	77,50	4,16

A572-337B-140A-8000	29,28	28,30	3,48
A572-337B-140B-4000	16,66	16,90	1,40
A572-337B-140B-8000	64,12	65,20	1,64
A572-337B-220A-4000	259,10	258,00	0,43
A572-337B-220A-8000	79,00	77,00	2,60
A572-337B-220B-4000	536,39	550,00	2,47
A572-337B-220B-8000	176,32	180,00	2,04
A572-575A-140A-4000	110,50	109,00	1,38
A572-575A-140A-8000	32,10	31,20	2,91
A572-575A-140B-4000	225,73	232,00	2,70
A572-575A-140B-8000	71,76	73,80	2,76
A572-575A-220A-8000	107,99	108,00	0,01
A572-575A-220B-8000	230,21	238,00	3,27
A572-575B-140A-4000	126,94	119,00	6,67
A572-575B-140A-8000	41,92	39,00	7,49
A572-575B-140B-4000	246,01	242,00	1,66
A572-575B-140B-8000	82,37	81,00	1,69
A572-575B-220A-4000	424,32	419,00	1,27
A572-575B-220A-8000	120,72	117,00	3,18
A572-575B-220B-4000	844,88	854,00	1,07
A572-575B-300B-8000	245,77	247,00	0,50

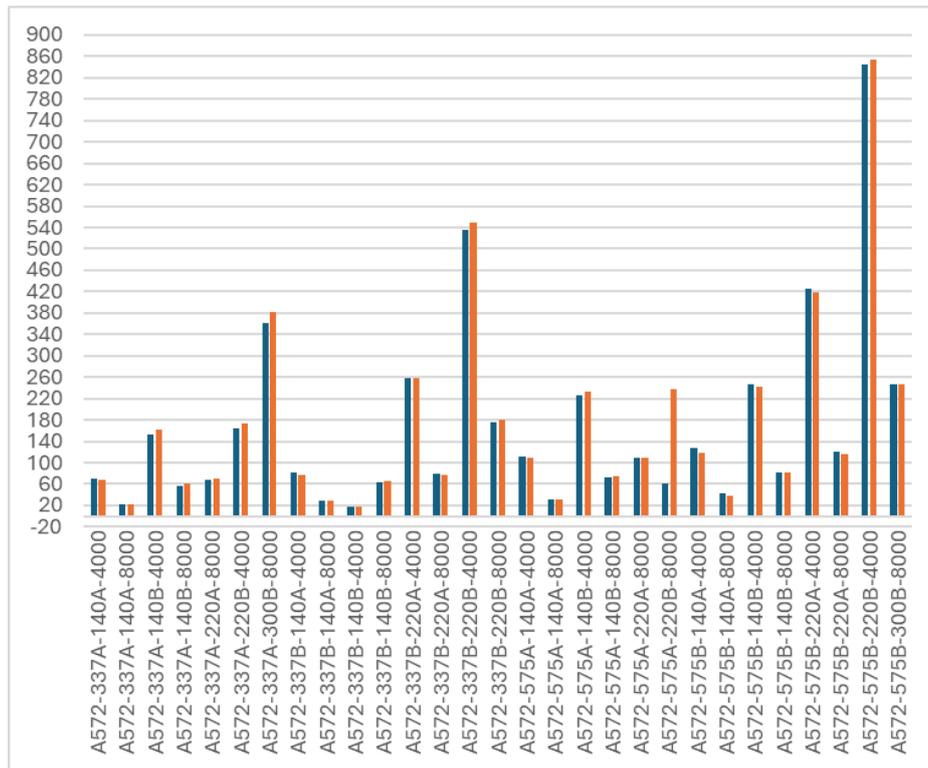


Figura 8 -Comparação de resultados do Mcr entre ABNT NBR 8800 (2024) dos casos de FLT

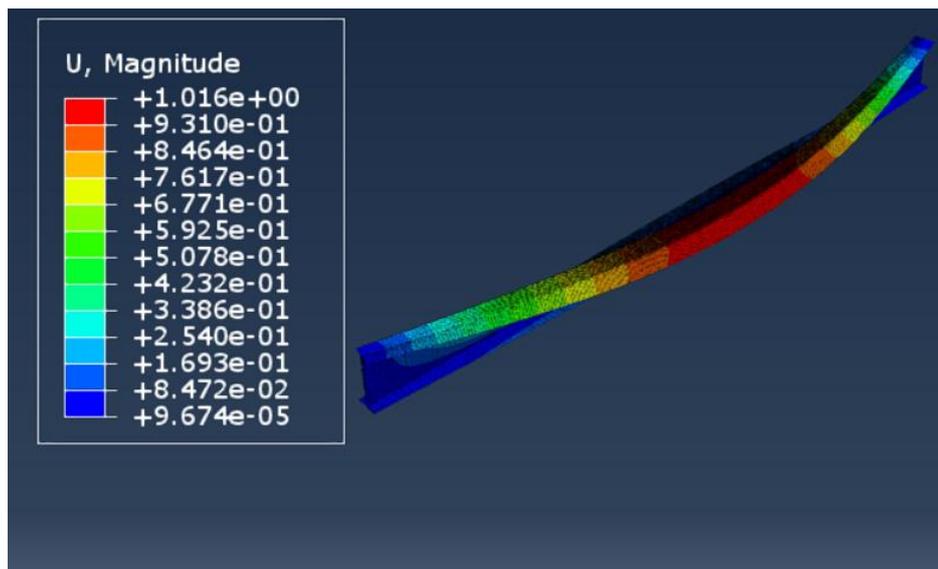


Figura 91- Viga A72-575A-220A-8000

Ao verificar a eficiência da simulação numérica de forma geral, foi calculada a média dos erros das simulações. O erro médio obtido nas simulações foi de 2,70%, sendo um valor pequeno para o erro geral. O desvio padrão médio encontrado foi de 0,019.

Leal *et al.* (2023), realizaram um trabalho que consistiu em comparar o M_{cr} de 6 perfis com condições de contornos similares a do presente estudo, utilizando vários softwares de simulações distintos. A média do erro encontrado de uma viga similar nesse trabalho foi de 0,44%, valor abaixo do encontrado nesse trabalho. Vale ressaltar que outros programas computacionais foram utilizados no estudo citado.

Para as vigas estudadas, o comprimento foi o único parâmetro, dentre analisados, que interferiu de forma perceptiva na obtenção do momento crítico elástico. Como pode ser observado nos modelos A572-337A-140A-4000 e A572-337A-140A-8000, embora apresentasse a mesma seção transversal, a viga com maior comprimento mostrou menores valores de M_{cr} . Podendo destacar que os valores do momento crítico elástico são inversamente proporcionais ao comprimento, como observado na Equação 1.

Para os demais parâmetros, não foi identificada uma influência direta na obtenção do M_{cr} , indicando que o profissional que deseja distanciar o ponto crítico do momento de projeto, e não pode modificar o comprimento da peça, deve realizar verificações que considerem as diversas variações geométricas do perfil. Sendo assim, é importante ressaltar a necessidade de estabelecer procedimentos para a determinação dos valores dos perfis utilizados em projetos.

4. Considerações finais

O presente estudo teve como objetivo validar o modelo numérico de uma viga de aço através da simulação numérica, além de realizar uma análise analítica e numérica do momento crítico elástico conforme a ABNT NBR 8800 (2024).

A validação numérica foi realizada com êxito. Além disso, em geral, os valores de momento crítico obtidos por meio das simulações numéricas foram próximos àqueles obtidos de forma analítica.

A verificação do estudo do refinamento de malha foi de extrema importância, pois através dele foi possível realizar as simulações e verificações de forma mais rápida, possibilitando que os resultados possuíssem erros aceitáveis.

Os resultados encontrados evidenciam a viabilidade da utilização do método dos elementos finitos para obtenção do M_{cr} nas vigas de aço analisadas. A utilização de um *software* facilita a obtenção desse ponto crítico, podendo os valores de diferenciadas vigas serem obtidos em questões de minutos, como no caso do presente estudo.

Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.** *NBR 8800: Projeto de Estruturas de aço e estruturas mistas de aço e concreto de edifícios.* Rio de Janeiro: ABNT, 2024.
- CARVALHO, A.S; MARTINS, C.H; ROSSI, A; OLIVEIRA, V.M; MORKHADE, S.G.** *Moment gradient factor for steel I-beams with sinusoidal web openings.* *Journal of Constructional Steel Research.* 2023.
- FAKURY, R.H; CASTRO E SILVA, A.L.R; CALDAS, R.B.** *Dimensionamento de Elementos Estruturais de Aço e Mistos de Aço e Concreto.* São Paulo: Pearson Education do Brasil. 2016.
- GOMES, O. F.** *Análise dos elementos fletidos em: Estruturas de aço.* 1993. *Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, EESC USP. São Carlos, 1993.*
- LOPES, G. C.; COUTO, C.; REAL, P. V.; LOPES, N.** *Elastic critical momento of beams with sinusoidally corrugated webs.* *Journal of Constructional Steel Research.* [s.l], vol. 129, p. 185-194, 2017.
- MARIAPPAN, S. SOMASUNDARAM, k.; MUTHUSAMY, S.; SIVASUBRAMANI, D.V.; SUPRAKASH, A.S; KOTHANDAPANI, K.** *Lateral-Torsional Buckling of Non-Prismatic I-beams with and without Girders: Linear Analytical and Elastic FEM Approaches.* *Materials Science.* Vol. 29, no.3, 2023.
- NGUYEN, X. T.; PARK, J. S.** *Desing equations for buckling strength of steel I-beam under non-uniform heating condition.* *Fire Safety Journal.* [s.l], vol.127, 2022.
- OLIVEIRA, J. P. S.; CALENZANI, A. F. G.; FAKURY, R. H.; FERREIRA. W. G.** *Elastic Critical Moment of Continuous Composite Beams with a Sinusoidal-web steel profile for lateral-torsional buckling.* *Engineering Structures.* [s.l], vol.113, p. 121-132. 2016.
- ROSSI, A.** *Flambagem lateral com torção e distorção da alma em vigas de perfis i metálicos duplamente simétricos.* 2018. *Dissertação. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.*
- SILVA, C.C.; FAKURY, R.H; SILVA, A.L.R.C.** *Influência da distorção da alma na flambagem lateral com torção de perfis I submetidos a momento constante e carga uniformemente distribuída.* *CONSTRUMETAL, São Paulo, 2016.*
- SOUZA, A. S. C.** *Dimensionamento de elementos estruturais em aço segundo a NBR 8800:2008.* 2009. *Apostila (Curso de Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.*
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J.** *Theory of Elastic Stabilit.* 2. ed. Mc Graw-Hill, 1961.