

# ANÁLISE ESTATÍSTICA DO ERRO DE MODELO DE LAJES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À PUNÇÃO

Carla Simone de Albuquerque (Universidade Federal do Rio Grande) E-mail: carla19matematica@gmail.com  
Mauro de Vasconcellos Real (Universidade Federal do Rio Grande) E-mail: mauroreal@furg.br  
Viviane Leite Dias de Mattos (Universidade Federal do Rio Grande) E-mail: vivaneldm.furg@gmail.com

**Resumo:** Este artigo analisa estatisticamente a variável aleatória erro de modelo associada aos modelos teóricos apresentados nas normas ABNT NBR 6118 (2023), ACI318 (2022), EUROCODE2 (2023) e FIB MC2020 (2024). O erro de modelo é definido como a razão entre os resultados experimentais e os previstos pelos critérios normativos. A análise considera o estado limite último à punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento, com base em 218 resultados experimentais disponíveis na literatura. Os coeficientes parciais de segurança foram desconsiderados, permitindo estimar valores médios de resistência última à punção. Os resultados dos modelos normativos foram comparados aos dados experimentais, calculando-se métricas de erro estatístico, incluindo Erro Médio Absoluto (MAE), Erro Quadrático Médio (RMSE), Coeficiente de Determinação ( $R^2$ ) e Erro Quadrático Médio Normalizado (NRMSE), para avaliar precisão e variabilidade. Entre as normas, a FIB MC2020 apresentou maior concordância com os resultados experimentais, exibindo os menores MAE, RMSE e NRMSE, além de elevado  $R^2$ , com erro de modelo médio de 0,997. Em contrapartida, a ACI318, NBR 6118 e EUROCODE2 subestimaram, em média, as cargas de ruptura em 30,31%, 15,54% e 7,32%, respectivamente, com maiores valores de MAE, RMSE e NRMSE. Os resultados indicam que a FIB MC2020 fornece a estimativa mais precisa da resistência à punção, enquanto a ACI318 tende a subestimar significativamente a resistência das lajes. O estudo reforça a importância de escolher critérios normativos que refletem o comportamento experimental para projetos estruturais seguros e confiáveis.

**Palavras-chave:** Erro de modelo, resistência à punção, resistência experimental.

## STATISTICAL ANALYSIS OF MODEL ERROR OF REINFORCED CONCRETE SLABS SUBJECTED TO PUNCHING

**Abstract:** This paper statistically analysis the model error associated with the theoretical models presented in the standards ABNT NBR 6118 (2023), ACI318 (2022), EUROCODE2 (2023), and FIB MC2020 (2024). Model error is defined as the ratio between experimental results and predictions by the normative criteria. The analysis considers the ultimate limit state for punching of reinforced concrete flat slabs without shear reinforcement, based on 218 experimental results from the literature. Partial safety coefficients were disregarded, allowing the estimation of mean ultimate punching resistance. The normative model results were compared to experimental data, and statistical error metrics including Mean Absolute Error (MAE), Root Mean Square Error (RMSE), Coefficient of Determination ( $R^2$ ), and Normalized Root Mean Square Error (NRMSE) were calculated to assess accuracy and variability. Among the standards, FIB MC2020 showed the closest agreement with experimental results, exhibiting the lowest MAE, RMSE, and NRMSE, and a high  $R^2$ , with a mean model error of 0.997. In contrast, ACI318, NBR 6118, and EUROCODE2 underestimated punching loads on average by 30.31%, 15.54%, and 7.32%, respectively, with higher MAE, RMSE, and NRMSE values. These findings indicate that FIB MC2020 provides the most accurate estimation of punching resistance, while ACI318 tends to significantly underestimate slab strength. The study highlights the importance of selecting normative criteria that reflect experimental behaviour for safe and reliable structural design.

**Keywords:** Model error, punching resistance, experimental resistance.

### 1. INTRODUÇÃO

As incertezas de modelo decorrem das simplificações adotadas na representação do comportamento estrutural e podem ser descritas pela variável aleatória denominada erro de modelo, cuja distribuição de probabilidade é obtida por meio de caracterização estatística (BECK, 2024). Na análise de estruturas de concreto armado, os modelos

usualmente empregados para estimar a capacidade resistente dos elementos estruturais estão sujeitos a tais incertezas. Em decorrência disso, diversos estudos têm buscado avaliar o erro de modelo em estruturas de concreto armado (NOWAK *et al.*, 2012; SYKORA *et al.*, 2013; RIBEIRO *et al.*, 2016; CERVENKA *et al.*, 2018).

Apesar dos avanços em sua análise com o uso de *machine learning* e de modelos probabilísticos, ainda faltam estudos comparativos abrangentes entre as principais normas internacionais. Nesse sentido, diferentes pesquisas destacam a importância da aplicação de métodos estatísticos para uma caracterização adequada do erro de modelo. Por exemplo, Silva Júnior (2023) desenvolveram e compararam modelos baseados em técnicas de aprendizado de máquina para prever a resistência à punção de lajes lisas sem armadura de cisalhamento; Li *et al.* (2023) propuseram o uso do método Bayesiano aliado a Cadeias de Markov via Monte Carlo para a formulação de modelos probabilísticos da resistência ao cisalhamento em vigas-parede; Borzovic *et al.* (2023) realizaram avaliação estatística da precisão e confiabilidade de modelos aplicados a vigas e lajes unidirecionais reforçadas com barras de polímero reforçado com fibra de vidro; Abood *et al.* (2024) desenvolveram modelos baseados em árvores de regressão impulsionadas por gradiente para prever a resistência ao cisalhamento de lajes reforçadas com compósitos poliméricos com fibras; e Silva *et al.* (2024) analisaram a confiabilidade do dimensionamento à punção em lajes lisas sem armadura de cisalhamento.

Diante dessa perspectiva, este trabalho apresenta uma análise estatística da variável aleatória erro de modelo associada aos modelos teóricos prescritos nas normas ABNT NBR 6118 (2023), ACI 318 (2022), Eurocode2 (2023) e FIB MC2020 (2024). A investigação considera 218 ensaios experimentais de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento disponíveis na literatura, avaliados no estado limite último à punção.

As lajes lisas, por se apoiarem diretamente sobre os pilares, apresentam significativa concentração de tensões cisalhantes nas regiões de conexão. A principal consequência dessas tensões é a ruptura sem o escoamento da armadura, caracterizando um mecanismo frágil de falha, conhecido como punção (ARAÚJO, 2014). Esse fenômeno representa um estado limite último de cisalhamento nas áreas próximas às cargas concentradas e constitui um problema crítico de segurança, pois ocorre de forma súbita e sem sinais prévios. Por esse motivo, é essencial que as normas relacionadas ao tema apresentem previsões precisas e confiáveis.

Nesse contexto, as normas de dimensionamento de estruturas de concreto propõem modelos para prever a resistência ao cisalhamento em lajes, possibilitando o ajuste dos parâmetros de projeto a fim de prevenir a ocorrência da punção (OLALUSI e AWOYERA, 2021). Assim, o objetivo principal deste trabalho é quantificar e avaliar a variável aleatória erro de modelo de acordo com os critérios de dimensionamento estabelecidos nas normas ABNT NBR 6118 (2023), ACI 318 (2022), Eurocode2 (2023) e FIB MC2020 (2024), referentes ao cálculo da resistência última de lajes lisas de concreto armado, comparando-as.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia adotada neste artigo foi estruturada em cinco etapas principais: apresentação dos dados, análise exploratória, estudo de correlações, análise de regressão com respectivos intervalos de confiança, caracterização estatística do erro de modelo e comparação dos resultados obtidos pelas diferentes normas. As análises estatísticas e a

organização dos dados foram realizadas nos softwares R (R Core Team, 2023) e Python (Python Software Foundation, 2023), contemplando o processamento dos dados, a aplicação dos testes e a construção dos gráficos. A análise estatística inferencial adotou o valor de 0,05 para nível de significância.

## 2.1 Obtenção da amostra

O estudo foi conduzido com base em um banco de dados composto por 218 ensaios experimentais de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento, disponíveis na literatura. Esse conjunto de dados foi obtido a partir da seleção e ajuste de uma base original de 519 resultados (OSPINNA *et al.*, 2023).

## 2.2 Resistência à punção de lajes planas de concreto armado

A punção em lajes lisas de concreto armado, mecanismo de ruptura investigado neste estudo, caracteriza um estado limite último decorrente da concentração de tensões em regiões específicas da laje ao redor do pilar. Esse fenômeno ocorre quando o pilar tende a penetrar na laje, resultando em um modo de falha frágil e abrupto (MARQUE e NOGUEIRA, 2021), conforme ilustrado na Figura 1.

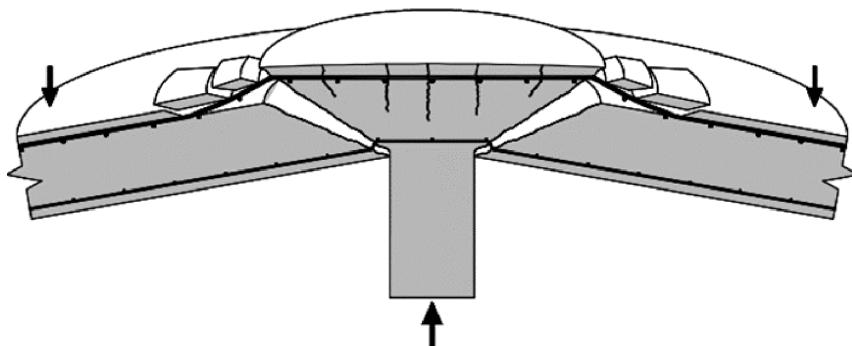


Figura 1 – Ruptura por punção em laje lisa sem armadura de cisalhamento.

Fonte: Guandalini *et al.* (2009)

## 2.3 Prescrições normativas

A falha por punção resulta na separação física entre o pilar e a laje, comprometendo a estabilidade da conexão entre esses elementos. Esse tipo de ruptura ocorre ao longo de uma superfície com formato de cone truncado (MANGALATHU *et al.*, 2021), conforme mostrado na Figura 1.

Em complemento à caracterização do fenômeno de punção, apresentam-se os modelos teóricos previstos nas normas analisadas, os quais foram utilizados para estimar a resistência à punção de lajes sem armadura de cisalhamento. Os cálculos partem do princípio de que há um perímetro de controle ao redor do pilar, correspondente à região onde se desenvolveria o "cone de punção".

No processo de análise do erro de modelo, os valores dos critérios normativos de resistência são definidos sem a aplicação dos coeficientes parciais de segurança, uma vez que esses coeficientes têm a função de introduzir margens de segurança nas estruturas durante a fase de projeto. Além disso, a capacidade de resistência dos elementos é determinada com base em valores médios de resistência das variáveis empregadas nos experimentos. Assim, a variável aleatória referente ao erro de modelo é expressa por:

$$V_{EM} = \frac{V_{exp}}{V_m}, \quad (1)$$

onde  $V_{EM}$  é o erro de modelo,  $V_{exp}$  é a resistência do ensaio e  $V_m$  é a resistência do modelo.

A tensão resistente na superfície crítica da ABNT NBR 6118 (2023) é calculada levando em consideração a presença ou não de armadura de punção. A Equação (2) apresenta a estimativa de resistência para lajes sem armadura de punção.

$$V_{m,NBR} = 0,18\xi^3 \sqrt{100\rho_l f_c} u.d, \quad (2)$$

Sendo,

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2, \quad (3)$$

$$\rho_l = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 2\%, \quad (4)$$

onde:  $\xi$  é o fator de escala para punção,  $f_c$  é a resistência média à compressão do concreto,  $d$  o valor médio da altura efetiva na direção  $x$  e  $y$ ,  $\rho_l$  é a taxa de armadura longitudinal em  $X$  e  $\rho_x, \rho_y$  são as taxas de armadura nas duas direções ortogonais, assim calculadas.

Em se tratando de lajes sem armadura de cisalhamento, a norma ACI318 (2022) recomenda que a carga de ruptura à punção na ligação laje-pilar seja determinada exclusivamente pela resistência do concreto, assumindo o menor valor entre as Equações (5), (6) e (7) apresentadas a seguir:

$$V_{m,ACI} = \frac{1}{3} \lambda_s \lambda \sqrt{f_c} b_0 d, \quad (5)$$

$$V_{m,ACI} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \lambda_s \lambda \sqrt{f_c} b_0 d, \quad (6)$$

$$V_{m,ACI} = \frac{1}{12} \left(2 + \frac{a_s d}{b_0}\right) \lambda_s \lambda \sqrt{f_c} b_0 d, \quad (7)$$

sendo,

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{2}{1 + 0,004d}} \leq 1, \quad (8)$$

onde:  $\lambda$  é o fator de modificação que leva em consideração a redução das propriedades mecânicas de concretos leves em comparação aos concretos normais de mesmo  $f_c$ .  $b_0$  é o perímetro de controle,  $a_s$ : constante que depende da posição do pilar, sendo igual a 40 para pilares internos, 30 para pilares de borda e 20 para pilares de canto,  $\beta$ : razão

entre a maior dimensão do pilar e a maior largura e  $\lambda_s$  é o fator de modificação do efeito escala.

O dimensionamento para punção de lajes lisas, conforme o FIB MC2020 (2024), é realizado para comparar a força resistente com a força solicitante à punção calculada. A resistência última à punção, para uma laje sem armadura de cisalhamento, pode ser definida como:

$$V_{m,FMC} = K_\Psi \sqrt{f_c} b_0 d_v, \quad (9)$$

onde:  $d_v$  é a distância do centroide da armadura de flexão à área de apoio.  $K_\Psi$  depende da rotação da laje, sendo determinado a partir de seu valor médio por meio de:

$$K_\Psi = \frac{1}{\frac{4}{3} + \frac{15}{32} K_{dg} \Psi d}, \quad (10)$$

sendo,  $\Psi$  a aproximação da rotação da laje (Equação 11) e  $K_{dg}$  um parâmetro que varia em função do diâmetro máximo do agregado ( $d_g$ ), o diâmetro não deve ser menor que 16 mm, assim, pode ser considerado  $K_{dg} = 1$ . Para o nível II de aproximação a rotação é:

$$\Psi = 1,5 \frac{r_s}{d} \frac{f_{yd}}{E_s} \left( \frac{M_{sd}}{M_{Rd}} \right)^{1.5}, \quad (11)$$

sendo,  $r_s$  a posição em relação ao eixo do pilar onde o momento fletor é igual a zero,  $f_{yd}$  é a resistência ao escoamento do aço,  $E_s$  é o módulo de elasticidade da armadura longitudinal,  $M_{sd}$  o momento médio atuante por unidade de comprimento da armadura de flexão numa faixa (para a direção considerada) e  $M_{Rd}$  é a resistência à flexão média do momento numa faixa de suporte.

No caso de lajes sem armadura de cisalhamento, a norma EUROCODE2 (2023) recomenda o uso da Equação (12) para cálculo da resistência à punção:

$$V_{m,EC2} = 0,6 \cdot k_{pb} \left( 100 \rho_1 f_c \frac{d_{dg}}{d_v} \right)^{\frac{1}{3}} b_{0.5} \cdot d, \quad (12)$$

onde:  $k_{pb}$  é o coeficiente de aumento do gradiente de cisalhamento de punção, que pode ser calculado através de:

$$1 \leq k_{pb} = 3,6 \sqrt{1 - \frac{b_0}{b_{0.5}}} \leq 2,5, \quad (13)$$

$b_0$  é o perímetro torno das áreas,  $b_{0.5}$  é o perímetro de controle típico,  $d_{dg}$  é um parâmetro que depende do tipo de concreto e de suas propriedades de agregado, representado por:

$$\begin{cases} 16 \text{ mm} + D \leq 40 \text{ mm para } f_{ck} \leq 60 \text{ MPa} \\ 16 \text{ mm} + D \left( \frac{60}{f_{ck}} \right)^2 \leq 40 \text{ mm para } f_{ck} > 60 \text{ MPa}, \end{cases} \quad (14)$$

onde  $D$  é igual ao diâmetro máximo do agregado.

#### 2.4 Análise exploratória dos dados de entrada e saída

As variáveis de entrada foram inicialmente caracterizadas por meio de estatísticas descritivas (média, mediana, valores mínimo e máximo, desvio padrão, coeficiente de variação, coeficiente de assimetria e coeficiente de curtose). Essa etapa permitiu identificar tendências centrais, dispersão, assimetria, curtose e possíveis valores extremos.

Em seguida, foram calculadas as resistências de cálculo segundo as normas ABNT NBR 6118 (2023), ACI318 (2022), EUROCODE2 (2023) e FIB MC2020 (2024). A partir dessas previsões, definiu-se a variável aleatória erro de modelo, que foi também sumarizada estatisticamente, permitindo caracterizar o comportamento central e a variabilidade dos erros normativos.

#### 2.5 Correlação

A relação entre as variáveis do banco de dados foi avaliada por meio de análises gráficas (diagramas de dispersão e *pairplot*) e coeficientes de correlação de Pearson. Essa etapa possibilitou identificar relações diretas entre propriedades geométricas e mecânicas das lajes e sua influência na resistência experimental, bem como verificar associações entre as resistências experimentais e previstas pelos modelos normativos.

#### 2.6 Regressão e intervalos de confiança

Para cada norma, foram ajustados modelos de regressão linear entre resistências experimentais e previstas pelos modelos normativos. Em cada ajuste, foram incluídas linha de referência, reta de regressão estimada e os intervalos de confiança de 95% para a média predita.

Esse procedimento permitiu quantificar o grau de ajuste de cada modelo normativo em relação aos dados experimentais. Foram calculadas métricas de desempenho amplamente utilizadas: Erro Médio Absoluto (MAE), Erro Quadrático Médio (RMSE), Erro Quadrático Médio Normalizado (NRMSE) e Coeficiente de Determinação ( $R^2$ ).

#### 2.7 Comparação entre os erros de modelo obtidos pelas diferentes normas

Inicialmente os resultados obtidos para os erros de modelos pelas diferentes normas foram comparados por meio de uma análise de variância paramétrica com blocos, com a utilização do teste F. Entretanto, como os pressupostos do modelo teórico não foram verificados, foi utilizada a análise de variância não paramétrica com a implementação do teste de Friedman, seguido do teste de Wilcoxon pareado com ajuste de Bonferroni, para comparações múltiplas.

Essa abordagem estatística foi utilizada para verificar diferenças significativas entre as distribuições de erros de modelo e buscar evidências quantitativas sobre o desempenho relativo de cada norma no cálculo da resistência à punção.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, compara-se os resultados experimentais das cargas de ruptura à punção de lajes lisas e os determinados pelos critérios normativos. A partir dessa análise, busca-se estimar a variável aleatória erro de modelo. São considerados os modelos preditivos das normas ABNT NBR 6118 (2023), ACI 318 (2022), Eurocode2 (2023) e FIB MC2020 (2024).

### 3.1 Conjunto de dados experimental

O *dataset* utilizado neste estudo é o mesmo empregado por Silva Júnior e Gomes (2023), Nguyen *et al.* (2021), Mangalathu *et al.* (2021) e Lu *et al.* (2020). Trata-se de uma base composta por resultados experimentais de 519 lajes lisas, testadas por diversos pesquisadores desde 1938. Esse banco de dados está disponível em Ospina *et al.* (2023).

Como o objetivo desta pesquisa é identificar a influência da variável erro de modelo através da previsão da carga de ruptura por punção, foram eliminadas 146 lajes que não romperam exclusivamente por este mecanismo ou por terem valores faltantes do  $f_c$  e  $f_y$ . Ainda foi realizado um ajuste dos dados de acordo com os critérios normativos.

As normas são elaboradas para orientar projetos, e, portanto, não possuem uma abrangência ilimitada. Geralmente, buscam atender de forma segura os casos mais comuns na prática. Os critérios adotados para o ajuste dos dados se referem à altura útil da laje ( $d$ ), excluindo lajes com espessura inferior a 50 mm ou superior a 300 mm. De acordo com a ABNT NBR 6118 (2023), o limite mínimo da resistência característica do concreto ( $f_c$ ) é de 20 MPa, enquanto o limite máximo, previsto pela ACI 318 (2022), é de 70 MPa. Quanto à taxa de armadura do aço ( $\rho$ ), a norma brasileira define um valor mínimo de 0,15% e máximo de 2,00%. Considerando esses intervalos para  $d$ ,  $f_c$  e  $\rho$ , foram descartadas mais 155 lajes, resultando em um total de 218 ensaios experimentais. As principais variáveis do estudo são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Variáveis do dataset

Variável	Descrição
$d$	altura útil das armaduras em $X$ e $Y$ (mm)
$b_1$	largura do pilar (mm)
$f_c$	resistência média à compressão do concreto (MPa)
$f_y$	tensão de escoamento média do aço (MPa)
$\rho$	taxa de armadura longitudinal média em $X$ e $Y$
$r_s$	vão de cisalhamento (mm)
$V_{exp}$	resistência experimental (kN)

Uma análise exploratória do conjunto de dados dos ensaios experimentais foi realizada por meio da média ( $\bar{X}$ ), a mediana ( $Md$ ) o desvio-padrão ( $s$ ), o coeficiente de variação ( $cv$ ), o máximo ( $max.$ ) e o mínimo ( $min.$ ) da amostra, assim como, os coeficientes de assimetria ( $g_1$ ) e curtose ( $g_2$ ). Os parâmetros estatísticos que resumem as propriedades das variáveis no banco de dados são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Medidas resumo das variáveis de entrada

Variáveis	min.	$\bar{X}$	Md	max.	$s$	cv	$g_1$	$g_2$
$b_1$ (mm)	51,0	194,7	156,0	901,0	119,54	0,614	3,238	15,06
$d$ (mm)	54,0	114,2	108,5	300,0	40,66	0,356	1,524	3,503
$\rho$	0,0033	0,011	0,0105	0,020	0,004	0,368	0,321	-0,519
$f_c$ (MPa)	20,00	33,58	31,07	70,00	11,45	0,341	1,463	1,558
$f_y$ (MPa)	250	477,00	480	749	123,73	0,265	0,343	-0,197
$r_s$ (mm)	75	672	686	1725	299,21	0,445	0,347	0,447
$V_{exp}$ (kN)	60	359	290	2050	271,56	0,756	2,788	10,393

Os resultados das medidas descritivas apresentados na Tabela 2 resumem as principais características do conjunto de dados analisado, permitindo identificar padrões e tendências. Os valores mínimos e máximos evidenciam a amplitude de variação de cada variável. Observa-se que a média é superior a mediana em  $b_1$ ,  $d$ ,  $f_c$  e  $V_{exp}$ , o que sugere distribuições assimétricas à direita. O coeficiente de variação indica que as variáveis  $b_1$  e  $V_{exp}$  apresentam maior variabilidade relativa, enquanto  $f_y$  é a variável com menor dispersão relativa, seguida por  $f_c$ ,  $d$  e  $\rho$  sendo, portanto, as mais homogêneas. Quanto à assimetria, todas as variáveis exibem valores positivos, indicando distribuições com cauda alongada à direita, embora as distribuições de  $\rho$ ,  $f_y$  e  $r_s$  possam ser consideradas simétricas pelos baixos valores obtidos. Já em relação à curtose, as variáveis  $b_1$ ,  $d$ ,  $f_c$ ,  $r_s$  e  $V_{exp}$  são classificadas como leptocúrticas (caudas pesadas), enquanto  $\rho$  e  $f_y$  apresentam distribuições platicúrticas (caudas mais leves, valores mais espalhados).

### 3.2 Caracterização das variáveis de saída

A resistência dos modelos de cálculo e o erro de modelo correspondentes a cada norma estudada foram determinados com base nas variáveis de saída do problema, que são: resistência do modelo de cálculo ( $V_m$ ) e erro de modelo ( $E_m$ ). Os resultados obtidos são apresentados por meio de um resumo estatístico, conforme exibido na Tabela 3. Esses indicadores permitem caracterizar a tendência central, a dispersão e a forma da distribuição dos resultados obtidos segundo as diferentes prescrições normativas e seus respectivos erros de modelo.

Tabela 3 – Medidas resumo das variáveis de saída

Variáveis	min.	$\bar{X}$	Md	max.	$s$	cv	$g_1$	$g_2$
$V_{m,NBR}$ (kN)	47,55	315,53	260,57	1783,49	239,48	0,759	2,704	9,897
$V_{m,ACI}$ (kN)	45,34	270,48	228,40	1361,23	206,16	0,762	2,256	6,697
$V_{m,FIB}$ (kN)	71,89	375,06	313,85	1843,74	273,89	0,730	2,366	7,522

Variáveis	min.	$\bar{X}$	Md	max.	$s$	cv	$g_1$	$g_2$
$V_{m,NBR}$ (kN)	47,55	315,53	260,57	1783,49	239,48	0,759	2,704	9,897
$V_{m,EC2}$ (kN)	59,91	337,06	302,26	1554,77	221,24	0,656	2,108	6,566
$E_{m,NBR}$	0,685	1,184	1,160	2,368	0,274	0,231	1,093	2,769
$E_{m,ACI}$	0,723	1,435	1,412	2,695	0,397	0,277	0,424	-0,104
$E_{m,FIB}$	0,418	0,997	1,002	1,655	0,235	0,236	0,047	0,092
$E_{m,EC2}$	0,583	1,079	1,067	2,165	0,240	0,222	0,659	1,462

As variáveis de resistência do modelo de cálculo determinadas pelos modelos normativos ( $V_m$ ) apresentam médias amostrais distintas entre as normas, variando de 270,48 kN (ACI318) até 375,06 kN (FIB MC2020). Em todos os casos a mediana é menor que a média, indicando assimetria à direita. Os coeficientes de assimetria ( $g_1 > 2$ ) e os elevados valores de curtose ( $g_2 > 3$ ) evidenciam distribuições fortemente assimétricas e leptocúrticas, sugerindo a presença de valores extremos. Os desvios-padrão são elevados, refletindo a grande variabilidade dos dados experimentais, o que é confirmado pelos coeficientes de variação (entre 0,656 e 0,762) que mostram uma dispersão relativamente alta em relação às médias.

Para os erros de modelo ( $E_m$ ), as médias e medianas são muito próximas, demonstrando uma tendência à simetria de suas distribuições. O coeficiente de assimetria, entretanto, indica a distribuição dos erros com assimetria positiva forte para a norma NBR e positiva moderada para a norma EC2. Os coeficientes de curtose para a distribuição dos erros são menores que os observados para  $V_m$ , mas estas continuam leptocúrticas para a NBR e EC2. Ressalta-se que essas observações se aplicam exclusivamente ao conjunto de dados analisado neste estudo.

A Figura 2 ilustra os erros de modelo associados a cada norma analisada, por meio de duas representações complementares: um gráfico de barras, que evidencia os valores médios, e um boxplot, que apresenta a distribuição, a dispersão e a presença de valores discrepantes.

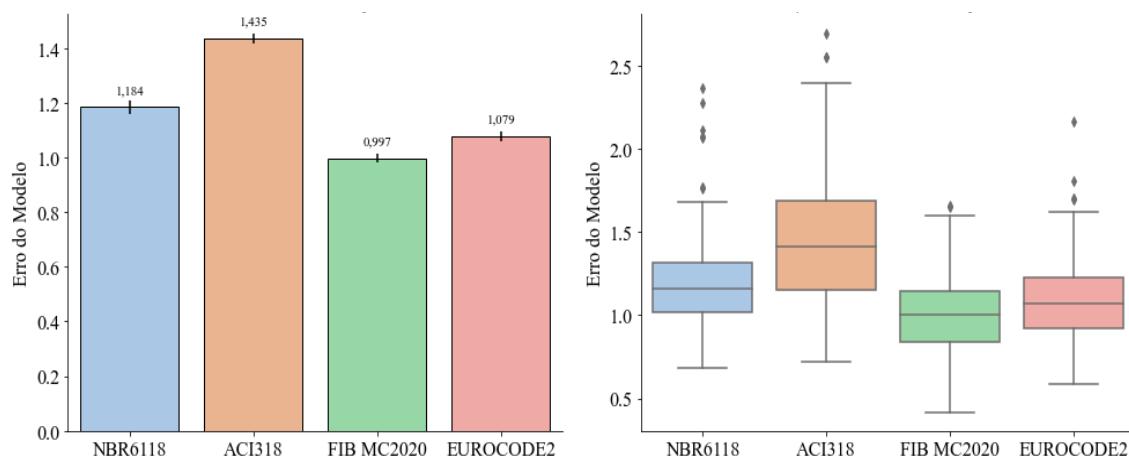


Figura 2 – Erros de modelo por norma

Os resultados apresentados nos gráficos da Figura 2 mostram o comportamento do erro de modelo de acordo com as normas analisadas. No gráfico de barras, observa-se que o erro de modelo calculado pela norma FIB MC2020 apresentou a menor média (0,997), indicando maior acurácia, enquanto a norma ACI318 apresentou o maior erro de modelo médio (1,435), sugerindo menor acurácia. O boxplot complementa essa análise, ao evidenciar a variabilidade das distribuições dos erros de modelo, mostrando que a norma FIB MC2020 apresenta uma distribuição mais concentrada, menor variabilidade e menos valores discrepantes em comparação às demais normas. Para complementar a caracterização das variáveis de saída, foram construídos histogramas dos erros de modelo ( $E_m$ ) para cada norma, permitindo visualizar de forma direta a distribuição e frequência dos valores observados, ilustrados na Figura 3.

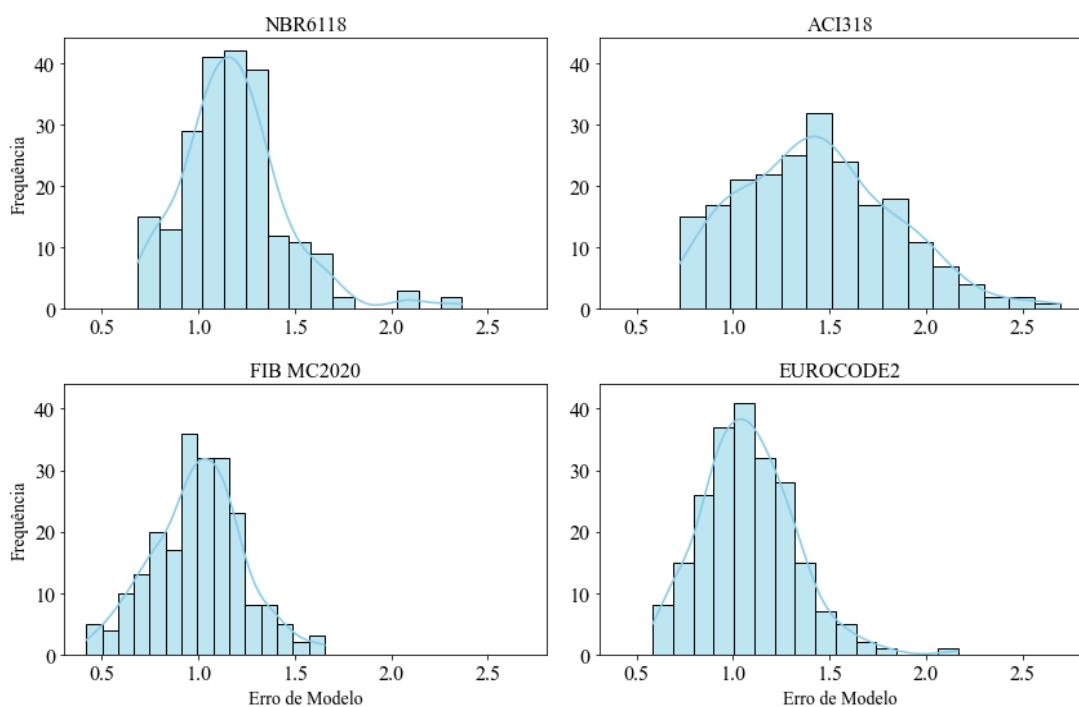


Figura 3 – Histogramas do erro de modelo de cada norma

Pela Figura 3, observa-se que a norma FIB MC2020 apresenta uma distribuição mais concentrada em torno do valor médio, indicando menor variabilidade e maior precisão. Em contrapartida, as normas ACI318 e NBR6118 apresentam distribuições mais dispersas e assimétricas, sugerindo maior variabilidade nos erros de modelo. A norma EUROCODE2 apresenta distribuição intermediária, com leve assimetria positiva e dispersão moderada.

### 3.3 Desempenho dos modelos normativos: análise dos erros de modelo

O resultado dos modelos de cálculo das normas ABNT NBR 6118 (2023), ACI 318 (2022), Eurocode2 (2023) e FIB MC2020 (2024) são avaliados levando em consideração a análise dos modelos de resistência à punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento com os resultados experimentais através da variável aleatória erro de modelo.

Depois de ajustar um modelo de regressão linear, considerando  $V_m = f(V_{exp})$ , o desempenho dos modelos analíticos, foram consideradas as seguintes métricas estatísticos de erro: MAE, RMSE,  $R^2$  e NRMSE. O MAE calcula a média das diferenças absolutas entre os valores previstos e os observados. O RMSE representa a média das diferenças quadráticas, sendo que valores menores indicam melhor desempenho do modelo. O  $R^2$  avalia o grau de ajuste do modelo aos dados, indicando que quanto mais próximo de 1, maior a capacidade explicativa do modelo. O NRMSE corresponde ao RMSE normalizado, permitindo a comparação em termos percentuais.

A Figura 4 apresenta a comparação entre os valores de resistência experimental ( $V_{exp}$ ) e os modelos de cálculo ( $V_m$ ) das normas estudadas. Em cada gráfico, são mostrados os pontos experimentais, a linha de referência ( $V_{exp} = V_m$ ), a regressão linear ajustada e os respectivos intervalos de confiança de 95%. A análise da reta de regressão fornece informações importantes sobre o desempenho de cada modelo: a inclinação indica a tendência geral do modelo em subestimar ou superestimar os valores experimentais, enquanto o intercepto aponta possíveis desvios sistemáticos. O intervalo de confiança demonstra a faixa de incerteza associada à média prevista, permitindo avaliar a confiabilidade das estimativas.

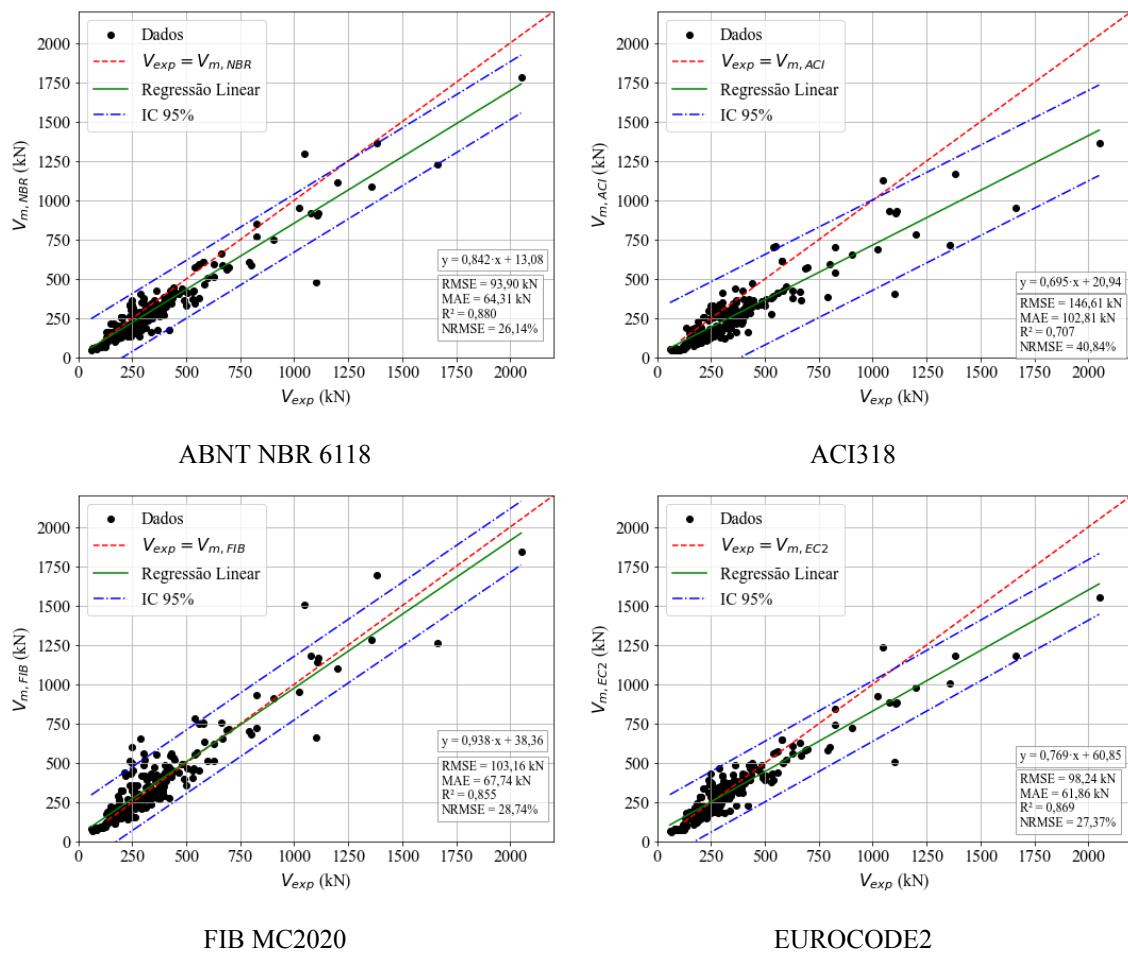


Figura 4 – Modelos de cálculo das normas estudadas

Observa-se na Figura 4 que o modelo FIB MC2020 apresenta inclinação próxima de 1 e intercepto próximo de 0, indicando boa correspondência com os valores experimentais e pouco viés sistemático. Os intervalos de confiança estreitos reforçam a consistência das previsões. Em contraste, os modelos NBR6118 e ACI318 apresentam inclinações menores que 1, sugerindo tendência à subestimação, com intervalos de confiança mais amplos, indicando maior dispersão e incerteza nas previsões. O modelo EUROCODE2 apresenta desempenho intermediário, com inclinação ligeiramente inferior a 1 e intervalos de confiança moderados, refletindo precisão e variabilidade intermediárias.

A análise conjunta das métricas e da reta de regressão com seus intervalos de confiança permite interpretar não apenas a magnitude dos erros, mas também identificar padrões de subestimação ou superestimação. Nesse contexto, o modelo FIB MC2020 se destaca por apresentar menores valores de MAE, RMSE e NRMSE, além de elevado  $R^2$ , confirmando sua maior acurácia e consistência nas estimativas. Os modelos NBR6118 e ACI318, com maiores erros e  $R^2$  mais baixos, indicam maior dispersão e tendência à subestimação, enquanto o EUROCODE2 apresenta desempenho intermediário, consistente com sua posição nos gráficos de regressão.

Complementando esta análise, a comparação do erro médio de modelo obtido pelas diferentes normas foi feita pelo teste não-paramétrico de Friedman, que evidenciou diferenças estatisticamente significativas entre as normas ( $F_{calculado} = 430,13$ ,  $gl = 3$  e  $p\text{-valor} \approx 6,57 \times 10^{-93}$ ). As comparações pares a par, realizadas pelo teste Wilcoxon, ajustadas pelo método de Bonferroni, mostraram que todas as normas diferem significativamente entre si ( $p\text{-valor} < 0,001$ ), confirmadas visualmente pelos gráficos das Figuras 2 e 3, nos quais é possível observar diferenças claras nas distribuições.

As comparações revelaram que a ACI318 apresentou os maiores erros de modelo em relação a todas as demais normas, enquanto a FIB MC2020 obteve os menores valores. As normas EUROCODE2 e NBR6118 situaram-se em posição intermediária, também diferindo entre si e das demais normas. Esses resultados confirmam que a escolha da norma influencia significativamente a precisão do modelo, tanto em termos de erro de modelo quanto de variabilidade.

#### 4. CONCLUSÃO

A avaliação dos modelos de resistência à punção foi realizada com base em um banco de dados contendo os resultados de ensaios de 218 lajes lisas sem armadura de cisalhamento. Os erros de modelo foram calculados segundo as normas ABNT NBR 6118, ACI318, FIB MC2020 e EUROCODE2, revelando significativa variabilidade nos resultados obtidos.

A análise comparativa entre os critérios normativos e os dados experimentais indicou que a norma FIB MC2020 apresentou a maior proximidade com os valores reais, demonstrando maior precisão na estimativa da resistência à punção. Por outro lado, a ACI318 apresentou tendência a subestimar a resistência das lajes, fornecendo valores significativamente inferiores aos observados experimentalmente. As normas NBR6118 e EUROCODE2 apresentaram desempenho intermediário, com erros menores em relação à ACI318, mas ainda superiores aos verificados para a FIB MC2020.

Esses resultados, demonstrados pelas métricas estatísticas de erro (MAE, RMSE,  $R^2$  e NRMSE), destacam a importância de selecionar critérios normativos que refletem com maior fidelidade o comportamento experimental das lajes, especialmente em projetos que demandam precisão na estimativa da resistência à punção. Além disso, evidenciam

a necessidade de revisão e atualização contínua das normas, de forma a reduzir discrepâncias entre predição teórica e desempenho real das estruturas.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste estudo.

## REFERÊNCIAS

- ABOOD, E. A; ABDALLAH, M. H; ALSAADI, M; IMRAN H; BERNARDO, L. F. A, DE DOMENICO, D; HENEDY, S. N.** Machine Learning-Based Prediction Models for Punching Shear Strength of Fiber-Reinforced Polymer Reinforced Concrete Slabs Using a Gradient-Boosted Regression Tree. *Materials*, vol. 17, 2024.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE COMMITTEE.** ACI 318-22: Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary, 2022.
- ARAÚJO, J. M.** Curso de Concreto Armado. 4 vols. Rio Grande (RS), Editora Dunas, 2014
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.** ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro (RJ): ABNT, 2023.
- BECK, A. T.** Confabilidade e Segurança das Estruturas. 2. ed. Rio de Janeiro (RJ): Orsa Maggiore, 2024.
- BORZOVIČ, V; GAJDOŠOVÁ, K; HALVONIK, J; GREGUŠOVÁ, N.** Partial factor for the shear resistance model in the 2nd generation of Eurocode 2 for GFRP reinforced concrete members. *Engineering Structures*, v. 285, 2023.
- CERVENKA, V; CERVENKA, J; KADLEC, L** Model uncertainties in numerical simulations of reinforced concrete structures. *Structural Concrete*, v.19, n. 6, p. 2004 – 2016, 2018.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION.** EN 1992-1-1: Eurocode2 - Design of concrete structural, 2023.
- FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON.** FIB Model Code for Concrete Structures 2020. Lausanne, 2024.
- GUANDALINI, S; BURDET, O. L; MUTTONI, A.** Punching tests of slabs with low reinforcement ratios. *ACI Structural Journal*, [s. l.], v. 106, n. 1, p. 87–95, 2009.
- LI, Z; LIU, X; KOU, D; HU, Y; ZHANG, Q; YUAN, Q.** Probabilistic Models for the Shear Strength of RC Deep Beams. *Applied Sciences*, v.13, 2023.
- LU, S; KOOPALIPOOR, M; ASTERIS, P. G; BAHRI, M; ARMAGHANI, D. J.** A Novel Feature Selection Approach Based on Tree Models for Evaluating the Punching Shear Capacity of Steel Fiber-Reinforced Concrete Flat Slabs. *Materials*, v. 13, p. 1-20, 2020.
- MANGALATHU, S; SHIN, H; CHOI, E; JEON, J.** Explainable machine learning models for punching shear strength estimation of flat slabs without transverse reinforcement. *Journal of Building Engineering*, v. 39, p. 1-10, 2021.
- MARQUE, N. L. A, NOGUEIRA, C. G.** Probabilistic analysis of slab-column connections subjected to punching shear according to the ABNT NBR 6118 (2014) recommendations considering the model error measure. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v.14, n.6, 2021.
- NGUYEN, H. D; TRUONG, G. T; SHIN, M.** Development of extreme gradient boosting model for prediction of punching shear resistance of r/c interior slabs. *Engineering Structures*, v. 235, p. 1-14, 2021.
- NOWAK, A. S; RAKOCZY, A. M; SZELIGA, E. K.** Revised Statistical Resistance Models for R/C Structural Components. *American Concrete Institute*, v. 284, p.1 - 16, 2012.

**OLALUSI, O. B; AWOYERA, P. O.** Shear capacity prediction of slender reinforced concrete structures with steel fibers using machine learning. *Engineering Structures*, v.116, p. 140 – 147, 2021.

**OSPINA, C. E; BIRKLE, G; WIDIANTO, Y; WANG, S. R; CATLIN, A. C, PUJOL, S. NEES**: ACI 445 punching shear collected databank, 2023. Disponível em: <https://datacenterhub.org/resources/256>.

**PYTHON SOFTWARE FOUNDATION**. Python: A dynamic, opensource programming language. *Python Software Foundation*, 2023. Disponível em: <https://www.python.org/>

**R CORE TEAM**. *R*: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, 2023. Disponível em: <https://www.R-project.org/>

**RIBEIRO, A. B; CALIXTO, J. M. F; DINIZ, S. M. C.** Assessment of epistemic uncertainties in the shear strength of slender reinforced concrete beams. *Engineering Structures*, v.116, p. 140 – 147, 2016.

**SILVA, G. R; CAMPOS FILHO, A; REAL, M. V.** Reliability of codes provisions for punching shear design. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 17, n.4, 2024.

**SILVA JÚNIOR, E. S. F; GOMES, W. J. S.** Machine learning models to predict the punching shear strength of reinforced concrete flat slabs. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 16, n.4, 2023.

**SYKORA, M; HOLICKY, M; KREJSA, J.** Model uncertainty for shear resistance of reinforced concrete beams with shear reinforcement according to EN1992-1-1. *Transactions of the VSB–Technical University of Ostrava*, v.23, n.2, p.150–159, 2013.